Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103966**

ID профиля: **339875**

Вариант 17

4.

Чистовик 1.

~~$(a+5d)(a+11d) \geq 10a+45d+1$~~

1.

$a_1 = a$ $S = 10a + 45d$ $a_{12} = a+11d$ d - разность $a \in \mathbb{Z}$

$a_{10} = a+9d$ $a_6 = a+5d$ $a_{11} = a+10d$ $a+d \in \mathbb{Z}$

$a_7 = a+6d$ $\Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$a = t$

$a+d = m$

$d = m-t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases}(a+5d)(a+11d) \geq 10a+45d+1 \\ (a+6d)(a+10d) < 10a+45d+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+16ad+55d^2 \geq 10a+45d+1 \quad (1) \\ a^2+16ad+60d^2 < 10a+45d+17\end{cases}$$

$-a^2-16ad-60d^2 > -10a-45d-17 \ (2)$ сложим (1) и (2)

$-5d^2 > -16 \ |(-1)$

$5d^2 < 16$ $d^2 < \frac{16}{5}$ т.к. $d^2 \in \mathbb{Z}$

$d^2 < 3$ $\left[\begin{array}{l} d^2 = 0 \\ d^2 = 1 \end{array}\right.$

$d \neq 0$, т.к. прогр. возраст.

$d = 1$

$$\begin{cases}a^2+16a+55 > 10a+46 \\ a^2+16a+60 < 10a+62\end{cases} \quad \begin{cases}a^2+6a+9 > 0 \\ a^2+6a-2 < 0\end{cases} \quad (a+3)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -3$$

$D = 36+8 = 44$

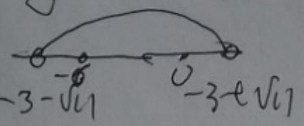
$$a \in \left(\frac{-6-\sqrt{44}}{2}; \frac{-6+\sqrt{44}}{2}\right)$$

$a \in \left(\frac{-6-2\sqrt{11}}{2}; \frac{-6+2\sqrt{11}}{2}\right)$ $a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$

$3 < \sqrt{11} < 4 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -3-\sqrt{11} < -6 \\ -3-\sqrt{11} > -7 \\ -3+\sqrt{11} > 0 \\ -3+\sqrt{11} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \in [-6; 0]$$

т.к. a – целое и $a \neq -3$



$a = \left[\begin{array}{l} -6 \\ -5 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right.$

при всех таких a условие (1) будет выполнено и условие (2) будет выполнено, причем прогр. возрастает, a и b – целые. Т.е. все такие a подходят.

Отв: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$

Чистовик 2

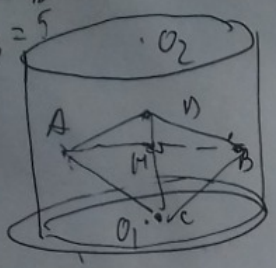
Чистовик 3

№2

$AD = DB = 6$

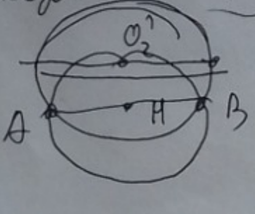
$AC = CB = 5$

$AB = 2$



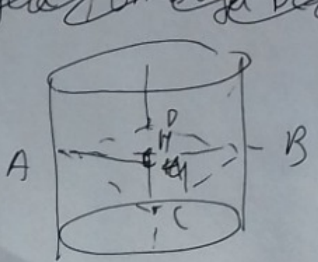
Зафиксируем отрезок DC. Тогда все отрезки в тетраэдре заданы однозначно. $\triangle ADC = \triangle BDC$.

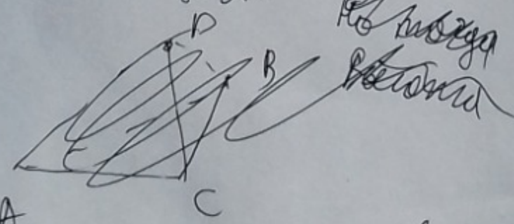
Очевидно, что проекции H точек A и B на DC совпадают. Тогда множество таких точек A и B, что $AD = DB$ и $AC = CB$ — это окружность с радиусом AH и центром в точке H. ~~Тогда~~ Но эта окружность пересекает окружность ~~конуса~~ цилиндра (перпендикулярную главной оси, максимум в двух точках. Рассмотрим в сечении, перпендикулярном главной оси ~~конуса~~ цилиндра и проходящем через H.) ~~Она~~ Из симметрии очевидно, что B (т.к. подходят только 2 точки) должна быть симметрична A отно пл-ти DCO_2 (пл-ть симметрии цилиндра) (O_1 и O_2 — центры торцов ~~кон~~ цилиндра).



Но тогда AB — хорда в окр-ти с радиусом цилиндра, откуда $2r \geq AB$ $r \geq \frac{AB}{2} = 1$. ~~Если $r = 1$, AB — диаметр~~ ~~конуса. Тогда DC ⊥ AB~~ ~~т.к. DC перп-на~~ ⊥ плоскости ~~торцов.~~

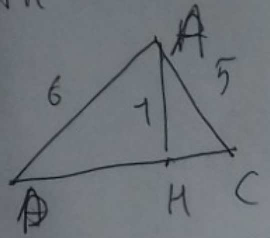
~~Но тогда высота~~





Рассм. В таком цилиндре DC — главная ось, т.к. $AH = 1 = r$ (H – проекция A на ~~Ai~~ DC).

Чистовик 4



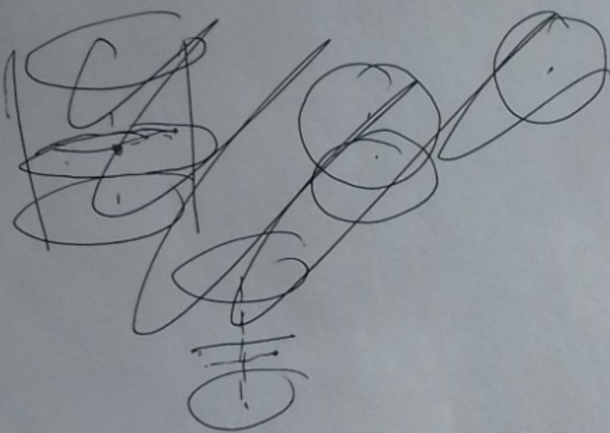
$HC = \sqrt{24}$

$HD = \sqrt{35}$

$DC = DH + HC$

Отв: $\sqrt{24} + \sqrt{35}$

~~к задаче~~



Чистовик 5

3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 2 \\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2) \end{cases}$$

т.к. $a^2+b^2\le \min(2a+2b;2)$

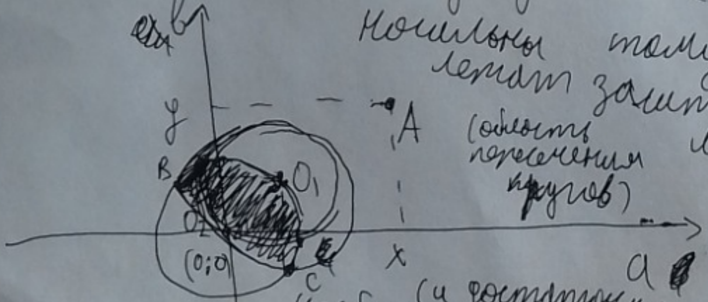
$$\begin{cases} a^2+b^2\le 2a+2b \\ a^2+b^2\le 2 \end{cases}$$

т.е. 2-е условие равносильно $\begin{cases} a^2+b^2-2a-2b\le 0 \quad |+2 \\ a^2+b^2\le 2 \end{cases}$

перепишем первое условие по-другому, в условии $a^2+b^2-2a-2b\le 0$ выделим полные квадраты

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2\le 2 & (1) \\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2 & (2) \\ a^2+b^2\le 2 & (3) \end{cases}$$

Если мы фиксируем пару $(x;y)$, то первое условие означает, что числа a и b лежат внутри (нестрогого) круга с центром в т. $(x;y)$ и радиусом $\sqrt{2}$, второе — круг с центром $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$, третье — круг с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$. (2) и (3) равносильны тому, что $(a;b)$ принадлежат заштрихованной области (область пересечения кругов). Чтобы пары $(a;b)$ существовали,



(A)
необходимо (и достаточно), чтобы от точки $(x;y)$ до области расстояние не превосходило $\sqrt{2}$ (т.к. это радиус окр-ти с центром A). Изобразим множество точек таких, что от них до области Ш (заштрих. область) расстояние не превос. $\sqrt{2}$.

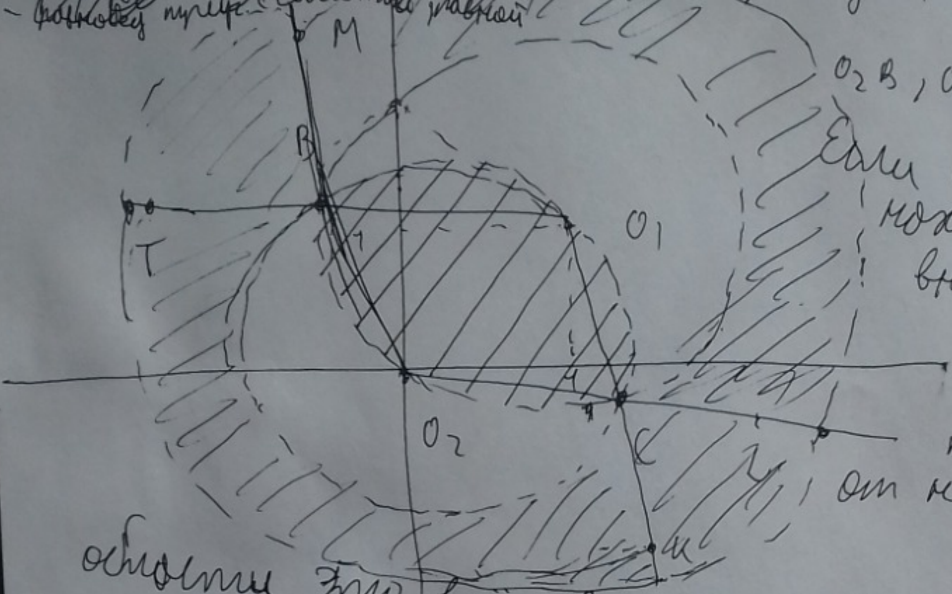
~~Чистовик~~ 6

~~BO_1CO_2 – квадрат, т.к. $BO_1 = O_1C = CO_2 = BO_2$ и $\angle BO_2C = 90^\circ$~~

~~Из геометрии BK [illegible] O_2O_1 пополам [illegible] высотой [illegible] BO_2C – равновел. треуг. [illegible] высотой равной~~

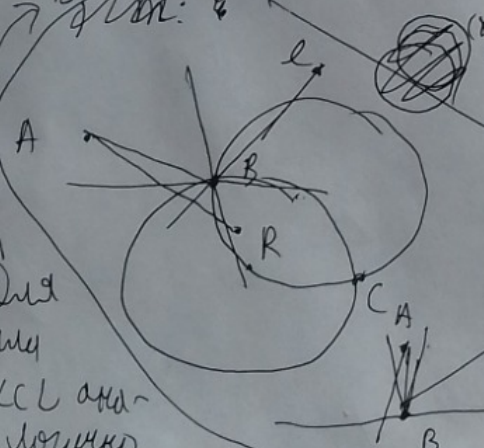
B и C – точки пересеч. окр. с центрами O_2 и O_1

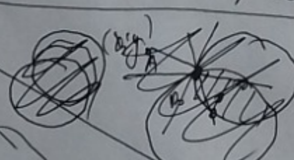
Проведем лучи O_2B, O_2C, O_1B, O_1C



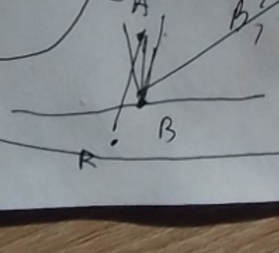
Если точка находится внутри угла BO_1C, то раст. от нее до области это все равно что раст. от нее до ~~кур~~ круга с центром O_1, аналогично для угла BO_2C. Если точка находится внутри угла TBM, то раст. от нее до ш это все равно что раст. от нее до точки B

~~Док:~~



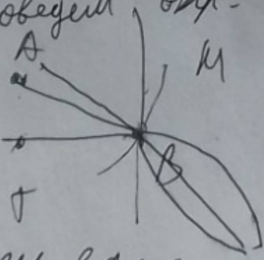


~~Док. если R – [illegible] любая точка ш кроме B [illegible] через B провести прямую (e) перп-ную BC, все точки ш, кроме B, будут ниже нее:~~



Для угла KCL аналогично

Докажем, что для остальных точек и в этом случае расст. больше. Проведем окр. радиуса AB, она очевидно пересечет

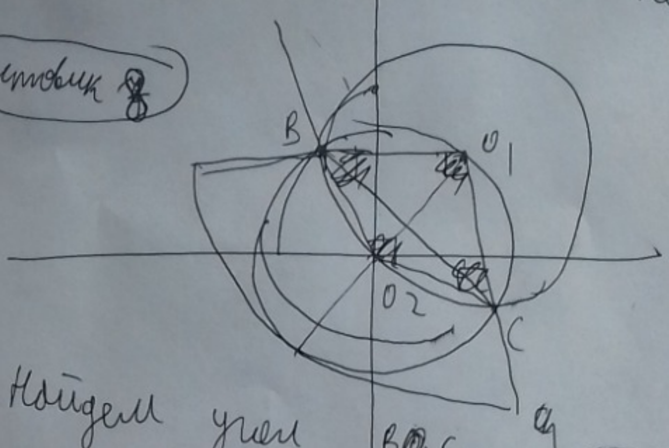


и только в т-ке B. Значит, г ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ чтобы попасть в другие точки радиус нужно увеличивать

Чистовик 7

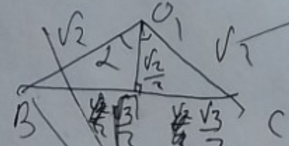
Значит, ~~все~~ точки 1 коорд. от которых до шара не больше $\sqrt{2}$ лежат в части кольца с центром в O_1 и радиусом $2\sqrt{2}$ (если они лежат внутри O_1BC

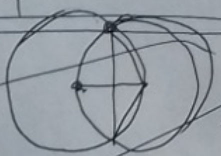
Чистовик 8



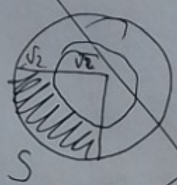
Найдем угол BO_1C

$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$





(из геометрии) $\angle BO_1C = 90°$

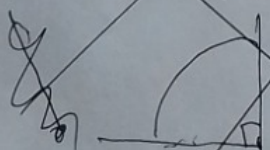


$S_1 = \frac{1}{4}\pi(2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}8\pi = 2\pi$

$S_2 = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$

$S = S_1 - S_2 = \frac{3\pi}{2}$

Если точка лежит внутри TBM, то искомое множество — часть ~~из~~ круга с центром в C и радиусом $\sqrt{2}$ ($\angle TBM = 90°$ из геометрии)

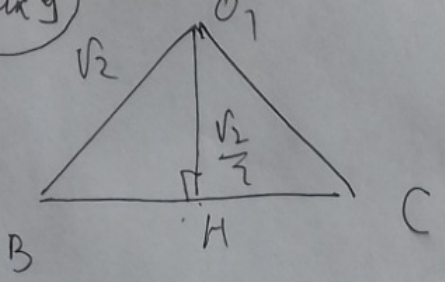


$S = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$

Тогда площадь половинки M равна $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = 2\pi$ (из симметрии).

Ответ: 4π

Чистовик 9



$\angle O_1BC = 30^\circ$ от.к. $O_1H = \frac{O_1B}{2}$

$\frac{\angle BO_2C}{2} = 60^\circ \Rightarrow \angle BO_2C = 120^\circ$

$S_1 = \frac{1}{3}\pi(\sqrt2)^2 = \frac{2}{3}\pi$

$S_2 = \frac{1}{3}\pi(\sqrt2)^2 = \frac{2}{3}\pi$

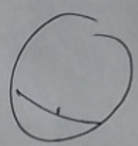
$\Rightarrow S = \frac{6}{3}\pi = 2\pi$

Если точка лежит внутри $\angle TBM$, то искомое мн-во – часть круга с центром B и рад $\sqrt2$ ($\angle TMB = 60^\circ$, т.к. $\angle O_1BO_2 = 2\angle O_1BC = 60^\circ$)

$S = \frac{1}{6}\pi(\sqrt2)^2 = \frac{\pi}{3}$

Тогда половина площади Ф равна $2\pi + \frac{\pi}{3}$ (из симметрии) $= \frac{7\pi}{3}$

Отв.: $\frac{14\pi}{3}$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103966**

ID профиля: **339875**

Вариант 17

Чистовик ✓

№1.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=6 & (1) \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} & (2) \end{cases}$$

$a, b, c \vdots 6$. Хотя бы одно из чисел (не делится на) $\not\vdots$ 4, иначе мы могли бы увеличить НОД до 12.

~~Пусть без огр. об-ти $a \vdots 4$~~. Аналогично хотя бы одно из них не $\vdots$ на 9. Причем во все числа входят только простые 2 и 3, т.к. ~~НОК~~ в НОК входят только 2 и 3.

1) Если без огр. об-ти $b \not\vdots 9$. Тогда

$a = 2 \cdot 3^x$ $\quad x, y, m, n \geq 1$

$b = 2^y \cdot 3$ $\quad x, y, m, n \in \mathbb{Z}$

$c = 2^m \cdot 3^n$

~~Тогда~~ НОД уже равен, очевидно, 6.

Из (2) следует, что $\max(y; m) = 15$, $\max(x; n) = 16$

Если $y=15$, для m варианты $\underbrace{1, 2, \ldots 15}_{15}$

аналогично $m=15$, $\underbrace{y=1, 2, \ldots 15}_{15}$

т.е. 29 вариантов. случай (15; 15) посчитан дважды.

Условия с степенью двойки и тройки независимы, для тройки аналогично 31 случай

$16 \to 1, 2, \ldots 16$. Всего $29 \cdot 31$. Если считать, что тройки, отличающиеся порядком следования букв различны,

Тогда система равносильна следующему:

$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1}$
$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2}$
$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3}$

$\min(x_1; x_2; x_3) = 1$
$\max(x_1; x_2; x_3) = 15$
$\min(y_1; y_2; y_3) = 1$
$\max(y_1; y_2; y_3) = 16$

т.к. если хотя бы в одно число 2 входит в степени > 15, мы можем ув-ть НОК.

Для 3 аналогично.

~~Если~~ Если считать, что тройки, отличающиеся порядком следования букв, различны: выбрать число, к-е будет равно 15 из 3 чисел 3 способа, из оставшихся 2 способа выбрать то, к-е будет равно 1. Причем условия на вхождение 2 и 3 независимы. Значит, 6 способов выбрать пару (1; 15), а для третьего числа подходят все 15 вариантов: 1, 2, ... 15. Значит, всего $6 \cdot 15 = 90$ способов. Для тройки аналогично $6 \cdot 16 = 96$ вариантов. Т.к. условия независимы, к-во троек $= 96 \cdot 90$

Отв.: $96 \cdot 90$

Чистовик 2

Чистовик 3

№2.

$\cancel{\ldots}4x+1=a$ $\log_{\sqrt{b}} a$, $\log_a c^2$, $\log_c b$ $b>0$

$5x-1=b$ $a,b,c>0$

$\frac{x}{2}+2=c$ $a,b,c\neq 1$

1) $\begin{cases}\log_{\sqrt{b}} a=\log_a c^2 \\ \log_c b=\log_a c^2-1\end{cases}$ $2\log_b a=2\log_a c$

$\log_b a=\log_a c$

Докажем, что $\log_a c\cdot\log_c b\cdot\log_b a=1$

$a^{\log_a c\log_c b\log_b a}=c^{\log_c b\log_b a}=b^{\log_b a}=a$

$\Rightarrow \log_a c\log_c b\log_b a=1$

$\log_c b=\dfrac{1}{\log_a c\log_b a}$ ↙ подставим

$\begin{cases}\log_b a=\log_a c\\ \log_c b=\log_a c^2-1\end{cases}$ $\begin{cases}\log_b a=\log_a c\\ \dfrac{1}{\log_a c\log_b a}=2\log_a c-1\end{cases}$

$m=\log_b a$

$n=\log_a c$ $m=n$

$\dfrac{1}{m^2}=2m-1$ $1=2m^3-m^2$

$\cancel{m^3-m^2-1=0}$ $2m^3-m^2-1=0$

$(m-1)(2m^2+m+1)=0$ $m=1$ - единств. корень

$D=1-4\cdot 2\cdot 1<0$

$$\begin{array}{r|l} 2m^3-m^2-1 & m-1 \\ \hline 2m^3-2m^2 & 2m^2+m+1 \\ m^2-1 & \end{array}$$

$\log_b a=1$ $a=b$ $4x+1=5x-1$ ~~x=2 подходит~~

но $\log_c b=2$

$\log_a c^2=1\cdot 1=0$

подх. ОДЗ ~~3. Проверим $\log_a c^2=\log_c b$~~

- не подходит в этом случае.

Чистовик 4

2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{b}} a = \log_c b \\ \log_a c^2 = \log_c b - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\log_b a = \log_c b \\ 2\log_a c = \log_c b - 1 \end{cases}$

$m = \log_b a$

$n = \log_a c$

$\begin{cases} 2\log_b a = \dfrac{1}{\log_a c \cdot \log_b a} \\ 2\log_a c = \cancel{\log_c b - 1} \dfrac{1}{\log_a c \cdot \log_b a} - 1 \end{cases}$

$m, n \neq 0$

$\begin{cases} 2m = \dfrac{1}{mn} \\ 2n = \dfrac{1}{mn} - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2m^2 n = 1 \\ 2mn^2 = 1 - mn \quad (\cdot m) \end{cases}$ $n = \dfrac{1}{2m^2}$

$n^2 = \dfrac{1}{4m^4}$

$mn^2 = \dfrac{1}{4m^3}$

$\log_{a-1}$

$m = \log_{5x-1} 4x+1 = -1$ $\dfrac{1}{5x-1} = 4x+1$

$(4x+1)(5x-1) = 1$

$20x^2 + x - 2 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8\cdot 20}}{40}$

$n = \log_a c = \log_{4x+1} \frac{x}{2}+2 = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{2}+2 = \sqrt{4x+1}$

$x+4 = 2\sqrt{4x+1}$

$x^2+8x+16 = 16x+4$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$x = \dfrac{8 \pm 4}{2} = 6; 2$

не совпадают решения → случай невозможен

$2m^2n^2 = m - m^2 n$

$n = m - m^2 n$ $n = m - \frac{1}{2}$

$m - \frac{1}{2} = \frac{1}{2m^2}$ $2m^3 - m^2 = 1$

$$\begin{array}{l|l} 2m^3 - m^2 - 1 & m-1 \\ \cline{2-2} -(2m^3 - 2m^2) & 2m^2 + m + 1 \\ \hline m^2 - 1 & \end{array}$$

$D = 1 - 4\cdot 2 \cdot 1 < 0$

=> других реш. нет

$\underline{m=1}$ – ~~в этом случае~~

~~$m = \log_b a$~~ $a = b$ $\underline{X = 2}$ $a = 4x+1 = 9 = b$

$c = 3$

$\log_a c^2 = \log_9 9 = 1$ } отлич. на 1 => подходит

$\log_c b = \log_3 9 = 2$ } равно

$\log_{\sqrt{b}} a = \log_3 9 = 2$

$\log_b a = m$ $\log_a c = n$

3) $\begin{cases} \log_a c^2 = \log_c b \\ \log_{\sqrt{b}} a = \log_{ac} b - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2n = \frac{1}{mn} \\ ~~\frac{1}{mn} = 2\log_{a} m - 1~~ \end{cases}$ $2m = \frac{1}{mn} - 1$

$\begin{cases} 2n^2 m = 1 \\ ~~1 = 2m^2 n - mn~~ \end{cases}$ $n = m - \frac{1}{2}$ $n^2 = m^2 - m + \frac{1}{4}$

~~$m = \frac{1}{2n^2}$~~ $2m(m^2 - m + \frac{1}{4}) = 1$ $m = n + \frac{1}{2}$

~~$2m^3 - 2m^2 + \frac{m}{2} = 1$~~   ~~$4m^3 - 4m^2 + m = 2$~~

$n = 2m^2n^2 - mn^2$

~~$2n^2(n + \frac{1}{2}) = 1$~~   ~~$2n^3 + n^2 - 1 = 0$~~ $n = m - \frac{1}{2}$

$m = n + \frac{1}{2}$

~~$2m^3 - 2n^2$~~

$2n^2(n + \frac{1}{2}) = 1$

$2n^3 + n^2 - 1 = 0$

Чистовик 5

Чистовик 6

3) $\begin{cases} \log_a c^2 = \log_c b \\ \log_{\sqrt{b}} a = \log_c b - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\log_a c = \log_c b \\ 2\log_b a = \log_c b - 1 \end{cases}$

$2n = \frac{1}{b}$ $\begin{cases} 2n = \frac{1}{mn} \\ 2m = \frac{1}{mn} - 1 \end{cases}$ $2mn^2 = 1$ $2m^2n = 1 - mn$

$2\ n^2 m = 1$

$\begin{cases} 2n^2 m = 1 \\ 2m^2 n = 1 - mn \,|\cdot n \end{cases}$ $2m^2n^2 = n - mn^2$

$m = n - \frac{1}{2}$

$2n^2(n - \frac{1}{2}) = 1$

аналогично $n = 1$

$2n^3 - n^2 - 1 = 0$ – ур-е, как в предыдущем случае

$\log_a c = \log_{4x+1} \frac{x}{2}+1 = 1$ $\frac{x}{2} + 1 = 4x + 1$

$x + 2 = 8x + 2$

$7x = 0$

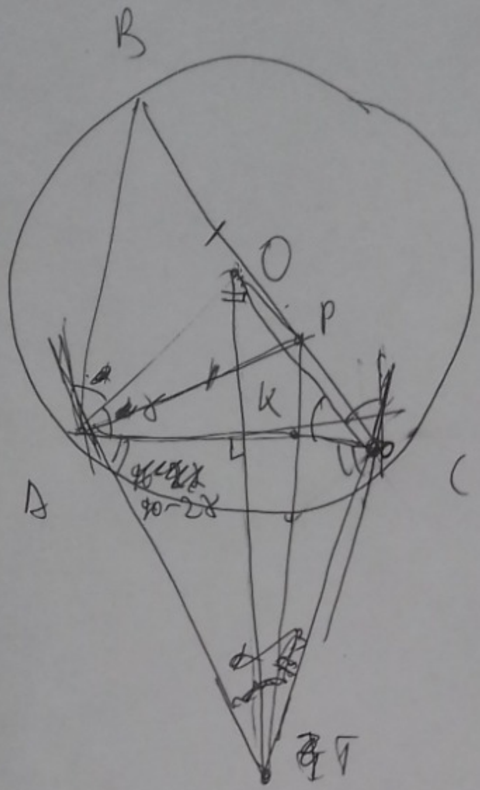
$x = 0$

$\log_a c^2 = 2\log$ но тогда $b = 5x - 1 = -1$ – не подходит.

Отв.: $x = 2$

Чистовик 7

6.



$S_{APK} = 6 \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$S_{CPK} = 4$

$\frac{S_{AKT}}{S_{TKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{S_{ATP}}{S_{TPC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$

$\cancel{\angle ATP = \alpha}$ $\cancel{AP = PB}$

$\cancel{\angle PTC = \beta}$

$$\frac{\frac{1}{2} AT \cdot \sin\alpha \cdot TP}{\frac{1}{2} TC \cdot TP \sin\beta} = \frac{3}{2}$$

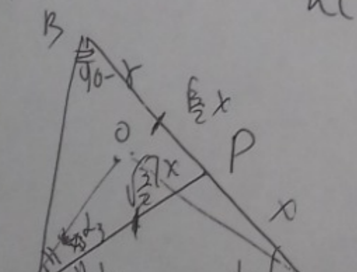
$\cancel{\sin\alpha = \frac{3}{2} \sin\beta}$

$\cancel{\alpha = 2\gamma}$

$\alpha = 2\gamma$ ~~...~~ $\cancel{\angle\beta = ...}$

PK – симедиана в тр. APC (известный факт) $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP^2}{PC^2} = \frac{3}{2}$ $\quad \frac{AP}{PC} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$AP = \sqrt{\frac{3}{2}}\, PC$



$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\gamma$ т.к. $\angle APC = \angle AOC = 180 - 2\gamma$

$\alpha_3 = 180 - \alpha_2 - \alpha_1 - 90 + \gamma = 180 - 2\gamma - 90 + \gamma = 90 - \gamma$

т.е. $AP = BP$ $\Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow S_{APB} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, S_{APC} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 10$

21103966 (U339875 M1299784)

Чернетка 8

а) $\Rightarrow$ $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} = 16 + 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

~~б) $\angle ABC =$ [illegible]~~