Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103959**

ID профиля: **384238**

Вариант 17

№1 Чистовик

Из условия следует, что $a_1, a_2, \ldots$ - целые числа. Тогда и разность прогрессии d также будет являться целым числом.

Теперь распишем a_6, a_7, a_{11} и a_{12} через a_1 и d.

$a_6 = a_1 + 5d$
$a_7 = a_1 + 6d$
$a_{11} = a_1 + 10d$
$a_{12} = a_1 + 11d$.

Ещё нам известно, что прогрессия возрастает. Значит $d > 0$.
Теперь распишем неравенства, данные нам в условии:

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1 \ (1), \text{ где } 10a_1+45d \text{ это } S. \ (S=\frac{a_1+a_1+9d}{2}\cdot 10) \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1+45d+17 \ (2)\end{cases}$$

Раскроем скобки и домножим второе неравенство на (-1).

Получим

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1d+6a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17 \\ -a_1^2-11a_1d-5a_1d-55d^2 < -10a_1-45d-1\end{cases}$$

Сложим и получим $5d^2 < 16$. Но $d \in \mathbb{Z}$ и $d > 0$. Значит единственное возможное значение d это 1.

$d^2 < \frac{16}{5}$

$|d| < \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Подставив $d=1$ в (1) и (2), получим

$$\begin{cases}(a_1+5)(a_1+11) > 10a_1+46 \ (3) \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1+62 \ (4)\end{cases}$$

(3)

$a_1^2+11a_1+5a_1+55 > 10a_1+46$

$a_1^2+6a_1+9 > 0$

$(a_1+3)^2 > 0$

$a_1 \neq -3$

(4) $a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+62$

$a_1^2+6a_1-2 < 0$

$a_1^2+6a_1-2=0$

$D=44, \sqrt{D}=2\sqrt{11}$

$$\left[\begin{array}{l}a=-3+\sqrt{11} \\ a=-3-\sqrt{11}\end{array}\right.$$

Решим методом интервалов

$+ \quad - \quad +$

$-3-\sqrt{11} \qquad -3+\sqrt{11} \qquad a_1$

$-3-\sqrt{11} < a_1 < -3+\sqrt{11}$. Но $3 < \sqrt{11} < 4$ и $a_1 \in \mathbb{Z}$,

поэтому $a_1 \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$

Собираем систему

$$\begin{cases}a_1 \neq -3 \\ a_1 \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}\end{cases}; \quad a_1 \in \{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$$

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$.

1

21103959 (U384238 M1297109)

№2

Чистовик

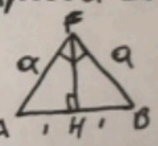
Т.к. CD параллельно ~~основанию~~ оси цилиндра, то оно перпендикулярно основанию. Но $\triangle ABC$ - равнобедренный ($AC=CB$), значит точки A и B равноудалены от C. Следовательно отрезок AB параллелен плоскости основания цилиндра.

Проведём какую-то плоскость τ, которая проходит через AB и параллельна основанию. Пусть тогда она пересекает CD в точке F. По построению $BF \perp CD$. Пусть $BF = a$, а $\angle BFA = \alpha$.

Мы получили $\triangle BFA$, который вписан в окружность с тем же радиусом, что и окружность в основании цилиндра.

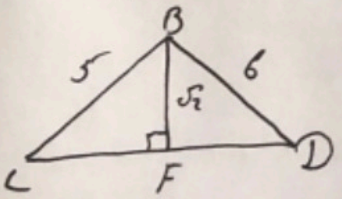
Из условия $AB = 2$. По теореме синусов $\frac{2}{\sin\alpha} = 2R$;

$\frac{1}{\sin\alpha} = R$. Т.к. нам нужен наименьший радиус и $R \geq 1$, то $R = 1$. Тогда $\alpha = \frac{\pi}{2}$. След-но α опирается на диаметр. Тогда рассмотрим $\triangle AFB$, где AB - диаметр описанной около него окружности.



FH - радиус.
И по теореме Пифагора $a = \sqrt{2}$;
То есть $AF = BF = \sqrt{2}$

Теперь рассмотрим $\triangle CBD$, где BF является высотой.



Из условия $CB = 5$, а $DB = 6$ и BF, как мы выяснили равно $\sqrt{2}$.

$CD = CF + FD$

Но по теореме Пифагора $CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$,

а $FD = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$.

Тогда $CD = CF + FD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$.

Ответ: $\sqrt{23} + \sqrt{34}$

Чистовик

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2) & (2)\end{cases}$

Т.к. уравнение окружности имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \overset{=}{\le} r^2$,
где $(x_0;y_0)$ - центр окружности, а r - радиус.
Значит неравенству (1) соответствуют все точки внутри и точки на окружности с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$.
Рассмотрим теперь второе неравенство.
Существует два случая: · когда $\min(2a+2b;2)=2a+2b$
· когда $\min(2a+2b;2)=2$
Рассмотрим сначала первый. Пусть $\min(2a+2b;2)=2a+2b$.
Тогда $a^2+b^2\le 2a+2b$

$a^2-2a+b^2-2b\le 0$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1-2\le 0$

$(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$

Это неравенство похоже чем-то на уравнение окружности.
Вернемся к этому позже.
Во втором случае $\min(2a+2b;2)=2$. Тогда $a^2+b^2\le 2$

$a^2-1+b^2-1\le 0$

$(a-1)(a+1)+(b-1)(b+1)\le 0$

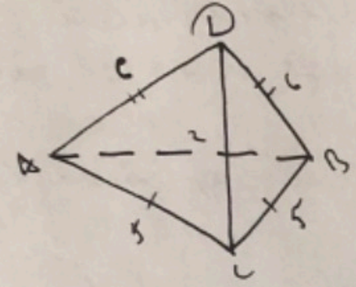
Осталось сделать соответствующие выводы.

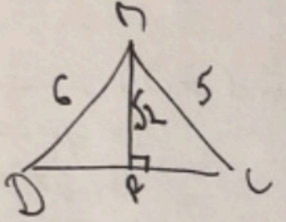
3

черновик

Рассмотрим всевозможные тетраэдры ABCD, в которых AB = 2, AC = CB = 5, AD = DB = 6. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

В первой – 6 ≤ [redacted]

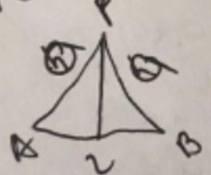




CD – перпендикулярен основанию т.к. ΔABC – равнобедренный (AC=CB, AD=DB) по A и B равноудалены. Сл-но AB ∥ плоскости основания

Проведём через AB пл-ть, параллел. осн. она пересечёт CD в F

$DC = DF + FC$



$BF \perp CD$

$DF \leq BA$

BFA – вписанный в окружность сред. осн цил.

По т. синусов

$\angle BFA = \alpha$

$\frac{2}{\sin\alpha} \leq 2R$

$\Downarrow$

$R \geq 1$

$R \leq 1$

$\sin\alpha = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

По т. Пифагора

21103959 (U384238 M1297109)

черновик

S – сумма первых 10 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 a_{12} > S+1$, $a_7 a_{11} < S+17$. Укажите все возможные значения a_1.

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \qquad \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$1+2+3+4+5$

15

$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 + 1$

$a_1^2 + 11da_1 + 5da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + 10a_1d + 6a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

~~$a_1^2 + 11a_1d + 5a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$~~

$-a_1^2 - 11a_1d - 5a_1d - 55d^2 < -10a_1 - 45d - 1$

45
55
62

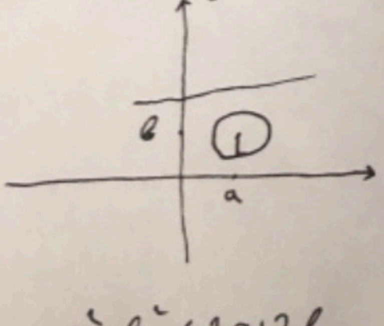
$\Rightarrow 5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$ т.к. d – целое, то $d = 1$

d^2

$|d| < \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1 + 46 \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1 + 62 \end{cases}$



$a_1^2 + 11a_1 + 5a_1 + 55 > 10a_1 + 46$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$(a_1+3)^2 > 0, \quad a_1 \neq -3$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62$

$a^2 + b^2 \leq 2a + 2b$

$a^2 - 2a + b^2 - 2b \leq 0$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$+ \quad - \quad +$

$-3-\sqrt{11} \qquad -3+\sqrt{11}$

$-6{,}1 \qquad 0{,}1$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 = 0$

$D = 36 + 8 = 44$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2}$

$a_1 = -3 \pm \sqrt{11}$

$-3 - 3{,}1$

$-6{,}1$

21103959 (U384238 M1297109)

Черновик

Пусть M - фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек $(x;y)$ таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2)\end{cases}$$

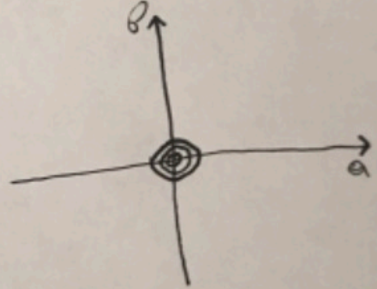
Найдите площадь фигуры M.

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$a^2+b^2\le 2$

$a^2-1+b^2-1\le 0$

$(a-1)(a+1)+(b-1)(b+1)\le 0$



$a^2+b^2\le 2a+2b$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1-2\le 0$

$(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103959**

ID профиля: **384238**

Вариант 17

№4 №5 Чистовик

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ 4x+1>0 \\ \sqrt{5x-1}\neq 1 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$

Перемножим три наших числа, получим:

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=4$$

Пусть два равных числа это a, тогда третье число $(a-1)$.

$a^2(a-1)=4$

$a^3-a^2=4$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$\left[\begin{array}{l} a-2=0 \quad (1) \\ a^2+a+2=0 \quad (2) \end{array}\right.$ (1) $a=2$

(2) $a^2+a+2=0$

$D=1-4<0$

Значит $a=2$ и какое-то одно число равно 1 $(a-1)$.

Если $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=1$. Если $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1$. Если $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1$

$\sqrt{5x-1}=4x+1$

$5x-1=16x^2+8x+1$

$16x^2+3x+2=0$

$D<0 \quad \varnothing$

$4x+1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\frac{x^2}{4}+2x+4=4x+1$

$x^2-8x+12=0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6 \end{array}\right.$

$\frac{x}{2}+2=5x-1$

$10x-2=x+4$

$x=\frac{2}{3}$

Остаётся сделать проверку.

Если $x=2$, то $\log_{\sqrt{9}}9=2$ – истина

Если $x=6$, то $\log_{\sqrt{29}}25=2$ – ложь

Если $x=\frac{2}{3}$, то $\cancel{\log_{\sqrt{7/3}}}$ $\log_{\sqrt{\frac{7}{3}}}\frac{11}{3}=2$ – ложь

Значит $x=2$. Сравнивая с ОДЗ, убеждаемся, что $x=2$ подходит

Ответ: 2

1

Чистовик

№ 4

Т.к из условия НОД$(a;b;c)=6$, то одно из чисел делится на 2 и не делится на 2^2. Аналогично одно из чисел делится на 3 и не делится на 3^2.

Также, т.к. НОК$(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$, то одно из чисел делится на 2^{15} и одно из чисел делится на 3^{16}.

Имеем 4 разных делителя, а всего в числах a, b и c 6 делителей вида 2^k и 3^e. Количество их размещений $\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=15$. Оставшиеся делители могут быть от 2^1 до 2^{15} и от 3^1 до 3^{16}. 15 и 16 способов соответственно.

Тогда всего количество способов $15\cdot 15\cdot 16=3600$

Ответ: 3600

2

Чистовик

№6

Обозначим $\angle ABC$ за α, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (как центральный).

AT и CT касательные, поэтому $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$.

Из $\triangle ACT$: $\angle ATC = 180° - 2\alpha$. Значит $AOCT$ - вписанный четырехугольник.

Но A, O, C и P лежат на одной окружности. Значит точки

A, O, C, P и T лежат на одной окружности. Значит и $\angle TAC = \angle TPC = \alpha$.

Т.к. $\angle ABC = \alpha$ и $\angle TPC = \alpha$, то $AB \parallel PT$.

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{3}{2}$. Следовательно $\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$. Отсюда $\frac{AC}{KC} = \frac{5}{2}$

$\triangle ABC \sim \triangle KPC$, где коэффициент подобия равен $\frac{5}{2}$.

$S_{KPC} = 4$

Тогда $S_{ABC} = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25$

Ответ: а) 25

3

21103959 (U384238 M1297110)

[illegible] Черновик

Пусть два числа равны a, а третье a-1 [redacted]

$a \cdot a(a-1)=4$

$a^3-a^2=4$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

a^3

Т.е $a=2$

и одному числу будет единицей (то, которое $a-1$)

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=1$

Значит $\sqrt{5x-1}=4x+1$

$5x-1=16x^2+8x+1$

$16x^2+3x+2=0$

$D=9-4\cdot16\cdot2<0$

Т.к. НОД $=6$, то одно делится на 2 и не делится на 2^2

Т.к. НОД $=6$, то одно делится на 3 и не делится на 3^2

Т.к. НОК, то одному числу делится на 2^{15}, а [illegible] делится на 3^{16}

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1$

$4x+1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\frac{x^2}{4}+2x+4=4x+1$

$\frac{x^2}{4}-2x+3=0$

$x^2-8x+12=0$ $\quad \log_{\sqrt{9}}9=2$

$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=2 \end{array}\right.$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 15 \\ \hline 75 \\ +\ 15 \\ \hline 225 \\ \times\ 16 \\ \hline 1350 \\ +\ 225 \\ \hline 3600 \end{array}$$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1$

$5x-1=\frac{x}{2}+2$

$10x-2=x+4$

$9x=6$

$x=\frac{2}{3}$

$\frac{10}{3}-1$

21103959 (U384238 M1297110)

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 6 \\ НОК(a,b,c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a = k\cdot 6$
$b = e\cdot 6$
$c = f\cdot 6$

$НОК(k,e,f) = 2^{14}\cdot 3^{15}$

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

$2^{14}\cdot 3^{15}$	$2^{1,\dots,14}$	$2^{1,\dots,14}$	$\boxed{1}$
$2^{14}\cdot 3^{15}$	$3^{1,\dots,15}$	$3^{1,\dots,15}$	$\boxed{1}$
$2^{14}\cdot 3^{15}$	$2^{1,\dots,14}$	$3^{1,\dots,15}$	
$2^{14}\cdot 3^{15}$	1	1	
$2^{14}\cdot 3^{15}$	$2^{1,\dots,14}$	1	
$2^{14}\cdot 3^{15}$	$3^{1,\dots,15}$	1	
~~$2^{14}\cdot 3^{15}$~~	~~$2^{14}\cdot 3^{15}$~~	1	
$2^{14}\cdot 3^{15}$	$2^{1,\dots,14}\cdot 3^{1,\dots,15}$	1	

$\cdot 3! - 29$

2^{14}	3^{15}	$2^{1,\dots,14}$
2^{14}	3^{15}	$3^{1,\dots,15}$

$2^{1}3^{15}$ $\quad 2^{\cdot}3^{\cdot}$ $\quad 2^{\cdot}3^{\cdot}$ $\qquad 2^{1}3^{15}$ $\quad 2^{14}3$ $\quad 2\,3^{1}$

4. Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

5. Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $x \le \frac{9}{2}$

$\frac{1}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}} = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$2^{15}\cdot 3^{16}$

$2^{14}\ 3^{15}$ $2^{14\ldots14}\ 3^{1,3,\ldots,15}$

$14\cdot 15$

$2\ 3\ 6$

$2\cdot 3$

$2^{14}\ 3^{15}\ 2\ 3$

$2^{14}\ 3^{15}\ 2^{1\ldots14}\ 3^{1\ldots15}\ 2\cdot 3^{16} \vdots 6\cdot K$

НОД $a = 6\cdot K$
$b = 6\cdot e$
$c = 6\cdot d$

$2^{14}\ 3^{15}\ 2^{14\ldots14}\ 2^{14}\cdot 3^{15} \vdots K$

$2^{14}\cdot 3^{15}$

$2^{14}\cdot 3^{15}$

$1\ 2\ 3$

$a\ b\ c$

$3!$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\frac{1}{2}\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\frac{1}{2}\log_{5x-1}(4x+1) = \frac{1}{\log_{(5x-1)}\frac{x}{2}+2}$

$2^{14}\cdot 3^{15} \vdots e$ $2^{14}\cdot 3^{15} \vdots d$

$\log_{5x-1}(4x+1)\ \log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

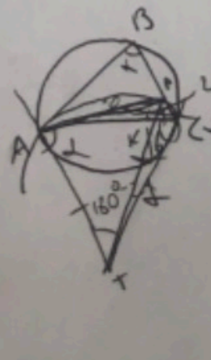
2^{14} 3^{15} $2\ 2$

2^{14} 3^{15} $3\ 3$

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 6 и 4.

а) Найдите площадь треугольника ABC

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{4}{5}$. Найдите AC.



$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$

$\angle ABC = \alpha$

$\angle AOC = 2\alpha$

$\angle TAC = TCA = \alpha$

$\angle ATC = 180^\circ - 2\alpha$

$APCT$ A, O, P, C, T лежат на одной окр.

$\angle TPC = TAC = \alpha$

$AB \parallel PT$

21103959 (U384238 M1297110)