Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103937**

ID профиля: **371217**

Вариант 17

Задание N1 Вариант 17

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+5d_1)(a_1+11d_1) > S+1 \\ (a_1+6d_1)(a_1+10d_1) < S+17 \end{cases}$$

$a_1^2 + 5a_1d_1 + 11a_1d_1 + 55d_1^2 > S+1$

$a_1^2 + 6a_1d_1 + 10a_1d_1 + 60d_1^2 < S+17$

$-a_1^2 - 16a_1d_1 - 60d_1^2 > -S-17$

$a_1^2 + 16a_1d_1 + 55d_1^2 > S+1$

$-5d_1^2 > -16$

$d_1^2 < \frac{16}{5}$

$d_1 \in [-\frac{4}{\sqrt5}; \frac{4}{\sqrt5}]$

$\frac{4}{\sqrt5} \approx 1,\dots$

т.к. прогрессия возрастающая, $d_1 > 0 \Rightarrow$

$d_1 = 1$

$(a_1+5)(a_1+11) > 10a_1 + 45 + 1$

$(a_1+6)(a_1+10) < 10a_1 + 45 + 17$

$a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$, $(a_1+3)^2 > 0$

$a_1 \neq -3$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$,

Лист 1.

21103937 (U371217 M1297417)

Листочек №1 (продолжение) Вариант А

$a_1^2+6a_1-2<0$

$a_1^2+6a_1-2<0$

$D=36+8=44$

$a_1=\frac{-6\pm\sqrt{44}}{2}=-3\pm\sqrt{11}\approx-3\pm3,\ldots$

$a_{1,1}\approx-6,\ldots,\ a_{1,2}\approx0,\ldots\Rightarrow$

$a_1\in[-6;-3)\cup(-3;0]$.

Ответ: $a_1\in\{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$.

Лист 2

Чистовик №3 Вариант A

$(x-a)^2+(y-b)^2\leq 2$

$a^2+b^2\leq \min(2a+2b, 2) = \min(2(a+b), 2) =$

$= \min(2(a+b), 2)$.

$a^2+b^2 < (a+b)2$; $a^2+b^2 < 2$ - круг с центром $O(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$).

$\frac{a^2+b^2}{2} < a+b$

$(a+b)^2 < (a+b+ab)\cdot 2$

$a^2+b^2-2a-2b<0$

$\begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2<2 \text{ - круг с центром } (1;1) \text{ и радиусом } \sqrt{2} \\ a+b\leq 1 \end{cases}$

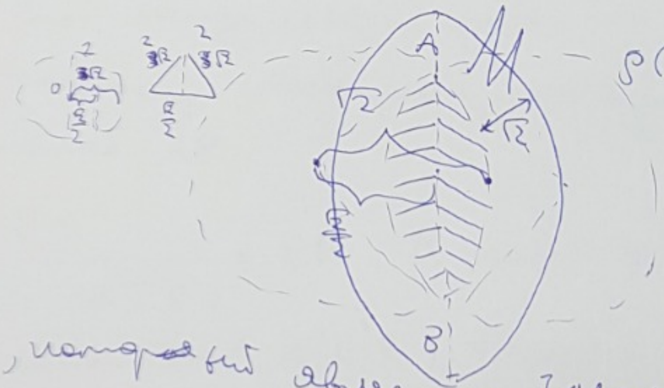
Исходя из $1^{\text{ого}}$ уравнения, точка $(a;b)$ должна быть от $x;y$ не далее, чем на $\sqrt{2}$

Лист 3

Лист 4.

Чистовик №3 (продолжение) Вариант А

Закрашенная область — допустимые значения $(a;b)$. Фигура M — закрашенная область + точки $x;y$ расстояние от которых до области не более $\sqrt{2}$.



$\rho(AB;O_1)=\rho(AB;O_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Прямая отсекает от каждого круга часть, которая является частью M, и составляет $\frac{3}{8}$ от круга с радиусом $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (т.к. прямая делит больший круг на участки, которые относятся как $\frac{5\sqrt{2}}{2}:\frac{3\sqrt{2}}{2}=5:3$) $\Rightarrow$

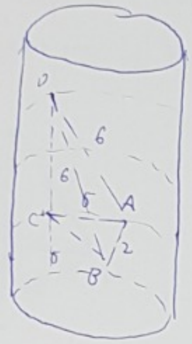
$$S_M=2S_{кр}\cdot\frac{3}{8}=2\cdot\pi\cdot(\sqrt{2}\cdot 2)^2\cdot\frac{3}{8}=2\pi\cdot 8\cdot\frac{3}{8}=6\pi$$

Ответ: 6π.

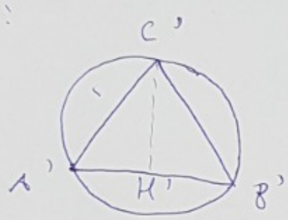
Мин ч.

21103937 (U371217 M1297417)

Шелкова №2 Вариант 17



Рассмотрим проекцию ABC на основание цилиндра:



Угол между (ABC) и основанием α. Т.к. тетраэдр симметричен, проекция AB будет равна AB.

$\frac{A'B'}{\sin\angle A'C'B'} = 2R$. R минимально при максимальном $\sin(\angle A'C'B')$. $\Rightarrow \angle A'C'B' = 90^\circ$. В данном случае $C'H' = R = \frac{2}{2} = 1$.

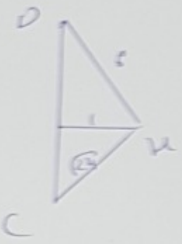
$C'H' = CH \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{C'H'}{CH} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{24}}{24} =$
$= \frac{2\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{12}$

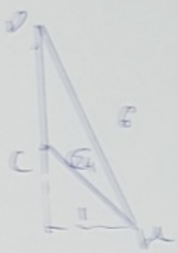
Мин 5

Задача №2 (продолжение) Вариант 17

Рассмотрим сечение тетраэдра

$\triangle DCM$: Возможно 2 случая





$DC = \sqrt{6^2 - 1^2} + \sqrt{(\sqrt{24})^2 - 1^2}$ $\qquad$ $DC = \sqrt{6^2 - 1^2} - \sqrt{(\sqrt{24})^2 - 1^2}$

$= \sqrt{35} + \sqrt{23}$ $\qquad$ $= \sqrt{35} - \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{35} - \sqrt{23}$; $\sqrt{35} + \sqrt{23}$

Лист 6

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103937**

ID профиля: **371217**

Вариант 17

Чистовик №4. Вариант 17

НОД $(a; b; c) = 6$

НОК $(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$a = 3 \cdot 2 \cdot 3^{a_1} \cdot 2^{a_2}$

$b = 3 \cdot 2 \cdot 3^{b_1} \cdot 2^{b_2}$

$c = 3 \cdot 2 \cdot 3^{c_1} \cdot 2^{c_2}$

$MAX(a_2, b_2, c_2) = 14 \quad (15-1)$

$MAX(a_1, b_1, c_1) = 15 \quad (16-1)$

Пусть $a_2 = Max(a_2, b_2, c_2)$. Тогда либо a_2 и b_2 равны 0, либо a_2 равно 0, либо $b_2 = 0$. В первом случае: $a_2 = 14, b_2 = 0, c_2 = 0$. Во $2^{ом}$ и $3^{ем}$ случае число вариантов по 14

Итого при $a_2 = Max(a_2, b_2, c_2)$ кол-во вариантов для a_2, b_2, c_2 будет $14+14+1 = 29$. Если максимально b_2, то число вариантов $1+14+13 = 28$, т.к. вариант, когда $b_2 = 14 = a_2$ уже был. Если c_2 максимально, то число вариантов $1+13+13 = 27$, т.к. варианты $c_2 = a_2 = 14$ и $c_2 = b_2 = 14$ уже были. Итого вариантов $27+28+29 = 28 \cdot 3 = 84$ варианта для комбинаций a_2, b_2, c_2

Подобным ~~вариантом~~ способом (аналогично) вариантов для a_1, b_1, c_1: $(15+15+1)+(15+14+1)+(14+14+1) = (15+14+1) \cdot 3 = 30 \cdot 3 = 90$.

Лист 1

21103937 (U371217 M1297418)

Чистовик №4 (продолжение)

Итого вариантов $N = 84 \cdot 90 = 840(10-1) =$

$= 8400 - 840 = 8000 - 440 = 7560$

Ответ: 7560

Листок №5 (Вариант 17)

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases}$$

На ОДЗ числа будут иметь вид:

$2\log_{5x-1}(4x+1)$; $2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$.

Пусть $5x-1=a$, $4x+1=b$, $\frac{x}{2}+2=c$

$2\log_a b$, $2\log_b c$, $\log_c a$ — наши числа

Сведем все к основанию a. Тогда получим:

$2\log_a b$; $\frac{2\log_a c}{\log_a b}$, ~~2lo~~ $\frac{1}{\log_a c}$. Произведение всех трех чисел:

$P = 2\log_a b\cdot 2\frac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\frac{1}{\log_a c}=4$. Положим, что 2 равные числа имеют значение b. Тогда третье число имеет значение $b-1$

$b^2(b-1)=4$ $\quad b^3-b^2-4=0$, $b=2$ — корень уравнения

$b^3-b^2=4$

Лист 3

[illegible] №5 (продолжение) Вариант 17.

$$\begin{array}{l|l} b^3-b^2-4 & b-2 \\ \underline{-\,b^3-2b^2} & b^2+b+2 \\ \quad b^2-4 & \\ \quad \underline{-\,b^2-2b} & \\ \qquad 2b-4 & \\ \qquad \underline{-\,2b-4} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$b^2+b+2=0$

$D=1-8<0$, нет действ. решений $\Rightarrow b=2$

1) $2\log_{5x-1}(4x+1)=2$

$5x-1=4x+1$

$x=2$. При $x=2$: $2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=$

$=2\log_9 3=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_3 9=2$. Удовлетворяет условию

2) Если $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$, ситуация будет аналогична

3) $2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2$

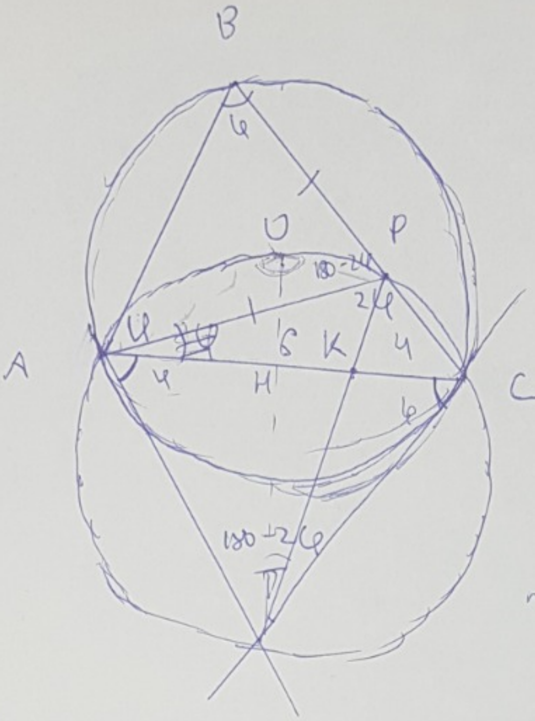
$4x+1=\frac{x}{2}+2$, $\frac{7}{2}x=1$, $x=\frac{2}{7}$. При $x=\frac{2}{7}$:

$2\log_{5x-1}(4x+1)=2\cdot\log_{\frac{3}{7}}\frac{15}{7}<0$, $\Rightarrow \frac{2}{7}$ не явл. корнем

Ответ: 2.

[illegible] 4

Чистовик №6



$\frac{AH}{HC} = \frac{3}{2}$ (общая высота).

$AC = TC$ (касательные из 1-ой точки)

$S_{APC} = 6+4=10.$

OT – серединный перпендикуляр

$\cancel{S_{AOC}}$ = $\angle TAC = \angle TCA = \angle ABC$ (углы между касательной и хордой).

$\angle AOC = 2\angle ABC$. $\angle AOH = \angle ABC = \angle H$ об. =>

$\angle APC = 2\angle ABC$ (на 1 хорду опир.)

$\triangle ABP$ – равнобедренный ($\angle APB = 180-2\varphi$, как смежный,

$\angle BAP = 180-180+2\varphi-\varphi = \varphi$). => $AP = PB$

$S_{ABC} = 10 + S_{APB} = 10 + S_{ACT} \cdot \frac{\cancel{AC}\,AB}{AC}$

21103937 (U371217 M1297418)