Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103927**

ID профиля: **855251**

Вариант 17

№1. $S = \frac{(a+a+9b)\cdot 10}{2} = 5\cdot(2a+9b)$ Чистовик.

$$\begin{cases} (a+5b)(a+11b) > 5(2a+9b)+1 \\ (a+6b)(a+10b) < 5(2a+9b)+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+16ab+55b^2 > 5(2a+9b)+1 \quad |\cdot(-1) \\ + \\ a^2+16ab+60b^2 \cancel{>} < 5(2a+9b)+17 \end{cases}$$

$5b^2 < 16a \Rightarrow b=1$ (b-целое и последовательность возрастающая)

$$\begin{cases} a^2+16a+55 > 5(2a+9)+1 \\ a^2+16a+60 < 5(2a+9)+17 \end{cases}$$

$10a+46 < a^2+16a+55 < 10a+57$

$0 < a^2+6a+9 < 11$

$0 < (a+3)^2 < 11$

$\Downarrow$

целыми решениями для a являются

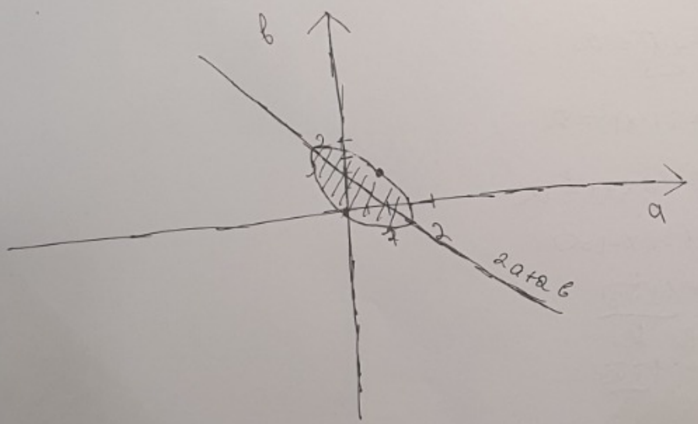
Ответ. $a=-6$; $a=-5$; $a=-4$; $a=-2$; $a=-1$; $a=0$

Лист 1

№3. Чистовик

Изобразим второе уравнение в координатах (a; b)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ 2a+2b \ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b \quad (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \\ 2a+2b \le 2 \end{cases} \end{array}\right.$$



Откуда наша окружность с центром (x;y) будет пересекать заштрихованную область при условии, что $\rho((x,y),(1;1)) \le \sqrt{2}$;

$\rho((x,y),(0;0)) \le \sqrt{2}$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \le \cancel{\sqrt{2}}\ 2 \\ x^2+y^2 \le 2 \end{cases}$$

Итог 2

21103927 (U855251 M1304314)

Чистовик. продолжение №3

Решим систему уравнений и найдём точки пересечения.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \cancel{x^2-2x}+x \quad x^2-2x+1+y^2-2y+1=2 \end{cases}$$

$$2-2x-2y=0$$

$$\begin{cases} x+1=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

$$x^2+(1-x)^2=2$$

$$2x^2-2x+1=2$$

$$2x^2-2x-1=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$y=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$$

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2)\end{cases}$$

№1

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+11d) > (a_1+(a_1+9d))\cdot 5 \quad +1 \quad ①\\ (a_1+6d)\cdot(a_1+10d) < (2a_1+9d)\cdot 5 \quad +17\end{cases}$$

① $a_1^2+5da_1+55d^2+11da_1 > \boxed{10a_1+45d}+1$

② $a_1^2+16da_1+60d^2 < 10a_1+45d+17$

Выражения справа совпадают

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{16d}a_1+60d^2+16 > \cancel{a_1^2}+\cancel{5da_1}\ 16da_1+55d^2+16$$

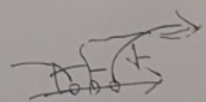
$\sqrt{\frac{16}{25.5}} \approx 1{,}1$

$5d^2 \ge 16$

$d^2 > \frac{16}{5}$

$(d^2-\frac{16}{5}) > 0$

$(d-\frac{4}{\sqrt5})(d+\frac{4\sqrt5}{\sqrt5}) > 0$



$-\frac{4}{\sqrt5}$ 2 $+\frac{4}{\sqrt5}$ 2

Черновик 2.

$(a_1+5)(a_1+11) > 10a_1+45$

$a_1^2+16a_1+55-10a_1-45>0$

$a^1+4a_1+\cancel{+10}^{9}>0$

$a_1=1 \quad D=16-40$

$a_1^2+4a_1+30-45-17\geq 0$

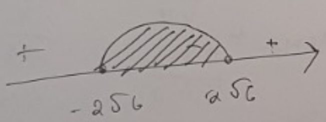
$+\frac{45}{17}$ $\overline{28}$

45 $\underline{15}$

$a_1^2+4a_1-2=0$

$D=16+8$

~~$D=24$~~ $\sqrt{6 \cdot 4}$



$-5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5$

$a_1=$

Черновик 3.

$(a_1+10)(a_1+22) > 20a_1+91$

$a_1^2+22a_1+\cancel{10a_1}+220 > \cancel{20a_1}+91$

$a_1^2+22a+220-91>0$

$a_1^2+22a_1+129>0$

$D=22^2-4\cdot129$

$a_1 \in R$ - любое число

$(a_1+12)(a_1+20) < 10a_1+90+17$

$a_1^2+22a_1+240<107$

$a_1^2+22a_1+133<0$

129 | 129

$\begin{array}{r} 129 \\ +\ 91 \\ \hline 220 \end{array}$

$\begin{array}{r} 220 \\ -\ 91 \\ \hline 129 \end{array}$

$129 : 3 = 43$

$\begin{array}{r} 22 \\ \times\ 22 \\ \hline 44 \\ +\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$

$\begin{array}{r} 129 \\ \times\ 4 \\ \hline 516 \end{array}$

107

$\begin{array}{r} 240 \\ -\ 107 \\ \hline 133 \end{array}$

$\begin{array}{r} 129 \\ \times\ 4 \\ \hline 516 \end{array}$

21103927 (U855251 M1304314)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103927**

ID профиля: **855251**

Вариант 17

Чистовик

№4.

Х. $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{b_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{b_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{b_3}$

$НОД(a, b, c) = 2^{\min(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} \cdot 3^{\min(b_1; b_2 b_3)}$

$НОК(a, b, c) = 2^{\max(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} \cdot 3^{\max(b_1; b_2; b_3)}$

Из условия: $\min(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 1$

$\max(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 15$

$\min(b_1 b_2; b_3) = 1$

$\max(b_1; b_2; b_3) = 16$

1. ~~Пусть~~ Допустим $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \Rightarrow$ таких комбинаций равно 13, так как все числа различны, следует $13 \cdot 6$ (- кол-во перестановок)

2. Допустим $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3$ и $\alpha_1 < \alpha_2 = \alpha_3$ таких случаев ровно 6 $\Rightarrow 13 \cdot (6) + 6 = 14 \cdot 6$ (Аналогично для $(b_1 b_2 b_3)$ $14 \cdot (6+6) = 15 \cdot 6$

Учитывая два случая получим ответ:

$15 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 6 = \boxed{14 \cdot 15 \cdot 6^2} = 7560$

Ответ. 7560

Лист 1

Чистовик.

Задача №5.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1) = a$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = b$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = c$

ОДЗ Ограничения:

$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ 5x-1 \neq 1 \\ 4x+1 \neq 1 \\ \frac{x}{2}+2 \neq 1 \end{cases}$

$abc = 4$

Пусть кто-то из $a, b, c = x-1$

а остальные $= x$ $\Rightarrow$ $x^2 \cdot (x-1) = 4$

$(x-2)(x^2+x+2) = 0$

$x \in \left[\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$

$x = 2$ $\Rightarrow$ кто-то равен 1, а кто-то равен 2.

1. $2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 2 \Rightarrow 4x+1 = \frac{x}{2}+2 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$

$2\log_{5x-1}(4x+1) = 2 \Rightarrow 5x-1 = 4x+1 \Rightarrow x = 2$ ~~их~~ $x \neq \frac{2}{7}$

$\Rightarrow$ не решаем,

2. $2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 1 \Rightarrow (x+4)^2 = 16x+4$

$x^2 - 8x + 12 = 0$ $x_1 = 2$, $x_2 = 6$

$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1) = 2 \Rightarrow 5x-1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0$

$x_1 = 10$ $x_2 = 2$

Ответ 2

21103927 (U855251 M1304315)

$x=2$ подходит, проверим:

$2\log_9 9 = 2 \Rightarrow$ подходит.

№6.

$\angle APT = \angle ACT = 2\alpha$, как углы опир на $\smile AT \Rightarrow$

$\angle TPC = 2\alpha - \alpha = \alpha$

~~$\angle BAP = \angle TPC = 2\alpha$~~

Пусть $\angle ABC = \alpha$ $\quad 2\angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha$

(центр. и впис $\angle$) $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ (вписанные углы опир на одну дугу).

$\angle ATC = 180 - 2\alpha$ (угол между двумя кас)

$\angle BPA = 180 - 2\alpha$

$\angle ABP + \angle BPA + \angle PAB = 180^\circ$

$\alpha + (180 - 2\alpha) + \angle PAB = 180^\circ \Rightarrow$

$\angle PAB = \angle\alpha$

$\angle TAC = \angle ABC = \angle\alpha$

$\angle TCA = \angle ABC = \angle\alpha$ (уг между кас и хордой)

$\angle ATC + \angle APC = 180^\circ$

$\angle ATC + \angle AOC = 180^\circ \Rightarrow A, O, P, T$ лежат на одной окружности

Лист 3

21103927 (U855251 M1304315)

$x = 2$ · подходит, проверим:

$2\log_9 9 = 2 \Rightarrow$ подходит.

Имеем, что $\angle BAP = \angle BTC = \angle\alpha$ Чистовик

Но $\angle BAP$ и $\angle PTC$ накрест лежащие при $AB \parallel PT$ а сек $AP \parallel PT$

$\triangle CPK \sim \triangle CBA$ по двум угла

Листы

2 · подходит, проверим:

$\log_9 9 = $

Черновик.

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{b_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{b_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{b_3}$

НОД (a, b, c) $2^{\min(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} \cdot 3^{\min(b_1 b_2 b_3)}$

НОК $= 2^{\max(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} \cdot 3^{\max(b_1, b_2, b_3)}$

5. $\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

ОДЗ

$x > \frac{1}{5}$

$5x - 1 \neq 1$

$5x = 2$

$x \neq \frac{2}{5}$

$\frac{x}{2} + 2 = 1$

$\frac{x}{2} + 2 \neq 1$

$x > \frac{-1}{4}$

$x \neq 0$

$\frac{x}{2} + 2 > 0$

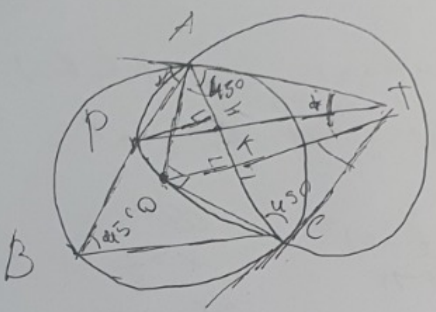
$\frac{x}{2} > -2$

$x > -4$

проверим:
$y \cdot a^{y} = 2$ ⇒ подходит

...ем, что $\angle BAP = \angle BTC = \angle \alpha$ Чистовик

$\angle BAP$ и $\angle PTC$ накрест лежащие при $AB \parallel PT$
...ки $AP \parallel PT$
$CPK \sim \triangle CBA$ по двум угла



$AK = \frac{3}{2} KC$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 6 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{15} \end{cases}$$

НОД $(a,b,c) = 6$

~~НО~~ НОК $(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{15} \cdot 3 =$

Н. ~~НО~~ $6^{15} \cdot 3$