

# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103917**

ID профиля: **848405**

Вариант 17

Задача 1

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ ;  $S$  - сумма первых 10 членов.

$a_2 \in \mathbb{Z}$  пусть разность  $d$ ;  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$a_6 a_{12} > S + 1$

$a_7 a_{11} < S + 17$

$S = \frac{2a_1 + d \cdot 9}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$

Условие

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

Если ввести какое-то значение  $d$ , то  $a_1$  тоже будет, а м.к. по условию, но  $d \in \mathbb{N}$ ;  $a_1 \in \mathbb{Z}$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17$

~~а~~  
 $a_1 = ?$

(1)  $a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

(3)  $10a_1 + 45d + 17 > a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$

суммируем (1) и (3)  
 $a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 + 10a_1 + 45d + 17 > a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 + 10a_1 + 45d + 1$   
 $16 > 5d^2$   
 $32 > d^2$

Решаем уравнение (1)  $d=1$

$d=1$ ; м.к.  $d \in \mathbb{N}$

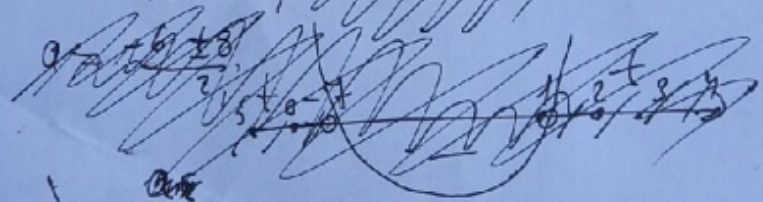
Условие

$a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1$

$a_1^2 + 6a_1 + 55 - 46 = a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$ ;  $D = 36 - 4 \cdot 2 = 4$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$D=0$ ;  $a_1 = -3$



Решаем уравнение (3)  $d=1$

$10a_1 + 45 + 17 > a_1^2 + 16a_1 + 60$

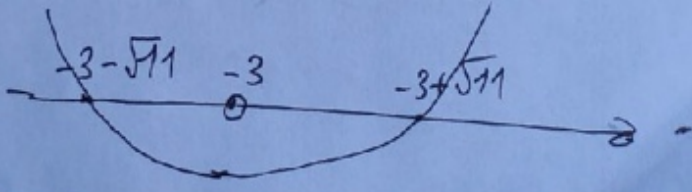
Решаем уравнение (3)  $d=1$

$10a_1 + 45 + 17 > a_1^2 + 16a_1 + 60$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$ ;  $D = 36 + 4 \cdot 2 = 44$

$a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11})$

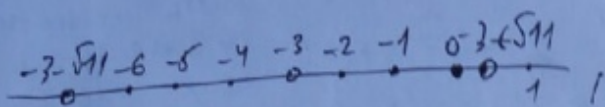


Задача 1 Прогаменимо:

Умова  $a_1 \neq -3$   $a_1 \in \mathbb{Z}$   $a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11})$

Твердени

$$-3 - \sqrt{11} < -3 - 3 = -6 \quad ; \quad -3 + \sqrt{11} < -3 + 4 = 1$$



Тогда  $a_1$  можем быть:

$$a_1 \in \{-6, -5, -4, -2, -1, 0\}$$

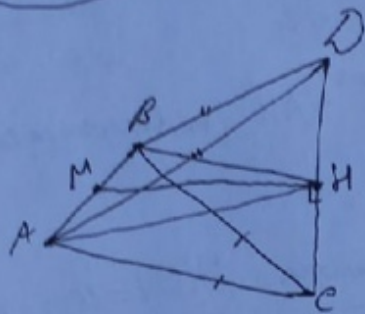
Ответа:



Задача 2

Условие

$AC = CB = 5$ ,  $AD = DB = 6$ ; Вращаем цилиндр так, чтобы  $CD$  было параллельно оси цилиндра;



$R$  - наименьший из цилиндров при наклоне  $CD$ .

Решение:

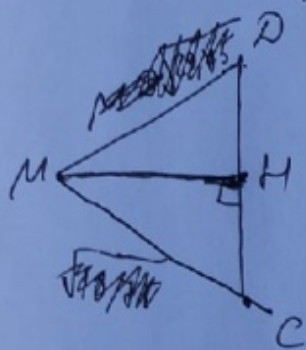
Пусть  $M$  - середина  $AB$ ,  $\triangle ABD$  и  $\triangle ABC$  равнобедренные, их высоты имеют  $AB$  перпендикуляр, значит  $M$  - основание высот из точек  $D$  и точки  $C$  в  $\triangle ABD$  и  $\triangle ABC$  соответственно;

$MD$  и  $MC$  - высоты;  $AB$  перпендикулярна  $MD$  и  $MC$  значит перпендикулярна и всей плоскости  $DMC$ , значит  $AB \perp DC$ ;

$$MD^2 = BD^2 - MB^2 \text{ (м. Пифагора в } \triangle BMD) = 6^2 - 2,5^2 = 36 - 6,25 = 29,75 = 35$$

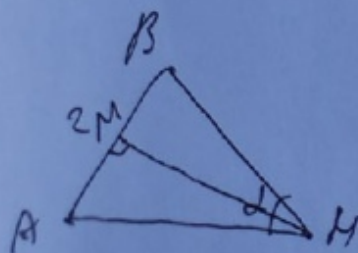
$$MC^2 = AC^2 - AM^2 \text{ (м. Пифагора в } \triangle ABC) = 5^2 - 2,5^2 = 25 - 6,25 = 18,75 = 24$$

Таким образом в  $\triangle MDC$ : Опустим высоту  $MH$ ;  $MD = \sqrt{35}$ ,  $MC = \sqrt{24}$



( $MH \perp DC \Rightarrow$  перпендикулярна  $AB$ )  
 точки  $H, A, M, B$  лежат в плоскости окружности, лежащей в плоскости, параллельной основанию цилиндра, т.к.  $AB \perp DC$  и  $MH \perp DC$ , значит плоскость  $ABH \perp$  оси цилиндра, но и окружность (параллельна основанию цилиндра)

Значит нужно, чтобы описанной окружности опало  $ABH$ , было минимально



$BH$  - высота в  $\triangle BCD$ ;  $\triangle BCD = \triangle ACD \Rightarrow BH = AH$   
 $AH$  - высота в  $\triangle ACD$  (по сторонам)

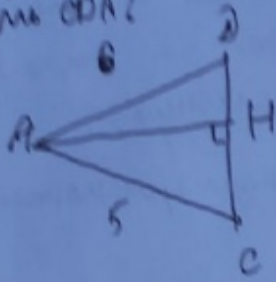
$AH$  и  $BH \in$  п-т  $AMBH \Rightarrow$  перпендикулярна  $DC$ ,

$2R = \frac{AB}{\sin \alpha}$ ; Радиус минимален, когда синус максимален, т.е. когда  $\angle AHB = 90^\circ$

Если  $\triangle AKB$  - прямоугольный и равнобедренный, то  $AK = KB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Какая задача? Найти длину отрезка  $CD$ , чтобы  $AK = \sqrt{2}$

Решение  $\triangle CDA$ :



; Если  $AK = \sqrt{2}$ , то  $HC^2 = AC^2 - AK^2$  (по Пифагору  $\triangle AKC$ )

$$HC^2 = 25 - 2 = 23;$$

$$DH^2 = AD^2 - AH^2 \text{ (по Пифагору } \triangle AHD) = 36 - 2 = 34$$

$$\text{тогда } DC = HC + DH = \sqrt{23} + \sqrt{34}$$

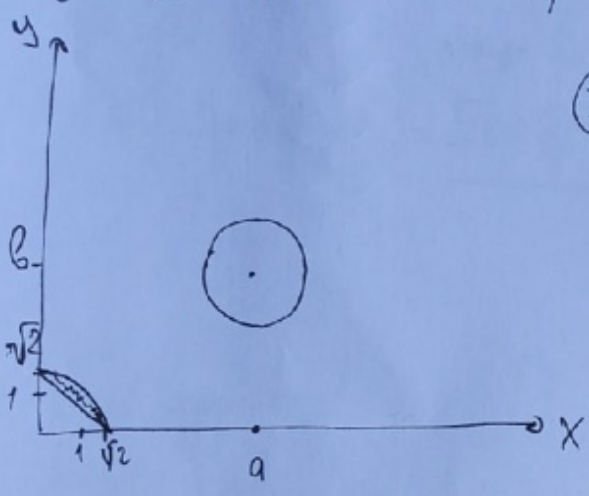
Значит ответ:  $DC = \sqrt{23} + \sqrt{34}$

Смирнов

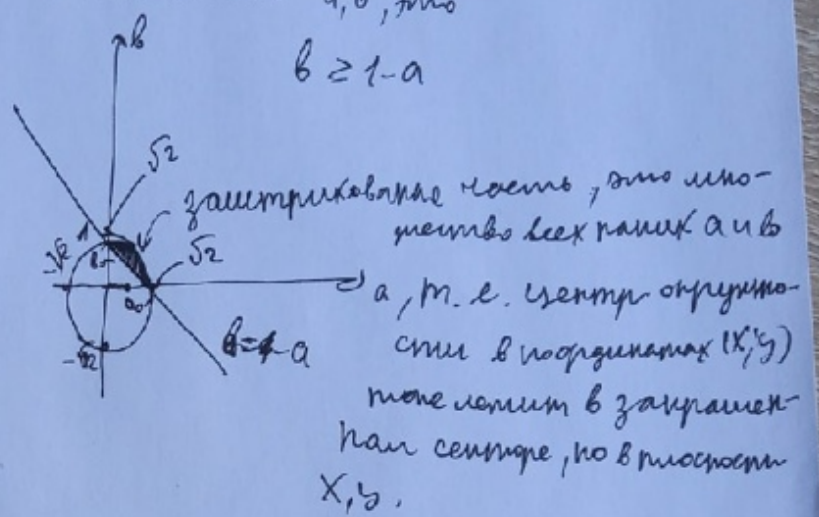


③ M-группа, состоящая из всех  $(x, y)$ , таких, что  $\exists$  пара чисел  $a, b$ , при которых выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2 \\ a^2 + b^2 \leq \min(2(a+b), 2) \end{cases} \rightarrow \text{Круг радиуса } \sqrt{2}, \text{ с центром в } (a; b)$$

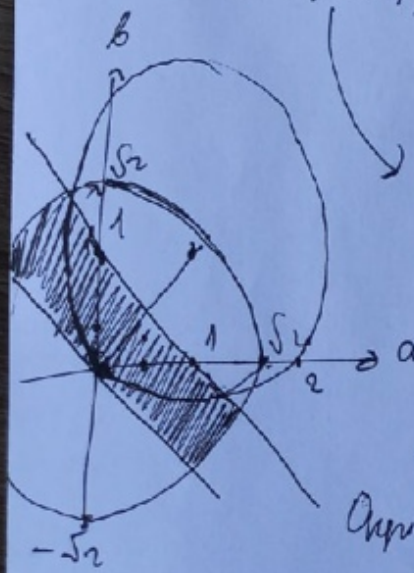


①  $(a+b) \geq 1$ , тогда  $\min(2(a+b), 2) = 2$   
и в зависимости  $a, b$ , это  $b \geq 1-a$



②  $a+b \leq 1$ , тогда

$$a^2 + b^2 \leq 2(a+b);$$



если  $a+b < 0$ , то не выполняется,  $a = -b$ , ~~тоже~~ как интересной точки выше этой линии.

а ниже линии  $b = 1-a$  (уравнение  $a+b \leq 1$ )

~~Максимальная радиус sqrt(2) и все моменты точки не выходят за пределы круга радиуса sqrt(2) и центром (0,0)~~  
т.е. наша область  $a, b$  в пределах круга над прямой  $a+b=1$  и  $b \geq 1-a$   
это заштрихованная область

$$a^2 + b^2 - 2a - 2b \leq 0$$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2$ ; Окружность с центром в  $(1, 1)$  и радиусом  $\sqrt{2}$ ,



$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \leq 2$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2$$

Продолжение задачи

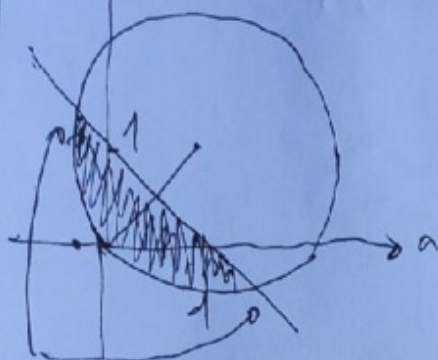
Условие

(1)  $a + b \leq 1$ ;  $a + b \leq 1$  — это часть окружности (закрашенная)

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2$$

Тогда в координатах  $(X; Y)$  уравнение центра нашей окружности

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 \leq 2, \text{ возьмем max;}$$



Эту часть перенесем, подставив в уравнение окружности уравнение прямой  $b = 1 - a$

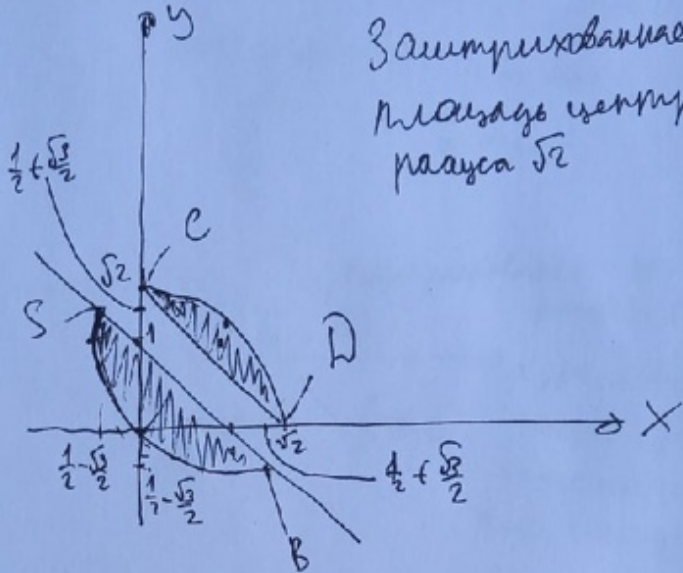
$$(a-1)^2 + (1-a-a)^2 \leq 2$$

$$2a^2 - 2a + 1 + a^2 \leq 2$$

$$2a^2 - 2a - 1 = 0; D = 4 + 8 = 12; \sqrt{D} = 2\sqrt{3}$$

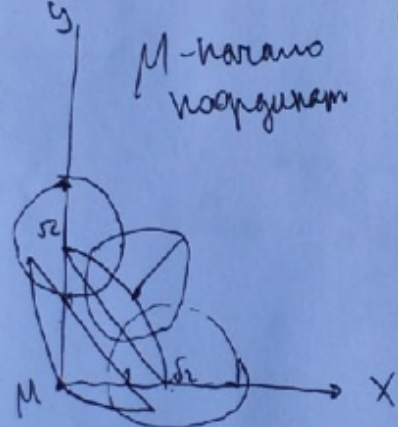
$$a_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \quad b_1 = 1 - a_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$a_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}; \quad b_2 = 1 - a_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$



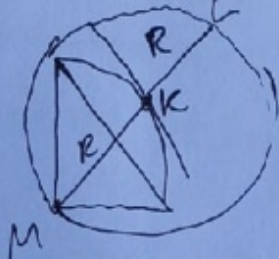
Закрашенная площадь — площадь центра окружности радиуса  $\sqrt{2}$

Чтобы найти площадь, мы должны продумать нашу окружность радиуса  $\sqrt{2}$  в каждой из базисных центров и начертить параллельную площадь.



M — начало координат

При построении этой окружности и прямой:



один радиус, мы можем достать до любой точки, которая находится от центра на расстоянии от 0, до  $2R$  в первой четверти (параллельная окружности по прямой окружности)

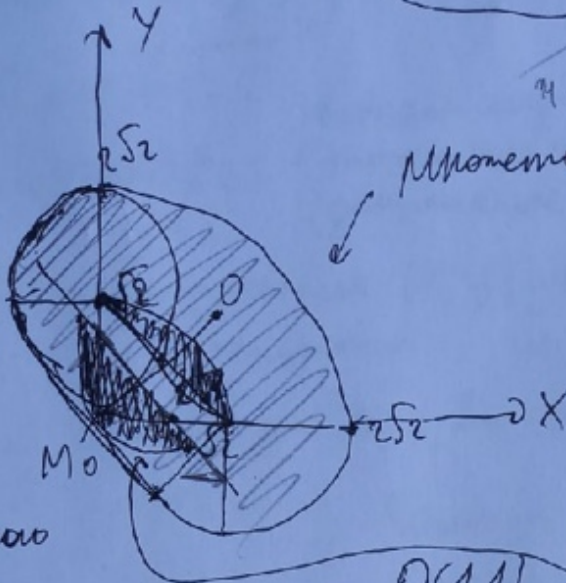
Все точки на прямой ML закрашены, как образ  $K'$  по всей четверти



Задача и Программа

Меморен

~~1.5.2018~~  
4+25 03



Множество  $x, y$ , если ось  $z$  — центр сферы  
вершнее замкнутого  
трапеции

Длина от центра  
Анализ

Всего на ось  $z$

Ол записи

не все ось  $z$  — центр сферичности по

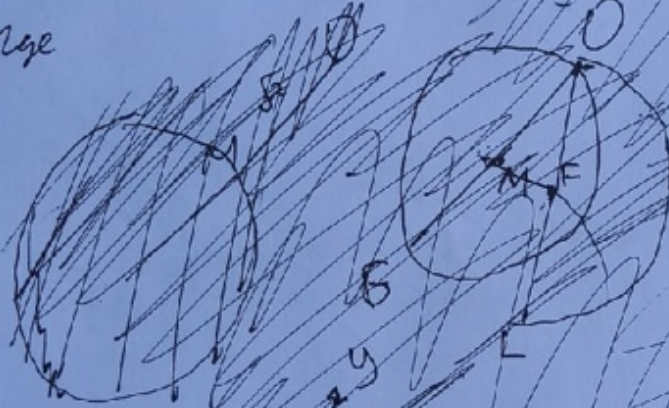
меморен

т.е. это заданная сфера  
сферичности с радиусом  
 $2R$

Площадь этой  
сферы, это

$$\frac{\pi R^2}{4} + S_F, \text{ где}$$

$R$  — это радиус



$$OK = R = 2R$$

$$MF = R = 2R$$





3ago





# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103917**

ID профиля: **848405**

Вариант 17

Задача

$a, b, c \in \mathbb{N}$ , наименьших?

Числовик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 6 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2}$

м.к.  $2^{15} \cdot 3^{16}$ : а и на b и на c, но по простым множителям в разложении чисел a, b, c входят только двойки и тройки;

Но если НОД=6; то какое-то из чисел a, b, c равно  $6 = 2 \cdot 3$  всего лишь единица

и двойка

От противного: меньше 6 ни одно из чисел быть не может, ведь НОД=6; в разложении каждого входим тройка, так НОД=6 и двойка

Если степень всех выше чем 1, то НОД  $\geq 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Если степень всех троек выше чем 1, то НОД  $\geq 18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$ ;

но НОД=6; I случай: одно число равно 6, другие же не равно

Пусть  $a=6$ ;  $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2}$ ;  $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2}$ ;  $b_1, c_1, b_2, c_2 \geq 1$

Приведем  $\max(b_1, c_1) = 15$  т.к. НОК  $= 2^{15} \cdot 3^{16}$ ;

$\max(b_2, c_2) = 16$ ;

(если  $b_1$  или  $c_1 > 15$  то неслучайно или  $b_1$  и  $c_1 < 15$ , но есть крайние более и меньше)

~~Пусть  $b_1 = 15$   
 $b_2 = 16$~~

~~тогда  $c_1$  может быть от 1 до 15~~

~~$c_2$  может быть от 1 до 16~~

~~выбираем неслучайно значение 15 и 16 независимо~~

II  $b_1 = 15$   
 $c_2 = 16$

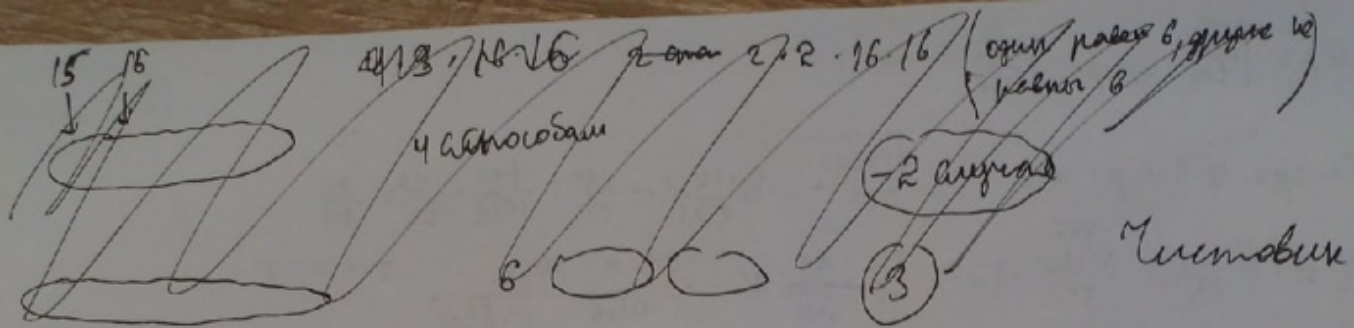
аналогично 15 и 16 наоборот

III

Тогда мы двумя способами можем выбрать  $b_1$  или  $c_1 = 15$   
двумя способами  $b_2$  или  $c_2 = 16$   
А, а на оставшиеся места мы можем







1 Задача, прогнание:

Можно вставить либо одно число от 1 до 15, либо другое число от 1 до 16.

Тогда количество цифр: 2-2-16-15; по вариантам два случая  
 когда 6 "6" или в "2" случае  
 где количество и эти случаи равны "6"

Всего у нас 3 случая, где разные варианты, тогда

3 · (2-2-16-15-2) - количество цифр, где одно число 6, а другие  
 от нуля до 9

II Случаи; где числа 6, другие от 0 до 9; Можно выбрать число  
 из трёх вариантов 3 способами, и в каждом из случаев трижды  
 число от нуля до 9; Т.е. это ещё + 3 случая

Ответ:  $3 \cdot (2-2-16-15-2) + 3 = 12 \cdot 16 \cdot 15 - 3$

Числовик





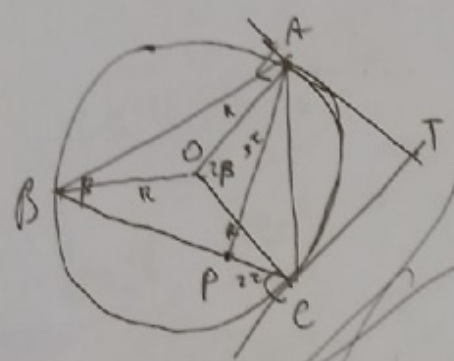
Задача 10) Прозаненно:  
 как квадрат к-ТА подобие; зносил

$S_{ABC} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$   
 $S_{CPK} = S_{CPK} \cdot \frac{25}{4} = 25$

Теорема

б)  $\angle ABC = \arctg \frac{4}{3} = \beta$   
 AC - ?

из подобия  $\Delta PKA$  и  $\Delta KTD \Rightarrow CK \cdot KA = PK \cdot KT$   
 $\frac{KO}{PK} = \frac{KT}{AK}$

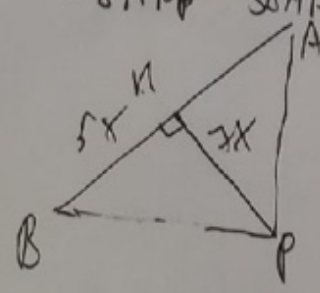


Пусть  $\angle ABC = \beta$ ; тогда угол  $\angle AOC = 2\beta$  (центральный угол)  
 Пусть  $OC = R = OA = OB$   
 Тогда  $\frac{AC}{\sin 2\beta} = 2R$  (теорема синусов)  
 $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos 2\beta$  (теорема косинусов для  $\Delta OAC$ )  
 $AC^2 = 2R^2 (1 - \cos 2\beta)$   
 $R = \frac{AC}{2 \sin \beta}$   
 $AC^2 = 2 \cdot \frac{AC^2}{4 \sin^2 \beta} (1 - \cos 2\beta) = AC^2 \frac{(1 - \cos 2\beta)}{2 \sin^2 \beta}$

$S_{PKC} = PC \cdot PK \cdot \frac{\sin \beta}{2} = 4$   
 $S_{APK} = AP \cdot PK \cdot \frac{\sin \beta}{2} = 6$   
 $\Rightarrow \frac{PC}{AP} = \frac{2}{3}$ ; Пусть  $PC = 2z$ ;  $AP = 3z$   
 $\rightarrow BC = \frac{5}{3} AP = 5z$   
 Но  $\frac{PC}{BP} = \frac{2}{3}$  (из подобия  $\Delta ABC$  и  $\Delta PKC$ )

$\Rightarrow BP = AP$

$S_{ABP} = S_{ABC} - S_{APC} = 15$  - Опустим  $PK$ ,  $PK \perp AP$  (тогда в равнобедренном)  
 пусть  $BK = 5x$ ; тогда  $PK = 7x$  ( $\cos \beta = \frac{4}{5}$ )



$S_{ABP} = 5x \cdot 7x = 15 = 35x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{15}{35}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$AB = 10x = 10\sqrt{\frac{3}{7}}$ ;  $BC = \frac{5}{3} AP = \frac{5}{3} BP$

$BP = \sqrt{BK^2 + PK^2}$  (т. Пифагора для  $\Delta BKP$ ) =  $\sqrt{74x^2} = \sqrt{74}x = \sqrt{74} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}$   
 $BC = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{74} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{5}{3} \sqrt{74} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}$

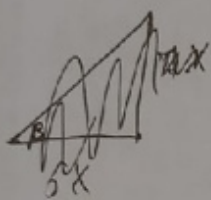
$$AB \cdot BC \sin \beta = 25$$

Saganda №6 Тригонометриче (Мемориз)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \beta \quad (\text{Т. Косинусов в } \triangle ABC)$$

$$AC^2 = \frac{25}{9} \cdot (\sqrt{74} \sqrt{\frac{3}{7}})^2 + 100 \cdot \frac{9}{7} - 2 \cdot 10 \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{74} \sqrt{\frac{9}{7}} \cdot \cos \beta$$

$$AC = \sqrt{\frac{25}{9} \cdot 74 \cdot \frac{9}{7} + 100 \cdot \frac{9}{7} - 2 \cdot \frac{9}{7} \cdot 10 \sqrt{74} \cos \beta}$$



$$\tan \beta = \frac{7}{5} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \Rightarrow \sin \beta = 1.4 \cos \beta$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$2.96 \cos^2 \beta = 1; \quad \cos \beta = \sqrt{\frac{1}{2.96}}$$

$$AC = \sqrt{\frac{3}{7} \left( \frac{25}{9} \cdot 74 + 100 - 20 \cdot \sqrt{74} \cdot \frac{10}{\sqrt{296}} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{7} \left( \frac{25}{9} \cdot 74 + 100 - 20 \cdot \frac{10}{2} \right)} = \sqrt{\frac{3}{7} \cdot \frac{25}{9} \cdot 74} = \sqrt{\frac{25}{21} \cdot 74}$$

$$AC = \sqrt{\frac{25}{21} \cdot 74}$$

← Ответ

(угла B  
меньше 90°  
н.о.с.м.р.а.т.и.с.)  
BAC)



Задача 1  $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ ,  $\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)^2$ ,  $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$x$ ...? где из них парама, а первое условие их на единицу?

$$\begin{cases} 5x-1 > 0 \\ 4x+1 \neq 1 \\ 4x+1 > 0 \\ \frac{x}{2}+2 > 0 \\ \frac{x}{2}+2 \neq 1 \\ 5x-1 \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x > 0,2 \\ x \neq 0 \\ x > -0,25 \\ x > -4 \\ x \neq -2 \\ x \neq 0,4 \end{cases}$$

OD3:  $\frac{0,2 \quad 0,4}{\text{|||||}} \rightarrow x$

~~Тогда  $\frac{x}{2}+2 > 0$  по условию из OD3~~

~~$2 \log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2) = 2 \cdot (\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1))$~~

~~$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \log_{5x-1}(4x+1)$~~

~~$\log_{\frac{x}{2}+2}(\frac{x}{2}+2)^2 = 2 \log_{\frac{x}{2}+2}(\frac{x}{2}+2) = 2 \log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)$~~

~~$\log_{5x-1}(4x+1) = 2 \log_{5x-1}(4x+1)$~~

~~Итак парама и первое условие~~

~~$2 \log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1) = 2 \log_{5x-1}(4x+1) \Rightarrow \frac{x}{2}+2 = 5x-1$~~

~~$4,5x = 3; x = \frac{2}{3}$  (по условию)~~

~~$2 \log_{\frac{x}{2}+2}(\frac{x}{2}+2) \neq \log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)$~~

~~не парама  $4x+1 \neq 1$~~

~~$\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1) = \log_{5x-1}(4x+1)$~~

Ⓜ парама I и II

$2 \log_{5x-1}(4x+1) = 2 \log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)$

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{196}{296}} \quad \cos \beta = \sqrt{\frac{100}{296}}$$

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cdot \cos \beta = 2 \cdot \frac{\sqrt{19600}}{296} = \frac{2 \cdot 140}{296} = \frac{280}{296} = \frac{140}{148} = \frac{70}{74} = \frac{35}{37}$$

$$TC = AC \cdot \frac{\sqrt{\frac{196}{296}}}{35} \cdot 37 = \frac{37}{35} \cdot \frac{14}{\sqrt{296}} AC = \frac{37 \cdot 2}{5 \cdot \sqrt{296}} = \frac{37}{5 \cdot \sqrt{74}}$$

$$\frac{37^2}{5^2 \cdot 74} AC^2 = \frac{AC^2}{4} \cdot \frac{49}{25} AC^2$$

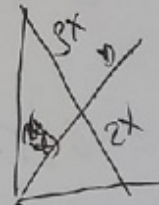
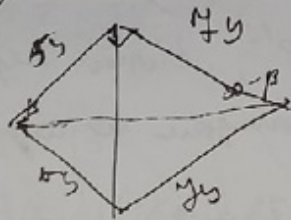
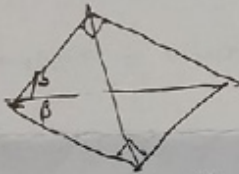
AB · BC

BP · A ·  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \cdot BC \cdot \cos \beta$

$$AC^2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \beta$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \cdot BC \cdot \cos \beta$$

$$AC^2 = 2AT^2 - 2AT^2 \cdot \cos(180 - 2\beta)$$



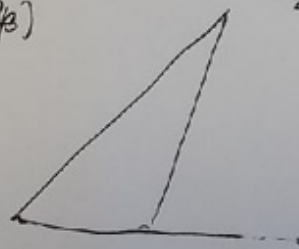
$$AC^2 = 50^2 (1 - \cos 2\beta)$$

$$AC^2 = 2500 (1 - \cos(180 - 2\beta))$$

$$AC^2 = 5000 (1 - \cos 2\beta)$$

$$AC^2 =$$

$$\frac{AC}{\sin \beta} = 2y$$



2