Часть 1

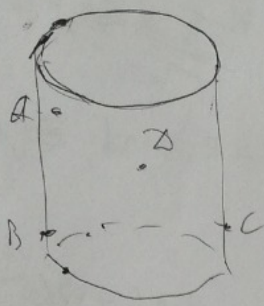
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

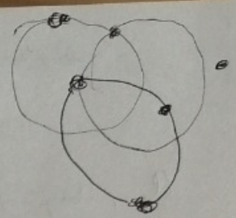
Шифр: **21103869**

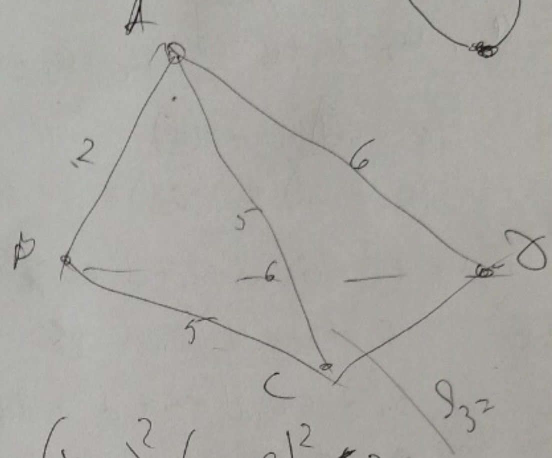
ID профиля: **314768**

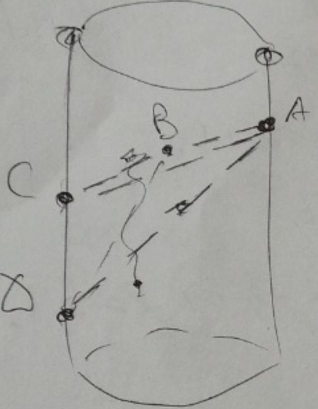
Вариант 17

Черновик.









$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2.$

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b; 2)$

1) $2a+2b \ge 2.$

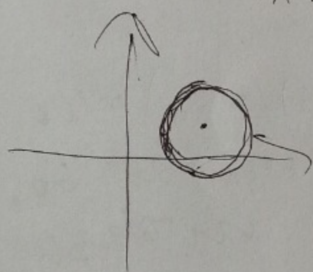
$a+b \ge 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2 \le 2.$

2) $a+b<1$

$a^2+b^2 \le 2a+2b.$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2.$



$(a_1+5d)(a_1+11d) > S+1$

$(a_1+6d)(a_1+10d) < S+17.$

$S = 5(2a_1+9d)$

$a_1^2+16ad+55d^2 > S+1$

$S+1+5d^2 < +5d^2 = a^2+16ad+60d^2 < S+17$

$5d^2 < 16 \Rightarrow d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow d = \pm 1.$

1) $d=1$

$a_1^2+16a+55 > 10a_1+46$ $(a+3)^2>0$ $a \ne -3$.

$a^2+16a+60 < 10a+62$

$a^2+6a-2<0$

$k=3$

$D = 9+2 = 11$ $-3+\sqrt{11}>0$

$a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$-3-\sqrt{11} < -3-\sqrt{9} = -6.$

21103869 (U314768 M1295729)

~~$a_6 a_{12} =$~~

Черновик

a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_6 = a_1 + 5d$; $a_7 = a_1 + 6d$; $a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{12} = a_1 + 11d$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > S+1$

$(a_1+6d)(a_1+10d) < S+17$.

$k = a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 \geq S+1$ $\quad S = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 5(2a_1+9d)$

$k + 5d^2 = a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 \leq S+17$

$a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$.

$S + 2 + 5d^2 \leq k + 5d^2 \leq S+16$.

$5d^2 \leq 14 \Rightarrow d^2 \leq \frac{14}{5} \Rightarrow d = \pm 1$.

1) $d = 1$

$(a_1+5)(a_1+11) > 10a_1 + 45$.

$a_1^2 + 6a_1 + 10 > 0$ при любом a_1

2) $d = -1$.

$S + 1 + 5d^2 < k + 5d^2 \leq S+17$.

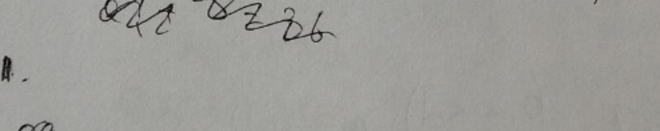
$5d^2 < 16 \Rightarrow d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow d = \pm 1$.

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + \underbrace{45+17}_{62}$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$D = 9 + 2 = 11$ $\quad (b = 3)$

$a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}$.



21103869 (U314768 M1295729)

~~Черновик~~

Чистовик. №3. Лист 2.

1) $2a+2b\geq 2 \Rightarrow \begin{cases} a+b\geq 1 \\ a^2+b^2\leq 2 \end{cases}$

2) $2a+2b<1 \Rightarrow \begin{cases} a+b<1 \\ a^2+b^2\leq 2a+2b; (a-1)^2+(b-1)^2\leq 2. \end{cases}$

Рис. 1)

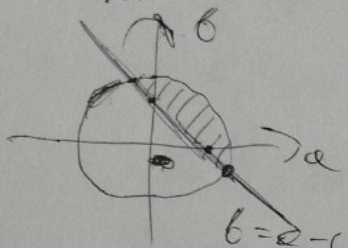
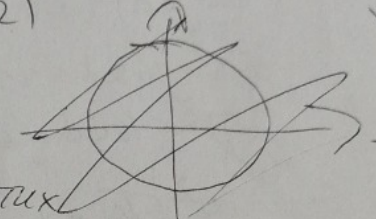
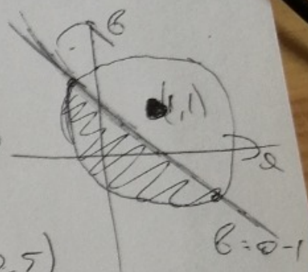


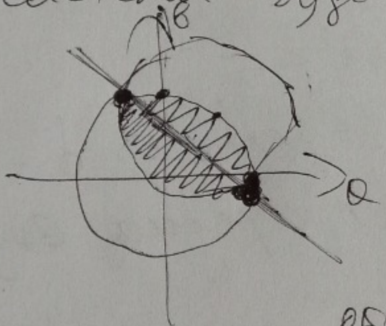
Рис. 2)





Центры этих окружностей симм. отн. (0,5; 0,5)

Тогда рисунок для 2-го неравенства из изначальной системы будет выглядеть:



– удовлетворяет неравенству. Таким образом, любая точка из покрашенной площади будет являться центром для окружности из первого неравенства системы.

~~Заметим, что $S_M = 4S$ ... Каждая точка~~

~~из сдвинется в два раза~~

Каждая ~~точка~~ сдвинется в 2 раза относительно точки (0,0) точка, из покрашенных.

Тогда ~~S_M~~ $r_M = 2\sqrt{2} \Rightarrow S_M = \pi\cdot 8 = 8\pi.$

Ответ: $S_M = 8\pi.$

21103869 (U314768 M1295729)

B17. Чистовик. Лист 1.

№1.

$a_1 = a$; $a_2 = a+d$; $a_6 = a+5d$; $a_7 = a+6d$;

$a_{11} = a+10d$; $a_{12} = a+11d$.

$$\begin{cases} (a+5d)(a+11d) > S+1 \\ (a+6d)(a+10d) < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+16ad+55d^2 > S+1 \\ a^2+16ad+60d^2 < S+17 \end{cases}$$

$a^2+16ad+60d^2 = a^2+16ad+55d^2+5d^2 > S+1+5d^2$.

Таким образом

$S+1+5d^2 < S+17$

$5d^2 < 16 \Rightarrow d^2 < \frac{16}{5}$.

a_1 - целое, a_2 - целое $\Rightarrow$ d - целое.

$\Rightarrow d = 0, \pm 1$, но прогрессия возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1$.

$S = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 5(2a_1 + 9d) = 10a + 45$.

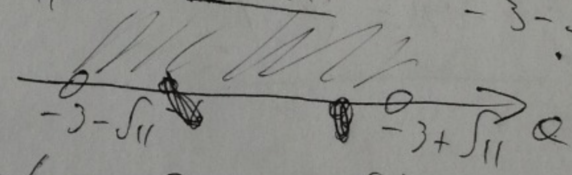
$$\begin{cases} a^2+16a+55 > 10a+46 \\ a^2+16ad+60 < 10a+62 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+6a+9>0; \ (a+3)^2>0, \ \underline{a \neq -3} \\ a^2+6a-2<0 \end{cases}$$

$a^2+6a-2<0$

$D = 9+2 = 11$

$a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$-3-\sqrt{11} < -3-3 = -6$; $-3+\sqrt{11} > 0$.



$a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$ и $a \in \mathbb{Z}$ и $a \neq -3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = -6$; $a = -5$; $a = -4$; $a = -2$; $a = -1$; $a = 0$.

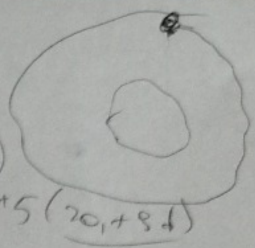
Ответ: ~~$a_1 = -6$; $a_2 = -5$; $a_3 = -4$; $a_4 = -2$; $a_5 = -1$; $a_6 = 0$~~

21103869 (U314768_M1295729)

-6; -5; -4; -2; -1; 0

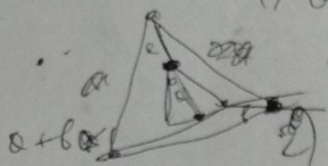
Черновик.

$-3-\sqrt{11}$ $\quad$ $3+\sqrt{11}$ $\quad a$



$a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0)$

1) $a=-6$; $d=1$. $\quad$ $S = \cancel{a_1} + 5(2a_1+9d)$

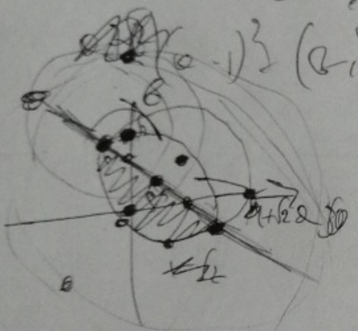


$a+b \geq 1$

$a^2+b^2 \leq 2$.

2) $d=-1$.

$a^2+b^2 \leq 2a+2b$. $\quad a_1^2+16a-55 > 10a_1+46$.

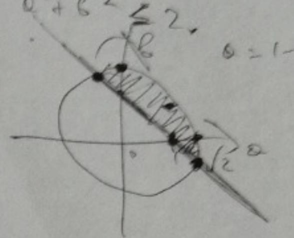


$(a-1)^2 (b-1)^2 \leq$ $\quad a^2+6a-101>0$

$D = 9+101 = 110$

$a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{110}}{}$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2$.



$a^2+16a-60 < 10a+28$.

$a^2+6a-88<0$ $\quad$ $a^2+2ab+b^2 \geq 1$.

$D = 9+88 = 97$.

$a+b=1$.

$a^2+b^2 = 2a+2b$. $\quad$ $a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{97}}{}$ $\quad$ $b \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$a^2+b^2=2$. $\quad$ 1) $\cancel{a^2+b^2 \leq 2a+2b}$ $\quad$ $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$a^2+2ab+b^2=1$. $\quad$ $a+b \geq 1$.

$a^2+b^2=2$ $\quad$ $a^2+2ab+b^2 \geq 1$

$1-2ab \leq a^2+b^2 \leq 2$.

$ab = -\frac{1}{2}$) $\quad$ $\cancel{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2}$. $\quad$ $2ab \geq 1 \Rightarrow ab \geq 0,5$.

$\cancel{a^2+b^2} \leq \cancel{} \; 2a+2b \geq 2$

$b = -\frac{1}{2a}$.

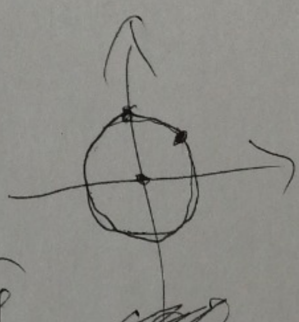
$a+b \geq 1$; $a \geq 1-b$

$a - \frac{1}{2a} = 1$ $\quad$ $1-2b+2b^2 \leq a^2+b^2 \leq 2$.

$2b^2 - 2b - 1 \leq 0$

$2a^2-1-2a=0$

$2a^2-2a-1=0$



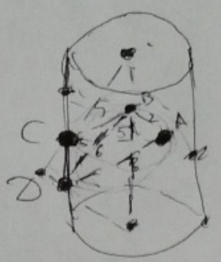
$1+\sqrt{3} \; ? < 2\sqrt{2}$

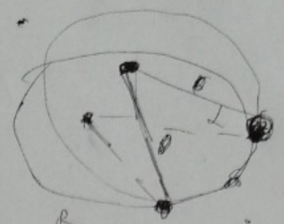
$D = 1+2 = 3$.

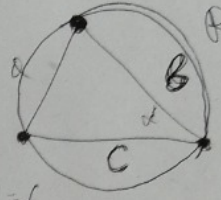
$1+\sqrt{3} \; ? \; \sqrt{8}$.

$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $1+3+2\sqrt{3} \; ? \; 8$ $\quad$ $2\sqrt{3} < 2\sqrt{4} < 2$

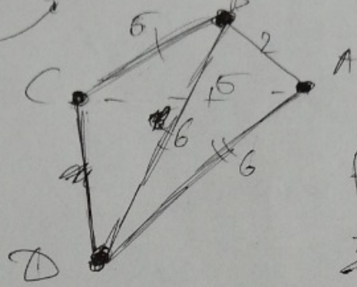
21103869 (U314768 M1295729)







$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$



$p = 6$

$S = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}.$

$\cancel{2\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin\alpha}$ $4RS = abc$

$\cancel{\sin\alpha = \frac{4\sqrt{6}}{25}}$ $4 \cdot 2\sqrt{6} \cdot R = 5 \cdot 5 \cdot 2$

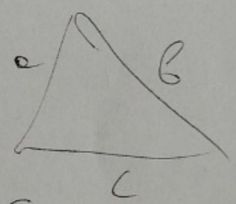
$\cancel{R = \frac{2}{\frac{4\sqrt{6}}{25}} = \frac{25}{2\sqrt{6}}}$ $R = \frac{25}{4\sqrt{6}}$

$p = 7$ $S = \sqrt{7 \cdot 5} = \sqrt{35}.$

$\sqrt{7 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2}$

$4R \cdot \sqrt{35} = 6 \cdot 6 \cdot 2.$

$R = \frac{18}{\sqrt{35}}$



$4RS = abc$

$S = \cancel{\sqrt{6 \cdot 4} = 2\sqrt{6}}$ $p = 6$

$\cancel{4 \cdot 2\sqrt{6}}$

$\frac{18}{\sqrt{35}} > \frac{25}{4\sqrt{6}}.$

$72\sqrt{6} \overset{?}{\vee} 25\sqrt{35}.$

$72^2 \cdot 6 \overset{?}{>} 25^2 \cdot 35.$

$\left(\frac{72}{25}\right)^2 > \left(\frac{70}{25}\right)^2 = \left(\frac{14}{5}\right)^2 =$

$= (2{,}8)^2 > 6 > \frac{35}{6}.$

```
 72
x72
 144
504
5184

 5184
x   6
31104

 625
  35

 3125
x   7
```

21103869 (U314768 M1295729)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103869**

ID профиля: **314768**

Вариант 17

Черновик.

$6x \cdot 6y \cdot 6z = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$x \cdot y \cdot z = 2^{12} \cdot 3^{13}$

$\boxed{2^m \quad 2^n \cdot 3^k \quad 3^p}$

$m+n=12$. $(12 \cdot 13 \cdot 4)$

$p+k=13$.

$4, 6, 8$.

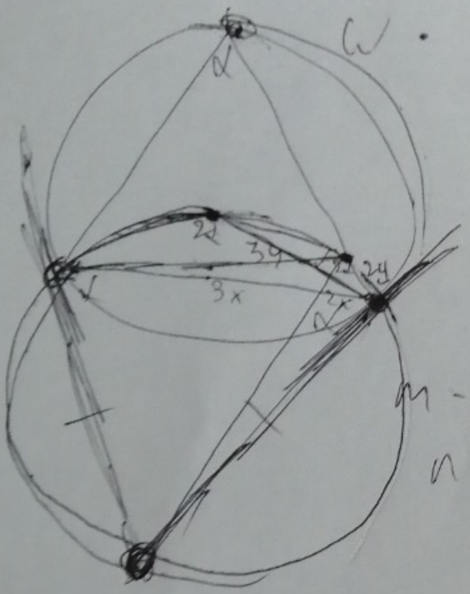
$3, 9, 4$.

$36 \cdot 6$.

$m=0$.

$p=0$.

12



$\text{нок}(6x; 6y; 6z) = 2^{15} \cdot 3^{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{нок}(x; y; z) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

m - 16 сл.

n - 16 сл.

k - 17 сл.

p - 17 сл.

$R =$

PKC

2^{15} $\quad 2^{1} \cdot 3$

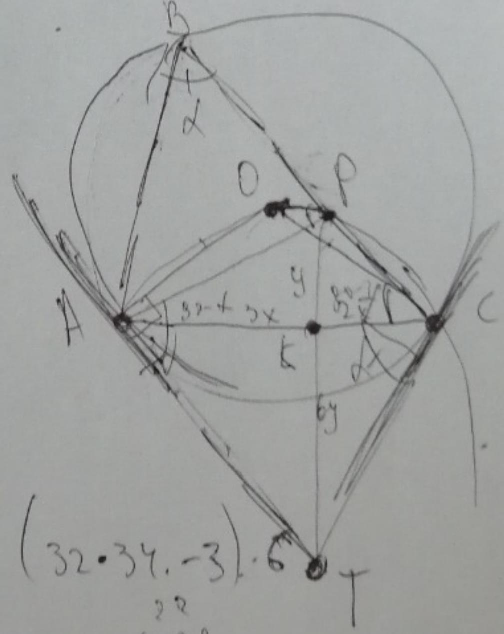
$2^m, \; 2^n 3^k, \; 3^p$

max(m,

$m = 15 \Rightarrow n = 16$.

$n = 15 \Rightarrow m = 16$.

$(32 \cdot 34 \cdot -3) \cdot 6$

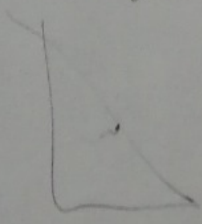


$\begin{array}{r} 34 \\ \times\, 32 \\ \hline 68 \\ 102 \\ \hline 1082 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1079 \\ \times\, 3 \\ \hline 3237 \end{array}$

$6x^2 = y \cdot t$

$t = \frac{6x^2}{y}$



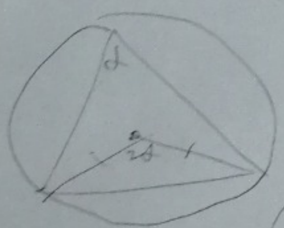
$3xy \cdot \alpha = 4xy \cdot 6$

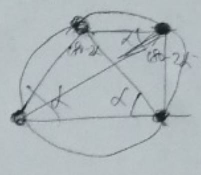
21103869 (U314768 M1295730)

~~$a=6x;\ b=6y;\ c=6z$~~

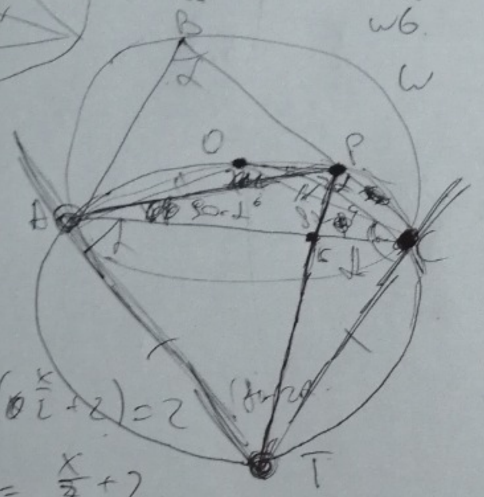
Черновик

$a=6x;\ b=6y;\ c=6z$





$R=\frac{AC}{2\sin\alpha}$



$a=6x;\ b=6y;\ c=6z.$

$xyz=2^{12}\cdot 3^{13}$

$(12+1)(13+1)=13\cdot 14.$

$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2$

$4x+1=\frac{x}{2}+2.$

$3{,}5x=1$

$x=\frac{2}{7}.$

$2^{m},\ 2^{n},\ 3^{k}.$

$m+n=12.$

$abc=2.$

$a^2(a-1)=2.$

$a^3-a^2-4=0.$

$a^3=a^2+2$

$3a^2-2a=0$

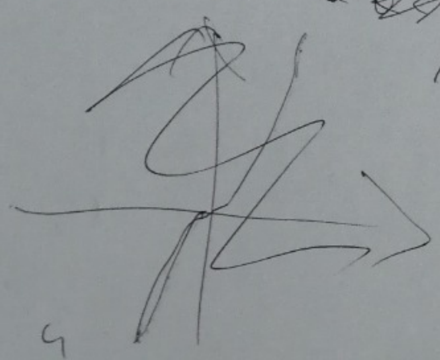
$a(3a-2)=0$

$a=2$

$2\log_{5x-1}(4x+1)=2.$

$4x+1=5x-1$

$x=2.\Rightarrow$



$a^3-a^2-4\ \big|\ a-2$

$a^3-2a^2\qquad a^2+a+2.$

a^2-2a

$2a-4$

$2a-4.$

$0.$

$\Rightarrow 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1.$

$a^2+a+2=0$

$D<0.\ \varnothing.$

$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=2$

21103869 (U314768 M1295730)

~~$b=6x+1$ в $b_1=6_1$~~

Чистовик Лист 3.

Чистовик. В17. Лист 1.

№5.

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1) \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \end{cases}$$

ОДЗ: $4x+1\neq 1$; $4x+1>0$; $5x-1>0$; $5x-1\neq 1$; $\frac{x}{2}+2>0$; $\frac{x}{2}+2\neq 1$

$$2\log_{5x-1}(4x+1)\cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=4.$$

Пусть какое-то из ~~логарифмов~~ 3х чисел $=a$.

Тогда $a^2(a-1)=4$ по условию.

$a^3-a^2-4=0$

$a=2$ (подбором)

$$\begin{array}{l|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ \underline{a^3-2a^2} & \overline{a^2+a+2} \\ \quad a^2 & \\ \quad \underline{a^2-2a} & \\ \quad\quad 2a-4 & \\ \quad\quad \underline{2a-4} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow a^3-a^2-4=(a-2)(a^2+a+2)$

$a^2+a+2>0$, т.к. $D<0$ и $a>0$.

Тогда $a=2$ – единств. корень.

1) $2\log_{5x-1}(4x+1)=2 \Rightarrow 5x-1=4x+1 \Rightarrow x=2$. Входит в ОДЗ.

$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2\log_9 3=1$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_3 9=2$.

Поэтому $x=2$ корень.

2) $2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2 \Rightarrow \frac{x}{2}+2=4x+1 \Rightarrow x=\frac{2}{7}$. Входит в ОДЗ.

$\Rightarrow 2\log_{5x-1}(4x+1)=2\log_{\frac{3}{7}}\left(\frac{15}{7}\right)$, что неравно ни 2, ни 1.

$x=\frac{2}{7}$ не подходит.

3) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1$; $\frac{x^2}{4}+2x+4=5x-1$

$x^2+8x+16=20x-4$; $x^2-12x+20=0 \Rightarrow x_1=2$; $x_2=10$.

$x_1=2$ проверяли.

21103869 (U314768 M1295730)

~~a = 6x ; ...~~

Чистовик. Лист 2.

$x=10 \Rightarrow \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_7 41$ ~~log~~ – не равно ни 2, ни 1.

Ответ: $x=2$.

21103869 (U314768 M1295730)

Чистовик Лист 3.

№4.

~~$a = 6x$; $b = 6y$; $c = 6z$ => НОД$(x; y; z) = 1$.~~

~~abc = НОК(a, b, c).~~

$a = 6x$; $b = 6y$; $c = 6z \Rightarrow$ НОД$(x; y; z) = 1$.

НОК$(6x; 6y; 6z)$ = НОК$(x; y; z) = 2^{15} \cdot 3^{16}$.

Максимум ~~одно из~~ два из x, y, z должны быть кратны двум. Действительно, иначе НОД$(x, y, z) \neq 1$.

Максимум два числа из x, y, z могут быть кратны трём. Аналогично.

Тогда пусть $x = 2^m$; $y = 2^n \cdot 3^k$; $z = 3^p \Rightarrow \max(m, n) = 15$; $\max(k, p) = 16$.

Рассм. случаи, когда какие-то 2 из чисел равны.

1) $x = y \Rightarrow 2^m = 2^n \cdot 3^k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow p = 16$,

~~$\Rightarrow 1 \cdot C_3^2$ способа $= 3$~~

~~2) $y = z \Rightarrow k = 0 \Rightarrow m = 16, p = k$~~

$m = n = 15. \Rightarrow$ Всего способов: $1 \cdot C_3^2 = 3$.

2) $y = z \Rightarrow 2^n \cdot 3^k = 3^p \Rightarrow k = p, n = 0 \Rightarrow k = p = 16; n = 0, m = 15$.

Тогда в этом случае также $C_3^2 = 3$ способа.

3) $x = z \Rightarrow 2^m = 3^p \Rightarrow m = 0 = p \Rightarrow n = 15; k = 16 \Rightarrow$ ещё 3 способа.

4) $x \neq y \neq z \Rightarrow$ если $m = 15$, то $0 \leq n \leq 15 \Rightarrow$ 16 способов для n.

если $n = 15$, то 16 способов для m.

$16 + 16 = 32$

если $k = 16$, то $0 \leq p \leq 16 \Rightarrow$ 17 способов для p.

если $p = 15$, то $0 \leq k \leq 16 \Rightarrow$ 17 способов для k.

Таким образом

$32 \cdot 34$ – способы выбрать (m, n, p, k)

$32 \cdot 34 - 3$ – способы выбрать (m, n, p, k) без тех трёх случаев сверху.

Тогда $6 \cdot (32 \cdot 34 - 3)$ – всего способов в 4-м случае.

Всего способов:

$6(32 \cdot 34 - 3) + 9 = 3246$

$\boxed{\text{Ответ: } 3246}$

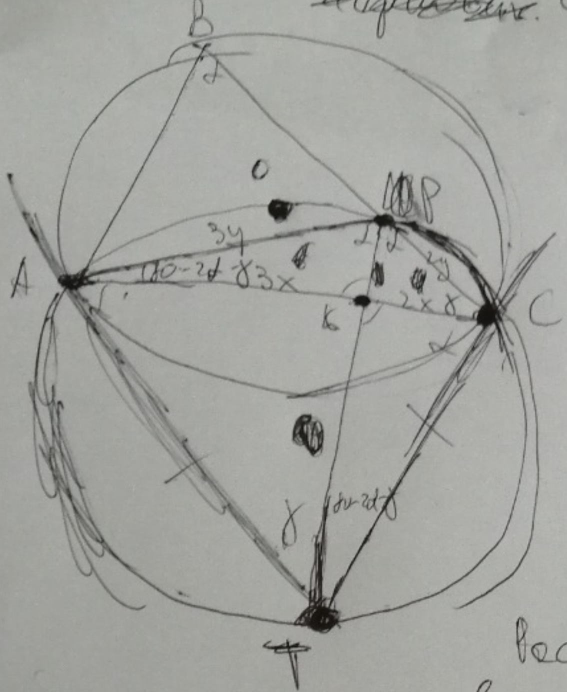
21103869 (U314768 M1295730)

Чистовик. Лист 2.

$\Rightarrow \log_{5x+7}(4x+1) = \ldots$

...м 1.

~~Черновик~~. Чистовик Лист 4.



Решение:

Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAT = \angle ACT = \alpha$, т.к. угол м/у касательной и хордой. $\Rightarrow \angle CTA = 180 - 2\alpha$.

Заметим, что $\angle AOC = 2\alpha$, т.к. $\angle AOC$ – центр. угол. Поэтому A, O, C, T лежат на одной окружности. Тогда же мы знаем, что A, O, P, C лежат на одной окружности.

Рассм. окружность, описанную вокруг $\triangle AOC$: на ней лежат и P, и $T \Rightarrow AOPCT$ – вписанный пятиугольник.

$$\frac{6}{4} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{KP \cdot AK \cdot \sin(AKP)}{KC \cdot KP \cdot \sin(180^\circ - \angle AKP)} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$$

Пусть $AK = 3x$, $CK = 2x$.

$APCT$ – вписанный $\Rightarrow \angle APT = \angle ACT = \alpha$, т.к. вписанные углы. Аналогично $\angle CPT = \angle CAT = \alpha$. Тогда PK – биссектриса в $\triangle APC$. По св-ву биссектрисы: $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$

Пусть $AP = 3y$; $PC = 2y$.

Пусть $\angle BCA = \gamma$, $\Rightarrow \angle ATP = \angle ACP = \gamma$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PCT = 180 - 2\alpha - \gamma \Rightarrow \angle PAC = 180 - 2\alpha - \gamma$, т.к. вписанный

$\triangle ACT$ $R = \frac{AC}{2\sin\alpha} \Rightarrow AC = \frac{R}{2\sin\alpha} \Rightarrow$ по т. синусов в $\triangle ACT$: $\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AT}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{R}{2\sin 2\alpha \cancel{\sin\alpha}} = \frac{AT}{\cancel{\sin\alpha}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AT = \frac{R}{2\sin 2\alpha} = CT.$$

$AB \parallel PT$, т.к. $\angle ABC = \angle TPC$; $\angle APB = \angle BAP = \alpha$, т.к.

21103869 (U314768 M1295730)