Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103770**

ID профиля: **98833**

Вариант 17

Чистовик N1

(1)

$a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_{10}$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$$

пусть d – разность прогрессии ($d > 0$)

1)

a_1

$a_2 = a_1 + d$

...

$a_{10} = a_1 + 9d$

$$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$$

2) $a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$$\Rightarrow a_6 a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) =$$

$$= a_1^2 + 5a_1 d + 11 a_1 d + 55d^2 =$$

$$= \boxed{a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1} \quad (1)$$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$$\Rightarrow a_7 a_{11} = (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) =$$

$$= \boxed{a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17} \quad (2)$$

Имеем систему нер-в:

$$\begin{cases} -a_1^2 - 16a_1 d - 55d^2 < -10a_1 - 45d - 1 & (1) \\ a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 & (2) \end{cases} \quad +$$

$$5d^2 < 16$$

$$d^2 < \frac{16}{5} = 3{,}2$$

По усл-ю прогрессия сост-ит из целых чисел:

$a_1 \in \mathbb{Z}$

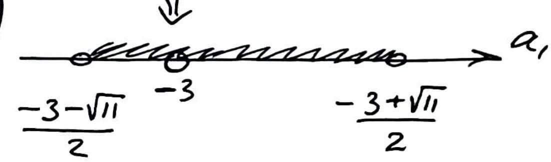
$a_2 = \underbrace{a_1}_{\in \mathbb{Z}} + d \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad d \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2 < 3{,}2 \\ d \in \mathbb{Z} \\ d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \underline{d = 1}$$

Подставляем $d = 1$ в нер-ва (1) и (2):

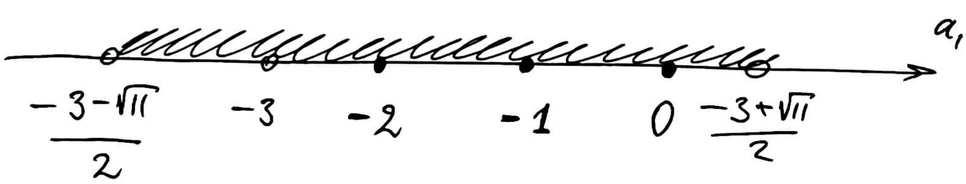
$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1 & (1) \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ \end{cases}$$



$a_1^2 + 6a_1 - 2 = 0$:

$$a_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$$



$\frac{-3-\sqrt{11}}{2} < -3$, т.к. $4 > \sqrt{11} > 3$

$0 < \frac{-3+\sqrt{11}}{2} < 1$, т.к $0 < -3 + \sqrt{11} < 2$, т.к. $3 < \sqrt{11} < 4$.

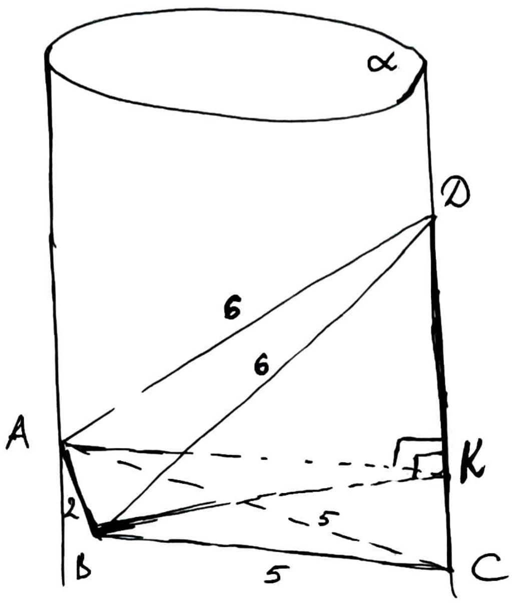
Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$ и $d = 1$, то

$$a_1 \in \{-2; -1; 0\}.$$

Ответ: $a_1 \in \{-2; -1; 0\}$.

Чистовик №3

(2)



1) Т.к. CD паралл-но оси цилиндра; $\triangle ADB$, $\triangle ACB$ — равнобедр.-е

$\Rightarrow$ AB лежит в плоск-ти, паралл-ой основанием цилиндра

Поставим т. $K \in CD$, такую что $(ABK) \parallel \alpha$, где α — плоск-ть осн-я (см рис.)

Тогда $\triangle ABK$ — проекция $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ на плоск-ть (ABK); радиус цилиндра есть радиус описанной около $\triangle ABK$ окр-ти.

($\triangle ABK$ — равнобедр.-й; $AK = KB$, $AB = 2$).

Радиус описанной около р/б $\triangle ABK$ окр-ти минимален, если $\triangle ABK$ — равносторонний, т.е.

$AK = KB = AB = 2$.

Т.к $\alpha \perp CD$ $\Rightarrow$ $(ABK) \perp CD$

$\Rightarrow BK \perp CD$, т.е. $\triangle BKD$ — прямоуг.-ый
$\triangle BKC$ — прямоуг-ый

$\cos\angle KBC = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin\angle KBC = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$KC = BC \sin\angle KBC = 5 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \sqrt{21}$

$\cos\angle KBD = \frac{5}{6} \Rightarrow \sin\angle KBD = \sqrt{1-\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$KD = BD \sin\angle KBD = 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \sqrt{11}$.

$\Rightarrow CD = KD + KC = \sqrt{11} + \sqrt{21}$.

Ответ: $CD = \sqrt{11} + \sqrt{21}$.

③ Чистовик №4

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2) & (2)\end{cases}$$

(1) — Круг с центром в т. $(a;b)$ радиуса $\sqrt{2}$ (границы включены)

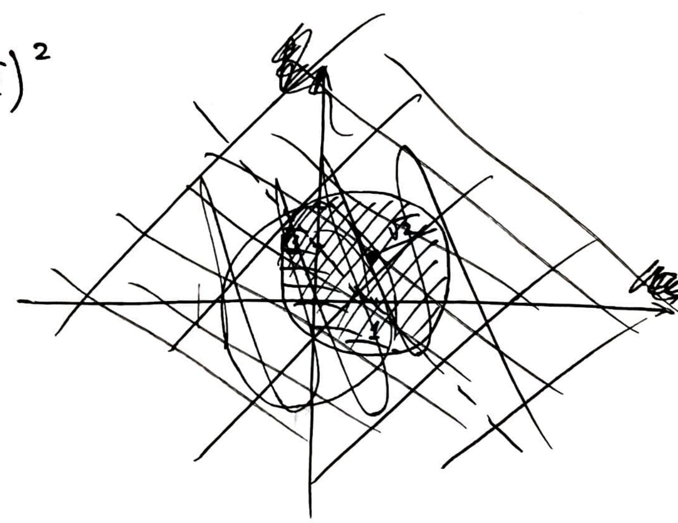
(2) если $2(a+b) < 2$, т.е. $a+b<1$, имеем

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 2(a+b)\\ a+b<1\end{cases}$$

если $a+b \ge 1$:

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 2\\ a+b \ge 1\end{cases}$$

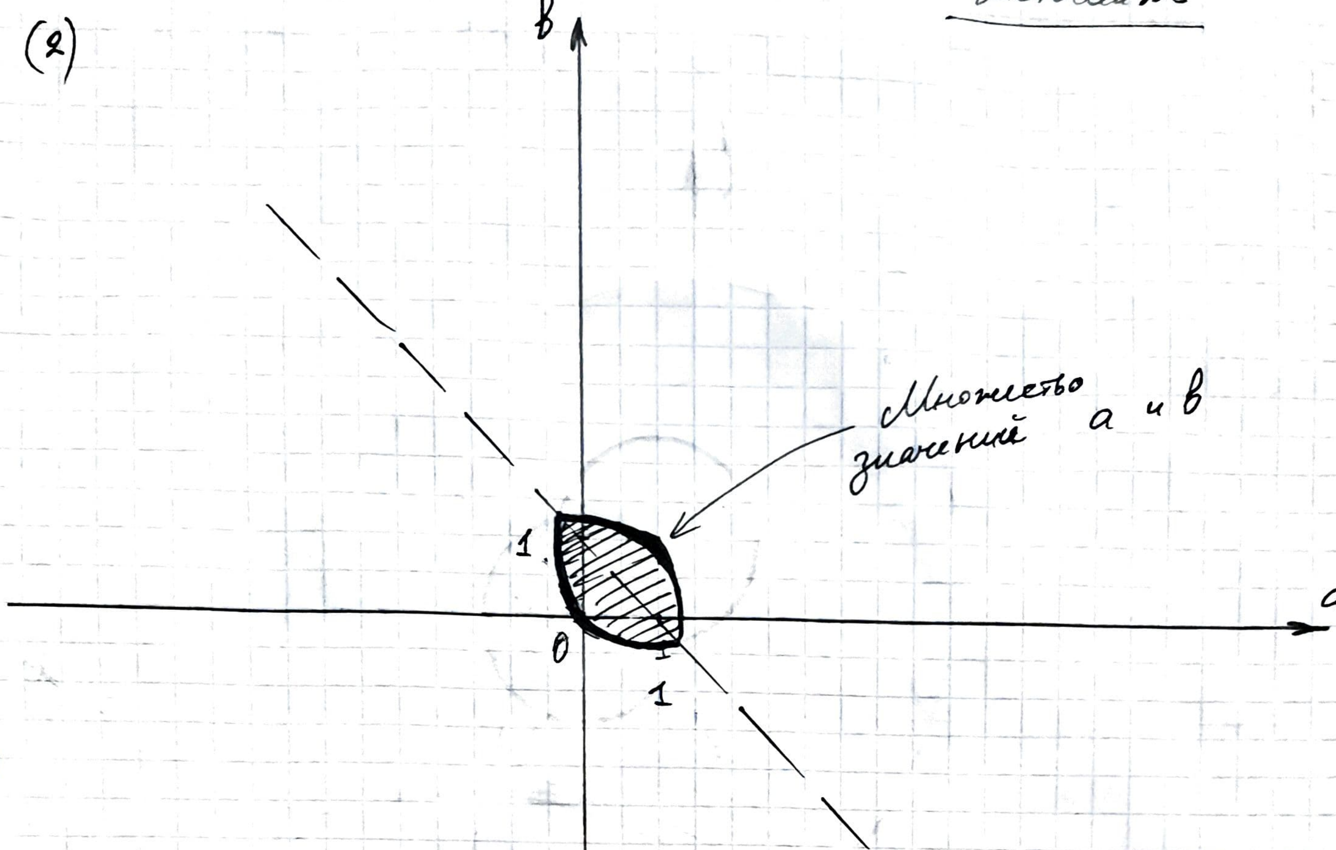
$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2 \le (\sqrt{2})^2\\ b<1-a\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2 \le (\sqrt{2})^2\\ b \ge 1-a\end{cases}\end{array}\right.$$



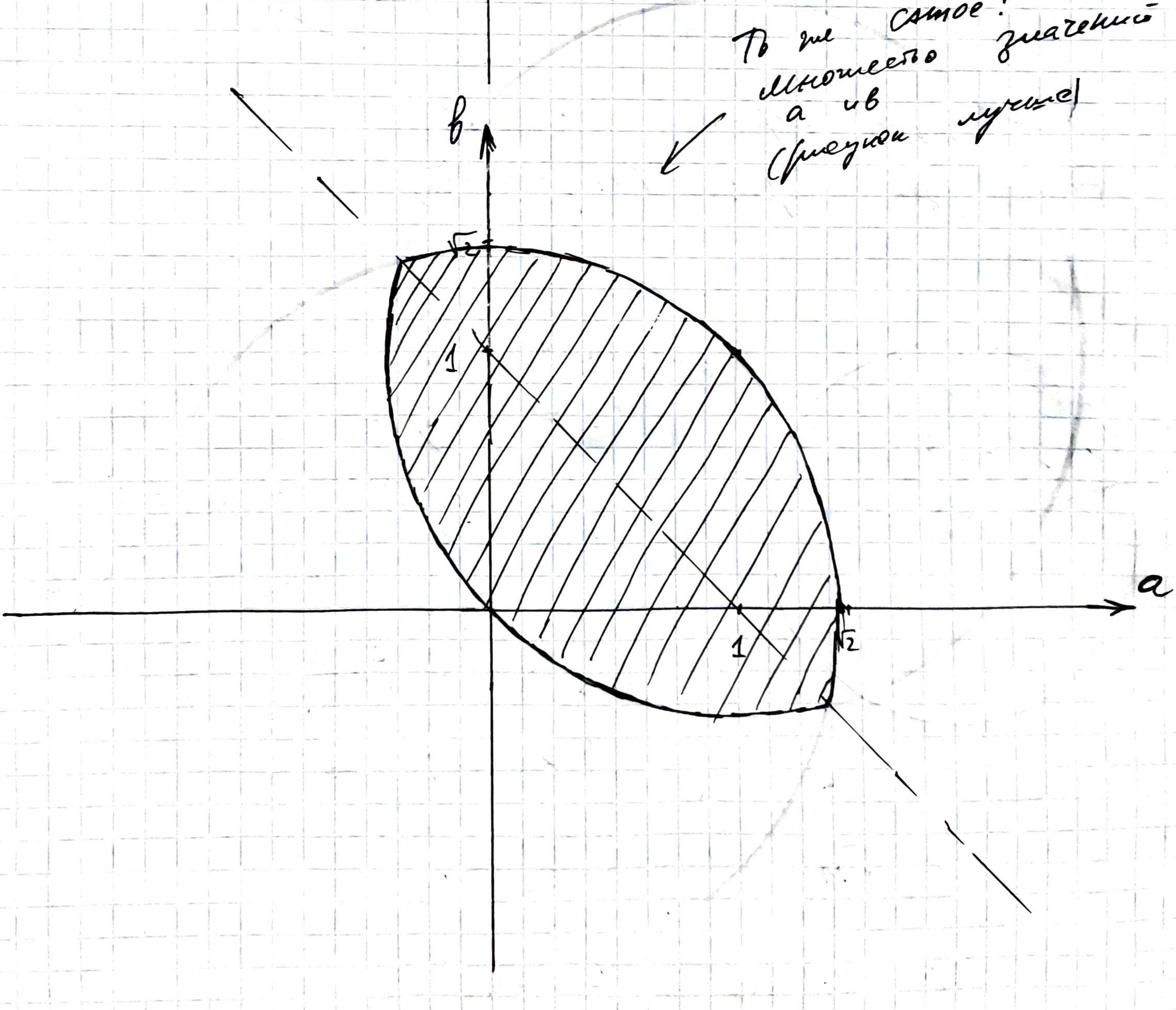
Изобразим множество значений a и b на координатной плоскости:

Чистовик №5

(2)



в
а
1
0
1
Множество значений а и в

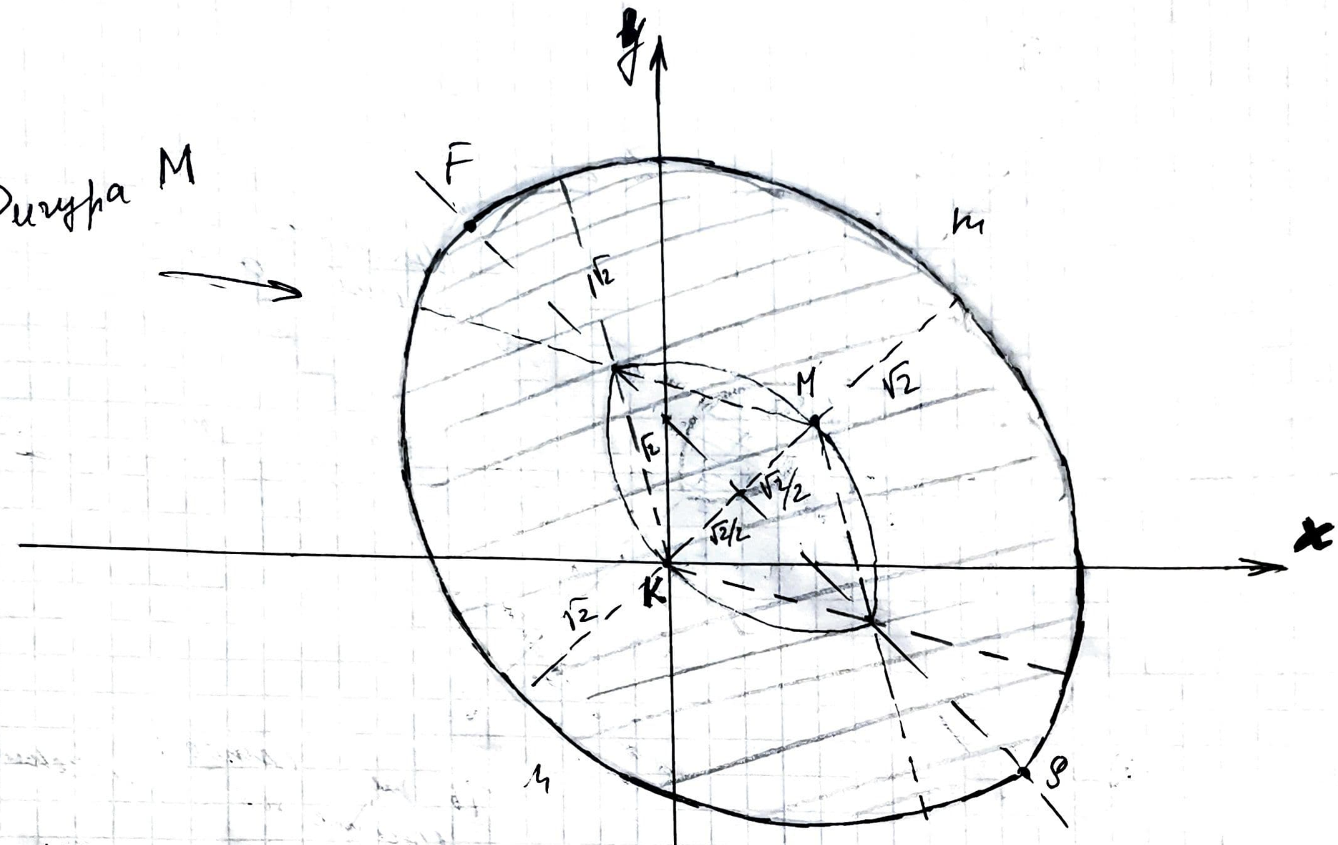


То же самое: множество значений а и в (рисунок лучше)
в
а
$\sqrt{2}$
1
1
$\sqrt{2}$

Чистовик №6

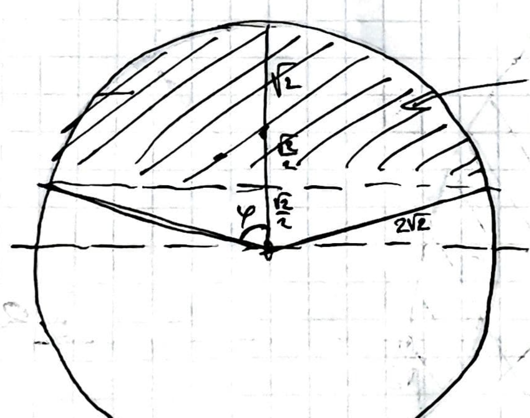
Искомая фигура M — огибающая окр-тей с
(фигура M задаёт множество кругов: $(x-a)^2+(y-a)^2=(\sqrt{2})^2$, ~~центр на~~ с центрами на границе множества значений a и b;

Фигура M



$\smile FmS$ — дуга окр-ти $(K;\ R=2\sqrt{2})$

$\smile FnS$ — дуга окр-ти $(M;\ R=2\sqrt{2})$



Заштрихованная фигура Z

$S_Z = S_{\text{сегм}} - S_\Delta$

~~$S = \frac{2\varphi\cdot(\sqrt{2})^2}{2} = 2\varphi = \frac{2\pi}{3}$~~

~~$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} / 2\sqrt{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$~~

~~$S_\Delta = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$~~

~~$\Rightarrow S_Z = S_{\text{сегм}} - S_\Delta = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$~~

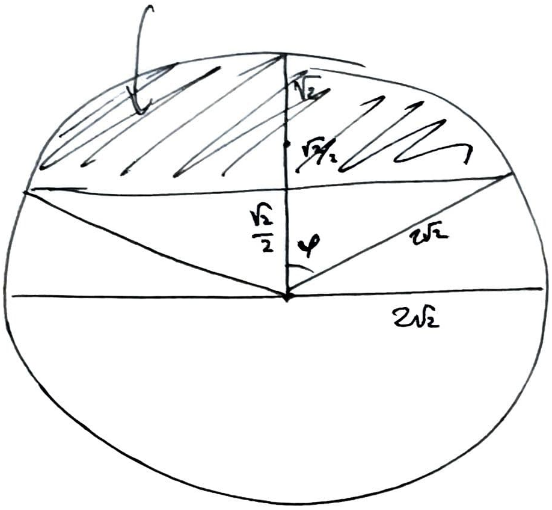
~~Площадь фигуры M:~~

~~$S_M = 2S_Z = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$~~

~~Ответ: $S_M = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.~~

Чистовик N 7

фигура Z (заштрихована)



$$S_Z = S_\nabla - S_\Delta$$

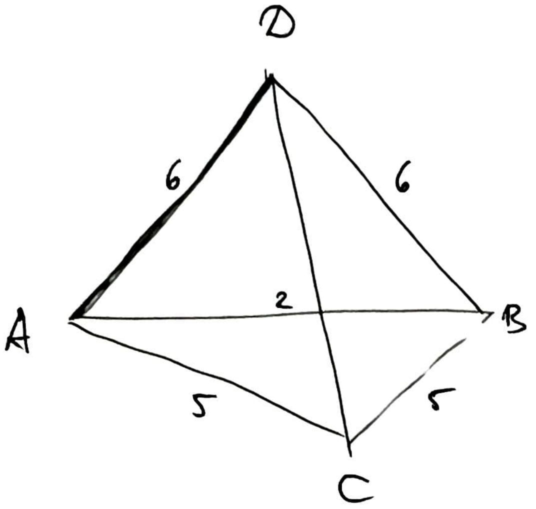
$$S_\nabla = \frac{2\varphi \cdot 4 \cdot 2}{\cancel{2}} = 8\varphi = 8\arccos\frac{1}{4}$$

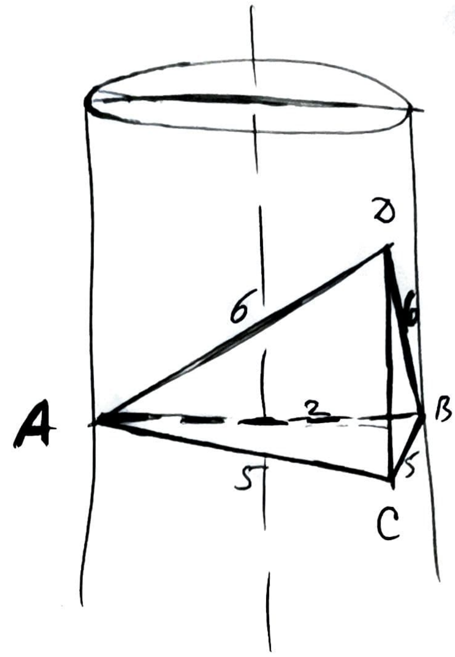
$$\varphi = \arccos\frac{1}{4}$$

$$S_\Delta = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$S_Z = \arccos\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{2}$$

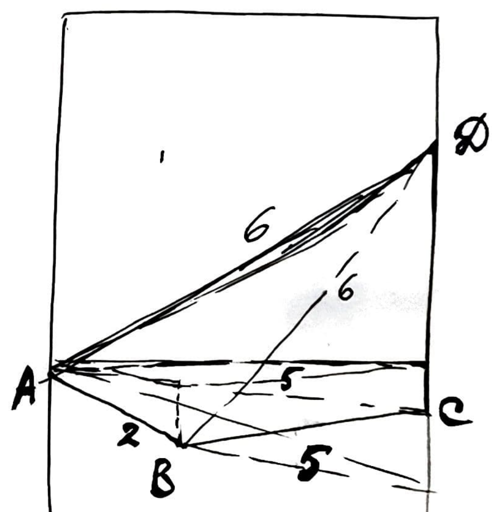
$$\boxed{S_M = 2S_Z = 2\arccos\frac{1}{4} - \sqrt{15}}$$





$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$4R = \frac{abc}{S}$$

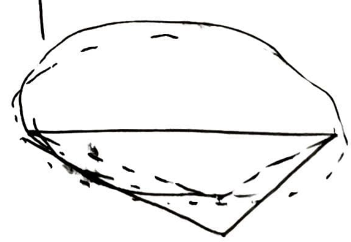


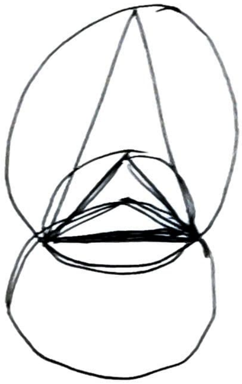
$$6 < 5 + CD$$

$$\underline{CD > 1}$$

$$\cancel{5 < 6 + CD}$$

$$\cancel{CD > -1}$$



$$\frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = \frac{a^3}{\cancel{4}R}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \leq 2$$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$D = 9 + 2$

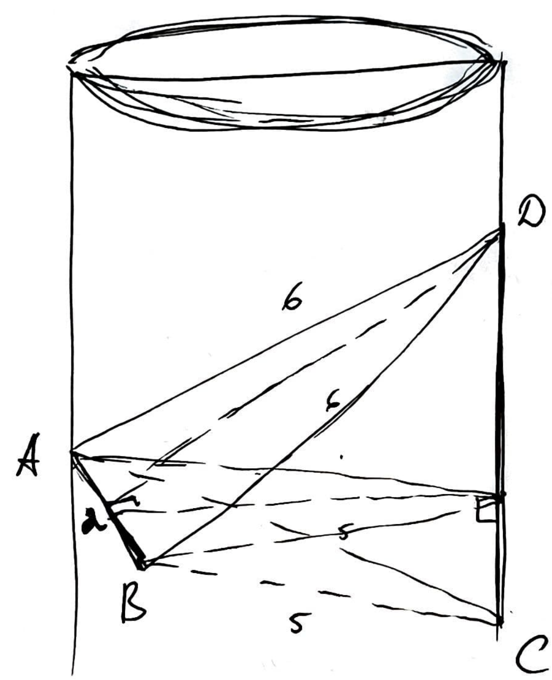
$a_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$

$2 < 3$

$4 < 7$

$8 < 10$

$$\begin{array}{r} \times\, 3,5 \\ 3,5 \\ \hline 1,75 \\ +\,10,5 \\ \hline 1225 \end{array}$$



$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103770**

ID профиля: **98833**

Вариант 17

5

<u>Чистовик №1</u>

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$$

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$$

$5x-1=a$

$4x+1=b$

$\frac{x}{2}+2=c$

ОДЗ: $\begin{cases} a>0, & a\neq 1 \\ b>0, & b\neq 1 \\ c>0, & c\neq 1 \end{cases}$

На ОДЗ:

$\cancel{\left(\frac{1}{2}\log_a b\right)\left(2\log_b c\right)\left(\log_c a\right)=1}$

~~Произв-е этих чисел равно единице.~~

$$2\log_a b \cdot 2\log_b c \cdot \log_c a = 4 \ !$$

Произв-е этих чисел равно 4. Пусть два из них равны y, а 3-е — $y-1$.

$$y^2(y-1)=4$$

$$y^3-y^2-4=0$$

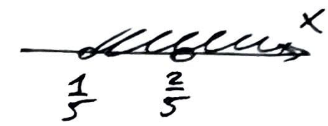
$y=2$ – реш-е

$$\begin{array}{r|l} y^3-y^2-4 & y-2 \\ \hline -(y^3-2y^2) & y^2+y+2 \\ y^2-4 & \\ -(y^2-2y) & \\ 2y-4 & \\ -(2y-4) & \\ 0 & \end{array}$$

$D=1-4\cdot 2<0$

$\Rightarrow$ В этом случае искомые числа равны $2,\ 2,\ 1.$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq \frac{2}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$



Рассм. 3 случая: $\begin{cases} \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1 \\ \log_{\sqrt{5x-2}}(4x+1)=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \\ \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}} \ldots=1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \end{cases}$.

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

$5x-1=4x+1$

$x=2\in$ ОДЗ

$\Rightarrow \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_9 9=1$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_3 3^2=2$

$\Rightarrow \boxed{x=2}$

2) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1$

$\frac{x}{2}+2=5x-1$

$x+4=10x-2$

$9x=6 \Rightarrow x=\frac{2}{3}\in$ ОДЗ

Чистовик №3

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{\frac{7}{3}}\frac{11}{3} \neq 2$$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ — не реш-е.

3) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 1$

$\sqrt{5x-1} = 4x+1$

$5x-1 = 16x^2+8x+1$

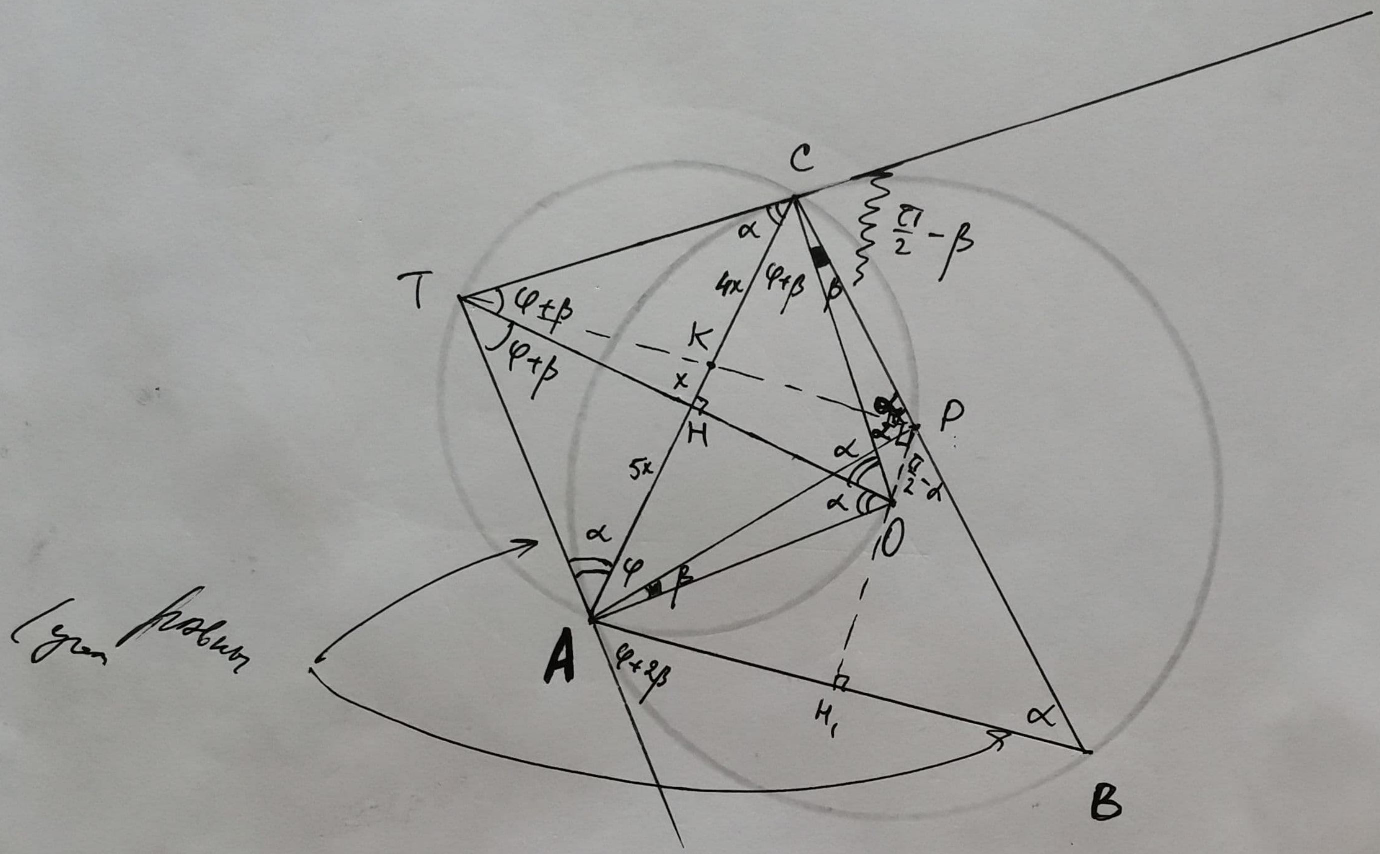
$16x^2+3x+2=0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot}}{}$ $D<0$

$\Rightarrow$ $x=2$ — единственный, при кот. усл-е вып-се

Ответ: $x=2$

⑥ Чистовик № 4



1) $AO \perp AT$

$\Rightarrow TO$ — диаметр 2ой окр-сти $\Rightarrow \angle TPO = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \angle APH_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (см рис)

$\Downarrow$

$\triangle APB$ — р/б (биссектриса PH_1 — ещё и высота)

$\Rightarrow KP \parallel AB$

~~$\triangle APB$ ...~~

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}\,\underline{CP}\cdot AP\cdot \sin 2\alpha = 4+6 = 10$

$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AP\cdot \underline{PB}\cdot \sin 2\alpha$

$\left.\begin{array}{l} AH = CH \\ \frac{AK}{CK} = \frac{S_{AKO}}{S_{CKO}} = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow AH : HK : KC = 5 : 1 : 4$

$\triangle KCP \sim \triangle ACB$: $\frac{KP}{AB} = \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{KCP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$\boxed{S_{ABC} = \frac{9}{4}\cdot 4 = 9}$

Чистовик №5

(4)

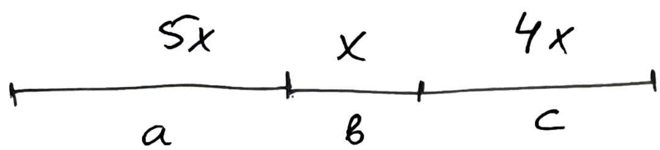
$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 2\cdot 3 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ В одном из чисел „2" или „3" точно не может встретиться более одного раза

$\cancel{\ast}$

$6 : 4$

$3 : 2$



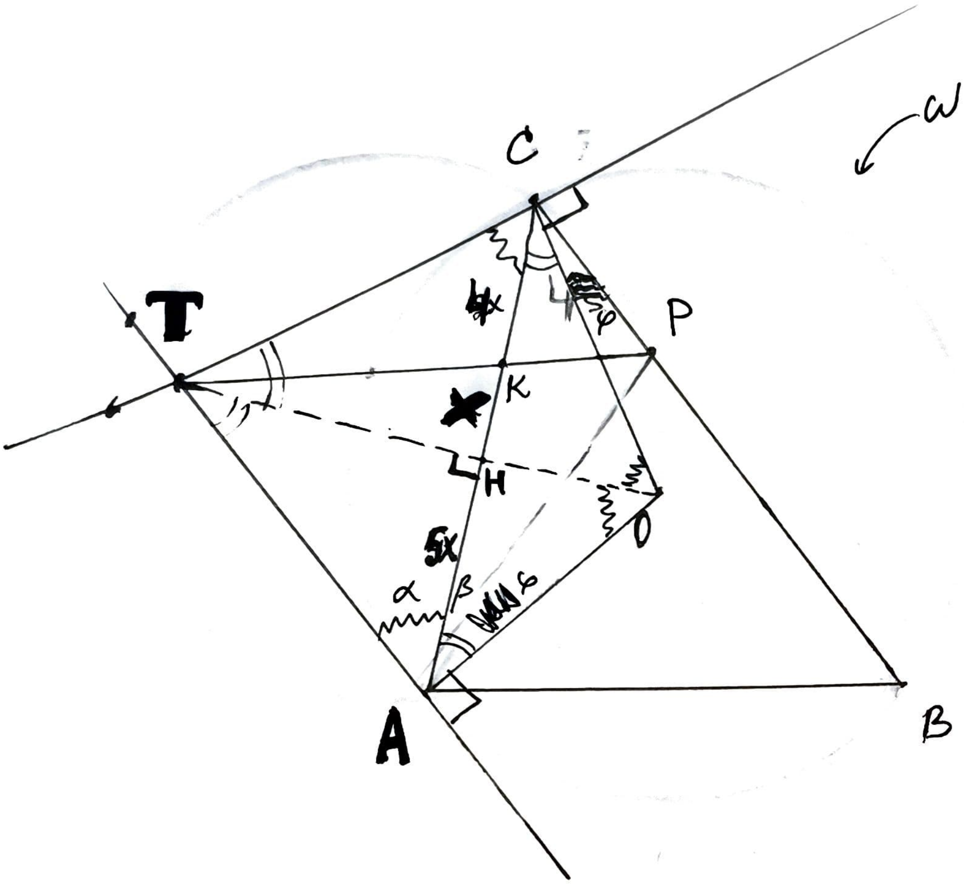
$\underline{a} = b + c$

$2(a+b) = 3c$

$a = b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b$

$\frac{1}{3}a = \frac{5}{3}b$

$\frac{b}{a} = \frac{1}{5}$



$S_{\triangle APK} = 6$

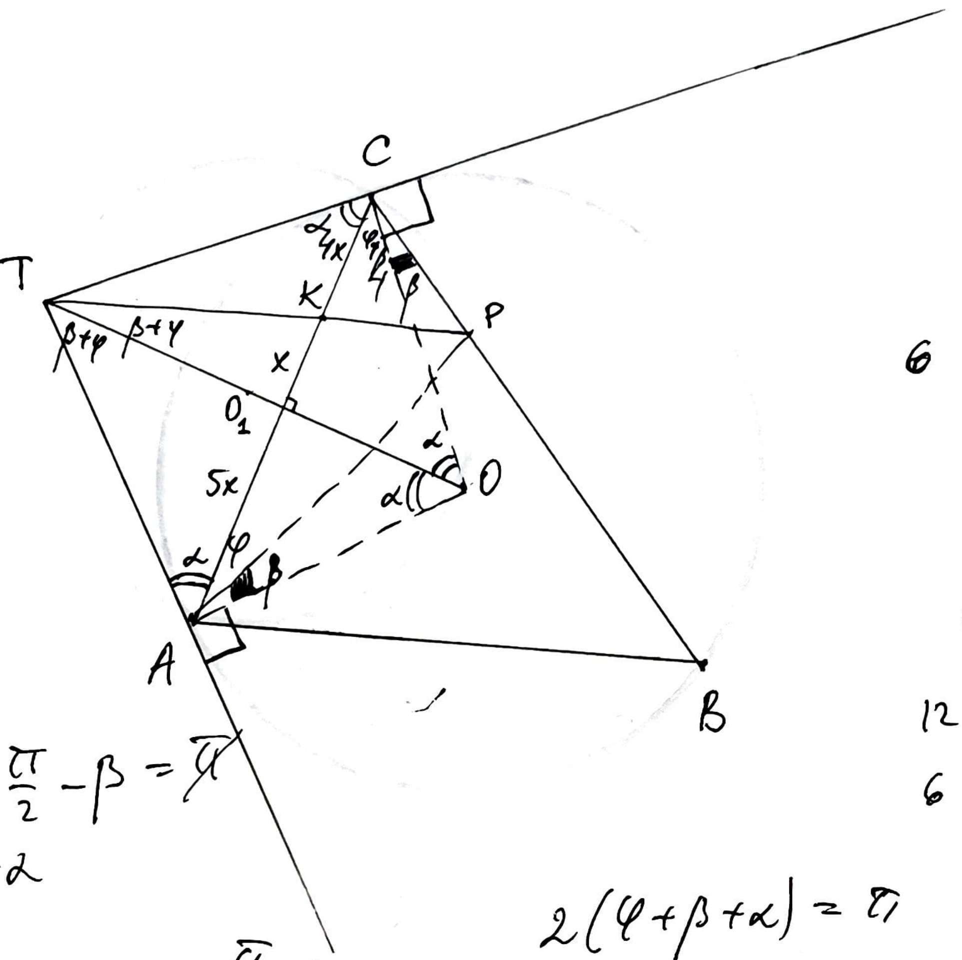
$S_{\triangle CPK} = 4$

a) $S_{\triangle ABC} - ?$

$\frac{\pi}{2} - \varphi = \alpha + \beta$

$\beta + \varphi$

$\frac{\pi}{2} - \varphi - 2\beta = \alpha$



6 $\quad$ $2\cdot 3$

2

5

12

6

$\cancel{\pi} - 2\alpha + \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta = \cancel{\pi}$

$\frac{\pi}{2} = \beta - \alpha$

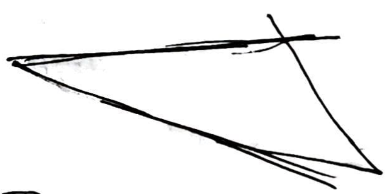
$2(\beta+\varphi) = \alpha + \varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$

$2\beta + \varphi = \alpha$

$2(\varphi+\beta+\alpha) = \pi \quad 2\cdot 3$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi - 2\beta + \beta$

2



$2\varphi + 3\beta + \frac{\pi}{2} - \varphi - 2\beta$

$\alpha + 2\varphi + \cancel{2\beta} + \beta + \frac{\pi}{2} - \varphi - \cancel{2\beta} = \pi$

$\alpha + \varphi + \beta = \frac{\pi}{2}$

$2\varphi + 2\beta = \frac{\pi}{2} - \beta$

$2\varphi + 3\beta = \frac{\pi}{2}$

$4\varphi + 6\beta = \pi$

$2\varphi + 2\beta + 2\alpha = \pi$

$2\varphi + 2\beta = 2\alpha$

$2\varphi + 4\beta = 2\alpha$

$\frac{1}{2} \log_a b$

$\log_b c^2 = 2 \log_b c$

$\log_c a$

$\frac{1}{2} \cdot 2 \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a =$

$= \frac{1}{\log}$

$y^3 - y = 4$

$y^3 - y^2 - 4 = 0$

$y^2(y-1)$

$y^3 - y^2 - 4 = 0$

$-8 - 4 - 4 = 0$