Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103757**

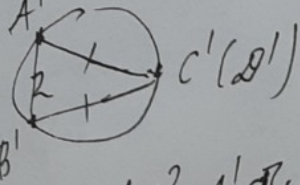
ID профиля: **823580**

Вариант 17

Чистовик.

№2

Введём коорд. прямую, параллельную оси цилиндра. A, B, C, D имеют коорд. a, b, c, d. Теперь спроецируем тетраэдр на основание (C и D спроецируются в одну точку, т.к. CD парал. оси цилиндра):



Тогда зная расстояния между проекциями и расстояния ~~мы~~ вдоль нашей коорд. прямой, то по т. Пифагора можно найти расст. между вершинами тетраэдра:

$AC^2 = A'C'^2 + (a-c)^2$; $BC^2 = B'C'^2 + (b-c)^2$; $AD^2 = A'D'^2 + (a-d)^2$

$BD^2 = B'D'^2 + (b-d)^2$; $AB^2 = A'B'^2 + (a-b)^2$; $CD^2 = (c-d)^2$

$AC^2 - AD^2 = -11 = (a-c)^2 - (a-d)^2 = (d-c)(2a-c-d)$

$BC^2 - BD^2 = -11 = (b-c)^2 - (b-d)^2 = (d-c)(2b-c-d)$

$CD \neq 0 \Rightarrow d-c \neq 0 \Rightarrow 2a-c-d = 2b-c-d \Rightarrow \underline{a=b}$

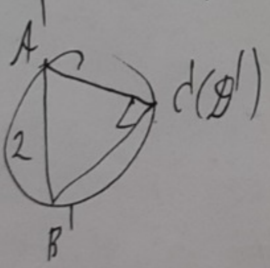
$\Downarrow$

$A'C'^2 = AC^2 - (a-c)^2 = BC^2 - (b-c)^2 = B'C'^2 \Rightarrow A'C' = B'C'$

$AB = A'B'^2 + (a-b)^2 = 2 \Rightarrow A'B' = 2$

Пусть $\angle A'C'B' = \alpha \Rightarrow 2R = \frac{2}{\sin\alpha}$ (т. синусов) $\Rightarrow R = \frac{1}{\sin\alpha}$

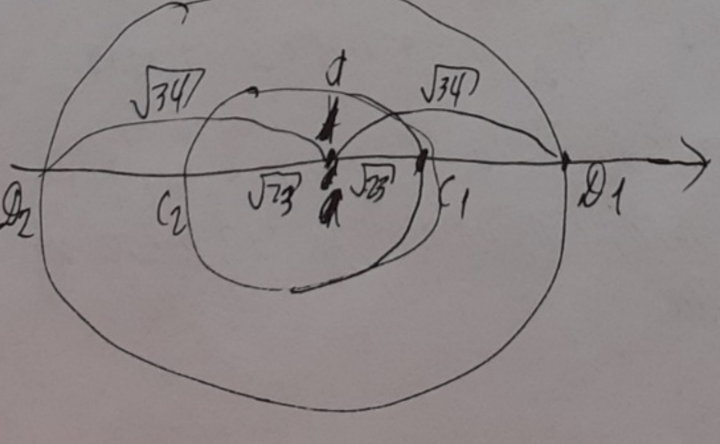
min R при max $(\sin\alpha)$, т.е. $\sin\alpha = 1$, $\alpha = 90°$



Тогда $A'C'^2 = B'C'^2 = 2$

$\Downarrow$

$(a-c)^2 = 23$; $(a-d)^2 = 34$



Если c и d располагаются по одну сторону от a, то $CD = d-c = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Если по разные стороны то $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

Чистовик.

№1 Пусть d – разность прогрессии, $d>0$ по усл. Также a_1 и d – целые числа.

$a_n = a_1+(n-1)d$ (т.к. прогрессия арифмет.)

$d_6 \cdot a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2+16a_1d+55d = t$

$a_7 \cdot a_{11} = (d_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2+16a_1d+60d$

$S = a_1+\ldots+a_{10} = 10a_1+d(1+\ldots+9) = 10a_1+45d$

По условию, $t > S+1 \Rightarrow t \geq S+2$

А также $S+17 > t+5d \geq 5d+S+2$

Тогда $17 > 5d+2$, где $d \in \mathbb{Z}; d>0$

$d < \frac{15}{5} = 3$. Тогда d либо 1, либо 2.

1) $d=1$

$a_6 \cdot a_{12} = a_1^2+16d+55$; $a_7 \cdot a_{11} = a_1^2+16d+60$; $S = 10a_1+45$

Необходимо след.: $a_1^2+16d+55 > 10a_1+46$ и $a_1^2+16d+60 < 10a_1+62$

Это равносильно: $2 > d_1^2+6d > -9 \Leftrightarrow 11 > (a_1+3)^2 > 0$

a_1+3 – целые $\Rightarrow (a_1+3)^2$ – точн. квадрат

$(a_1+3)^2=1$; $(a_1+3)^2=4$; $(a_1+3)^2=9$

$\Downarrow$

$a_1=-2$; $d_1=-4$; $a_1=-5$; $d_1=-1$; $d_1=0$; $a_1=-6$

2) $d=2$

$a_6 \cdot a_{12} = a_1^2+32a_1+110$; $a_7 \cdot a_{11} = a_1^2+32a_1+120$; $S = 10a_1+90$

Необходимо: $a_1^2+32a_1+110 > 10a_1+91$ и $a_1^2+32a_1+120 < 10a_1+107$

$\Updownarrow$

$-13 > a_1^2+22a_1 > -19 \Leftrightarrow 108 > (a_1+11)^2 > 102$

$(a_1+11)^2$ – точный квадрат, но между 102 и 108 их нет.

При $d=2$ нет решений.

Ответ: 0; −1; −2; −4; −5; −6

①

Чистовик.

№3

$a^2+b^2 \leq \min(2a+2b, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \leq 2 \\ a^2+b^2 \leq 2a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \leq 2 \\ (a-1)^2 \cancel{b} + (b-1)^2 \leq 2 \end{cases}$

(a,b) – множество точек, которые лежат в пересечении окружностей радиуса $\sqrt{2}$ в точках $(0,0)$ и $(1,1)$.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2 \Rightarrow$ ~~окруж~~ (a,b) лежит внутри окруж. радиуса $\sqrt{2}$ с центром в (x,y). Необходимо найти (x,y), что существует a и b ~~выполнят~~ся, что ~~и~~ (a,b) лежит в указанных выше 3-х окружностях.

[illegible]

a_1 d $a_1, d \in \mathbb{Z}$ $d > 0$

$S = a_1 + (a_1 + d) + .. + (a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$

$a_6 = a_1 + 5d;\ a_{12} = a_1 + 11d;\ a_7 = a_1 + 6d;\ a_{11} = a_1 + 10d$

$a_6 \cdot a_{12} = a_1^2 + 16da_1 \overset{t}{\overset{\shortparallel}{+}} 55d > S + 1$

$a_7 \cdot a_{11} = a_1^2 + 16da_1 + 60d < S + 17$

$\overset{\shortparallel}{t + 5d}$

~~$t + 5d > S + 1$~~

$t > S + 1$

$S + 1 + 5d < t + 5d < S + 17$

$5d + d^2 < 17$

$d = 1$ $d = 2$

$t = a_1^2 + 16a_1 + 55 > S + 1 = 10a_1 + 46$ и

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$(a_1 + 3)^2 > 0$

$a_1 \neq -3$

$2 > a_1^2 + 6a_1 > -9$

$11 > (a_1 + 3)^2 > 0$

$a_1 = -4;\ d = 1$

$S = 5$

$a_6 = 1;\ a_{12} = 7$

$2 \cdot 6$

$t \geq S + 2$

$a_1^2 + 32a_1 + 110 > S + 1$

$a_1^2 + 32a_1 + 120 < S + 17$

$a_1^2 + 32a_1 + 110 > 10a_1 + 91$

$a_1^2 + 22a_1 + 19 > 0$

$a_1^2 + 32a_1 + 120 < 10a_1 + 107$

$a_1^2 + 22a_1 + 13 < 0$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$D = 36 + 8 = 44$

$\pm\sqrt{11} - 3$

$1 > \sqrt{11} - 3 > 0$

$-7 < -\sqrt{11} - 3 < -6$

$-7 > \sqrt{11} - 3 > 0$

$-6, -5, -4, -2, -1, 0$

$(a_1 + 3)^2 = 1, 4$

$a_1 = -2;\ -4$

$-1, -5$

$0, -6$

Черновик.

$d=2$

$S=10a_1+\overset{90}{\cancel{45d}}$

$a_1^2+16d\overset{t}{\overset{\shortparallel}{a_1}}+55d>S+1$ и $a_1^2+16da_1+60d<S+17$

$t=a_1^2+32a_1+110>10a_1+91$ | $a_1^2+32a_1+120<10a_1+107$

4.19 $a_1^2+22a_1+19>0$ $a_1^2+22a_1+13<0$

$D=484-76=408$ $D=484-52=432$

$\pm\cancel{2}\sqrt{104}-11$ $\pm\sqrt{108}-11$

$-1<\sqrt{104}-11<0$

$-22<-\sqrt{104}-11<-21$ $[-21,\ -1]$

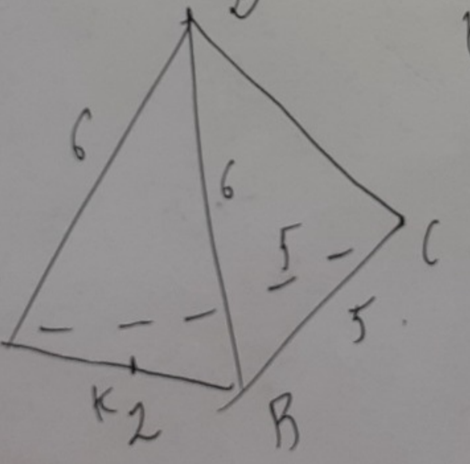
$(-\infty;-22]\cup[0,+\infty)$

$-13>a^2+22a>-19$

$108>(a+11)^2>102$

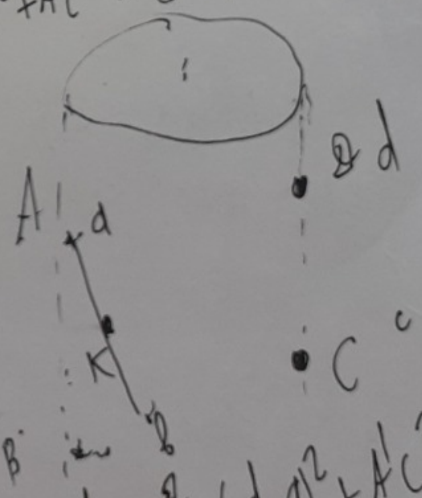
$\frac{2}{\sin\alpha}=2R$

$R=\frac{1}{\sin\alpha}$



$AC=BC$

$\overset{\shortparallel}{(d-c)^2}+A'C^2=(b-c)+B'C^2$

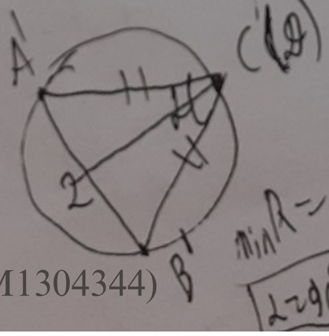


$36=(d-b)^2+B'C^2$

$25=(c-b)^2+B'C$

$11=(d+c-2b)(d-c)$

$\boxed{a=b}$



$\min R=\frac{1}{\sin\alpha}$

$\boxed{\alpha=90^\circ}$

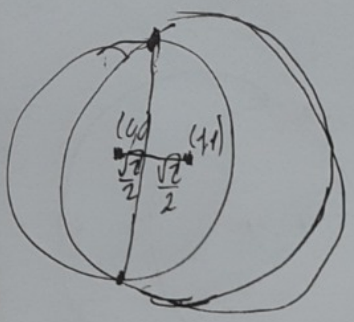
$36 = (d-a)^2+A'C^2$

$25=(c-a)^2+A'C^2$

$11=(d+c-2a)(d-c)$

$A'B'=AB=2$ $d^2=c^2$

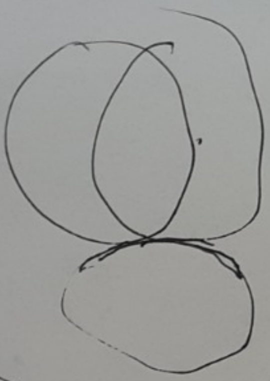
Черновик,

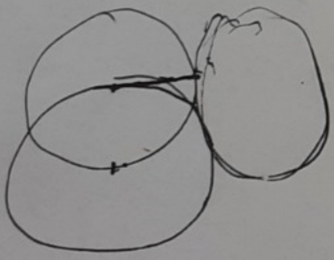


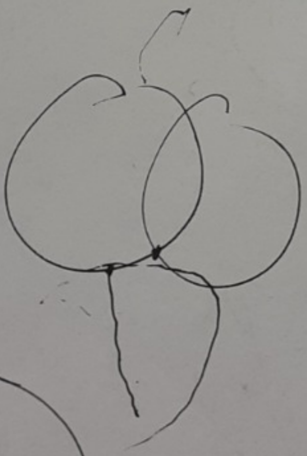
$\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360} - \cancel{R}\, 4 \sin\alpha$

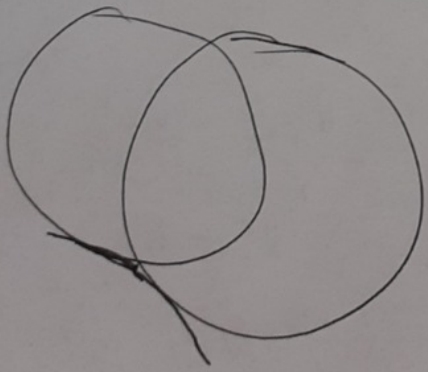
$\sin\beta = \frac{1}{4}$

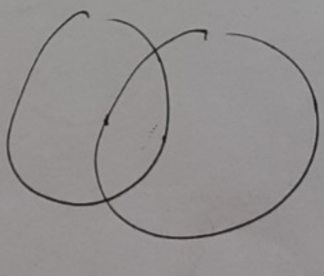
$\frac{1}{4}$; $\frac{\sqrt{15}}{4}$











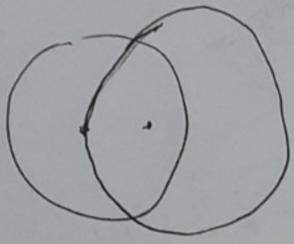
D

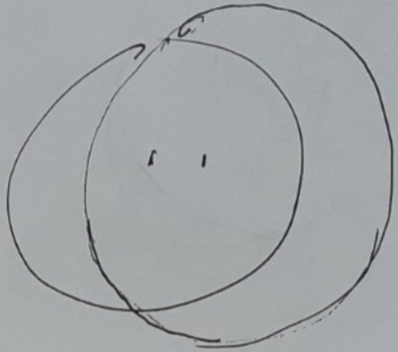
$(a-c)^2+A^2c^2=(b$

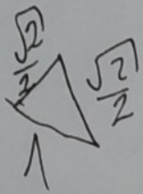
Черновик,

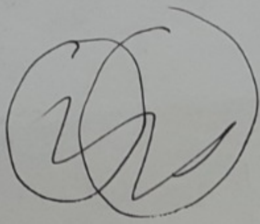
$a^2+b^2\le 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$





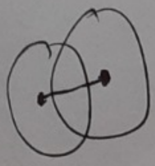


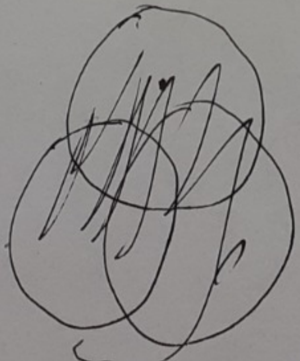


(a,b)

$\bullet (x,y)$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 2\\ a^2+b^2\le 2\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2\end{cases}$$





(x,y) $(0,0)$

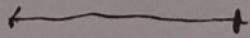
$x^2+y^2\le 8$

$(x-1)^2+(y-1)^2\le 8$

$(a-x)^2+(b-y)^2\le 2$

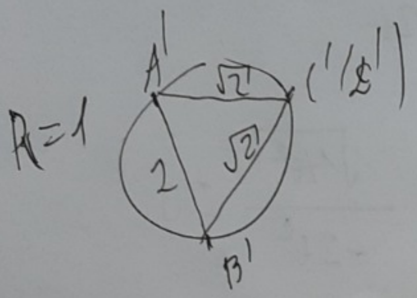
$a^2+b^2\le 2$

$x^2+y^2=2ax+2by$



Черновик.

$A'C^2=2$



$36=(d-a$

$(d-a)^2=34$

$(c-a)^2=23$

$d-a=34$

$c-a=23$

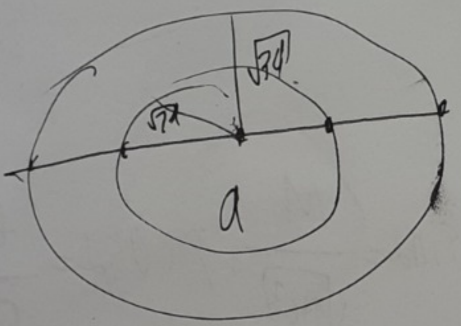
$d-c=11$

$11=(d+c-2a)(d-c)$

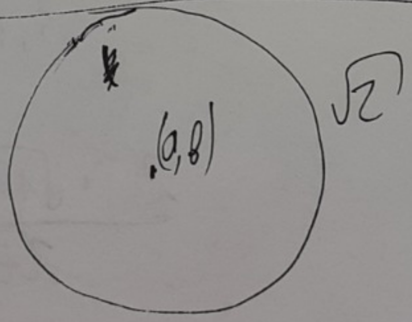
$d+c-2a=1$

$a=\frac{c+d}{2}$

$\sqrt{34}\pm\sqrt{21}$

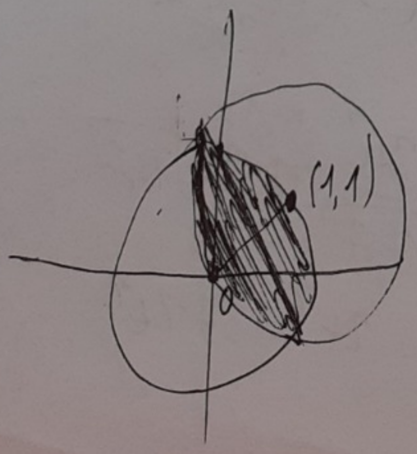


$a^2+b^2<2$



$$\begin{cases} a^2+b^2\le 2 \\ a^2+b^2\le 2a+2b \end{cases}$$

1)



$(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$

$x^2+y^2=2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

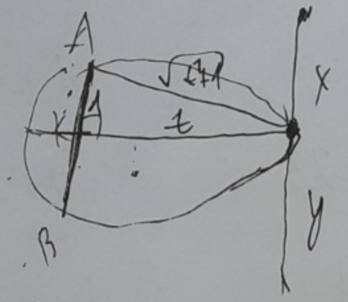
$x+y=1$ $\quad$ ~~2~~ $xy=-\frac{1}{2}$

$t^2-t-\frac{1}{2}=0$

$2t^2-2t-1=0$

Черновик.

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{t}\right)'=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$

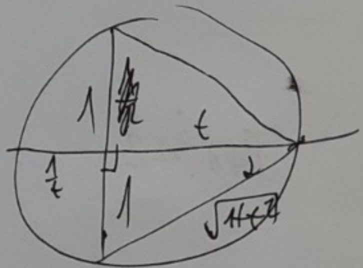


$\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{2t}=$

$=\frac{1\cancel{t}}{2\sqrt{1+t^2}}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{-2t^2}$ 20

$\left(\sqrt{1+t^2}\right)'=\frac{\cancel{1}t}{\cancel{2}\sqrt{1+t^2}}$

$x^2+t^2=36$
$t^2+y^2=25$
$x^2-y^2=11$



$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos\alpha=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cancel{1}\cos^2x}{\cos^2x}$

$\sin2\alpha=\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{1+t^2}}{\cancel{2}t}=2R$

$\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{2t}\right)'=$

$R=\frac{\sqrt{1+t^2}}{2t}$

$=\frac{\frac{2t^2}{\sqrt{1+t^2}}-2\sqrt{1+t^2}}{4t^2>0}=0$

$\frac{2t^2}{\sqrt{1+t^2}}\overset{<}{\cancel{2}}2\sqrt{1+t^2}$

$2t^2-2(1+t^2)=0$

$2t^2<2+2t^2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103757**

ID профиля: **823580**

Вариант 17

Чистовик.

№ 4

Понятно, что в канонической разложение a,в,c встречаются только 2 и 3 (иначе НОК делился бы на другие простые). Заметим, что 2 входит в a,в,c в степени из промежутка [1, 15]. (т.к. в НОД — 2^1, а в НОК — 2^{15}). Очевидно, что у одного из чисел степень вхождения — 1 (иначе НОД ⋮ 2^2) и степень другого 2^{15} (иначе НОД ⋮̸ 2^{15}). Если степень 3-его числа $2 \le x \le 14$, то распределить степени 2 между a,в,c можно $3! = 6$ вариантами. Таких x — 13, т.е. $13 \cdot 6 = 78$ вариантов. Если $x = 1$ или $x = 15$, то кол-во вариантов $\frac{3!}{2!} = 3$. Итого, $78 + 2 \cdot 3 = 84$ способа распределить степени 2 между a,в,c. Аналогично посчитаем для тройки. Их степени будут ≥ 1 и ≤ 16. У одного будет 1-ая степень; у 2-ого — 16; у 3-его — y. Если $2 \le y \le 15$ (14 вар.), то распределить их между a,в,c $= 14 \cdot 6 = 84$. При $y = 1$ и $y = 16$ кол-во вариантов — 3. Итого, $84 + 2 \cdot 3 = 90$ вариантов. При таком распределении минимальная степень вхождения 2 и 3 в a,в,c — 1, а максим. — 15 у 2; 16 и 3. Т.е., условие выполняется. Кол-во решений:

$84 \cdot 90 =$ ~~[illegible]~~ $\boxed{7560}$

Ответ: 7560

①

Чистовик,

№5

Пусть $a=\sqrt{5x-1}$; $b=4x+1$; $c=\frac{x}{2}+2$. Тогда наши числа:

$\log_a b$; $\log_b c^2$; $\log_c a^2$. $a,b,c>0$, иначе нельзя определить логарифм.
и $a,b,c\neq 1$

1) $\log_a b=\log_b c^2=\log_c a^2+1=t$

$a^t=b$; $c^2=b^t=a^{t^2}\Rightarrow c=a^{\frac{t^2}{2}}$; $a^2=c^{t-1}=a^{\frac{t^2(t-1)}{2}}$

т.к. $a\neq 1$, то $2=\frac{t^2(t-1)}{2}\Rightarrow t^3-t^2-4=(t-2)(t^2+t+2)=0$

$t^2+t+2=t^2+t\cdot\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$

$\Downarrow$

$\underline{t=2}$

$b^2=c^2\Rightarrow b=c$ (т.к. $b,c>0$) $\Rightarrow 4x+1=\frac{x}{2}+2\Rightarrow 3{,}5x=1$

$\Downarrow$

$x=\frac{2}{7}$

$a^2=b=\frac{15}{7}\leftarrow b=c=\frac{15}{7}$

Но $a^2=5x-1=\frac{3}{7}$

Значит, нет таких x.

2) $\log_a b+1=\log_b c^2=\log_c a^2=t$

$a^{t-1}=b$; $c^2=b^t=a^{t(t-1)}\Rightarrow c=a^{\frac{t(t-1)}{2}}$; $a^2=c^t=a^{\frac{t^2(t-1)}{2}}\Rightarrow t=2$ (см. выше)

$a=b=c$ (т.к. $a,b,c>0$). Т.к. $b=c$, то $x=\frac{2}{7}$ (см. выше), но тогда

$a=\sqrt{\frac{3}{7}}$. Значит, нет таких x

3) $\log_a b=\log_b c^2+1=\log_c a^2=t$

$a^t=b$; $c^2=b^{t-1}=a^{t(t-1)}\Rightarrow c=a^{\frac{t(t-1)}{2}}$; $a^2=c^t=a^{\frac{t^2(t-1)}{2}}\Rightarrow t=2$ (см. выше)

Тогда $b=a^2=c^2$. $4x+1=5x-1\Rightarrow \underline{x=2}$ $\underline{b=9}$; $a=3$

$c=\frac{x}{2}+2=3\Rightarrow c^2=9=b$, тогда $b=a^2=c^2$, т. е. условие выполняется

($\log_a b=2$; $\log_b c^2=1$; $\log_c a^2=2$).

Таким образом, условие выполняется только при $x=2$.

Ответ: 2

②

Черновик.

$a = \sqrt{5x-1}$

$b = 4x+1$

$c = \frac{x}{2}+2$

$\overset{t}{\log_a b}; \overset{t}{2\log_b c}; {}^2\overset{t-1}{2\log_c a^2}$

~~$\log_a b = 2\log_b c = t$~~

~~$1 = 2\cdot\log_b c\cdot\log_b a$~~

~~$2\log_c a^2 + \log_c c = \log_c a^2 c = t = \log_b c^2$~~ $\shortparallel$

$b = a^t$

$c^2 = b^t = (a)^{t^2}$

$c = (a)^{\frac{t^2}{2}}$

$a^2 = c^{t-1} = a^{\frac{t^2(t-1)}{2}}$

$\shortparallel$ $t^2(t-1) = 4$

0

$t^3 - t^2 - 4 \;\Big|\; \frac{t-2}{t^2+t+2}$

$\boxed{t=2}$

$c^1 = a^2$

$\frac{x}{2}+2 = 5x-1$

$x+4 = 10x-2$

$6 = 9x$

$\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$\underline{b = c = a^2}$

$4x+1 = \frac{x}{2}+2$

$3{,}5x = 1$

$x = \frac{2}{7}$

$b = c = \frac{15}{7}$

$a = \sqrt{\frac{15}{7}}$

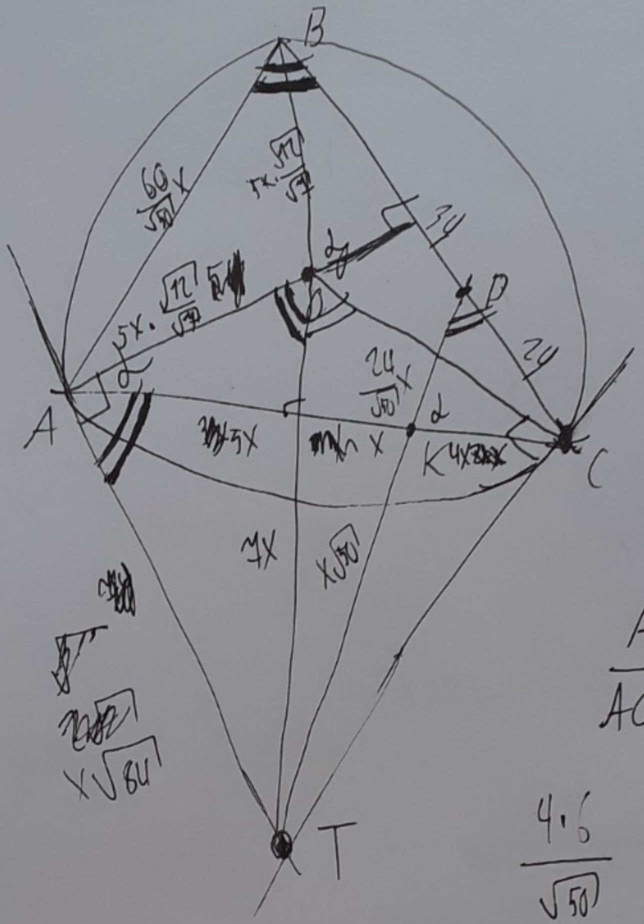
$a = \sqrt{\frac{7}{3}}$ $a = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$b = \frac{11}{3}$

$c = \frac{7}{3}$

Черновик

$\operatorname{tg} B = \frac{7}{5}$



$$\frac{AT}{AO} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{4\cdot 6}{\sqrt{50}}$$

$$\frac{x\sqrt{84}}{AO} = \frac{7}{5}$$

$$AO = \frac{5x\sqrt{84}}{7} = 5x\cdot\sqrt{\frac{12}{7}}$$

$5x = R\cdot\sin B$

$$\frac{96}{2\sqrt{50}}x^2\cdot\sin\alpha = 4$$

$$\sin\alpha\ \frac{8\sqrt{50}}{96x^2} = \frac{\sqrt{50}}{12x^2}$$

$$\frac{\cancel{a}b\cancel{c}}{4R} = \frac{\cancel{a}\cancel{c}\cdot\sin B}{2}$$

$$5x\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{50}}{12x^2}$$

$$AC = \underset{\underset{10x}{\shortparallel}}{b} = 2R\cdot\sin B$$

Черновик.

$\overset{t}{\log_a b}; \overset{t-1}{\log_b c^2}; \overset{t}{\log_c a^2}$

$b = a^t; c^2 = b^{t-1} = a^{t(t-1)}, c = a^{\frac{t(t-1)}{2}}$

~~$a = c^{\frac{t}{2}} = a^{t^2(t-1)}$~~

~~$t^2(t-1)=1$~~

~~$t^3 - t^2 = 1$~~

$a^2 = c^t = a^{\frac{t^2(t-1)}{2}}$

$t^2(t-1) = 4$

$\boxed{t=2}$

$c^2 = b = a^2;$

$b = 9; a = 3$

$\boxed{c=3}$

9

$4x+1 = 5x-1$

$\boxed{x=2}$

$\overset{t-1}{\log_a b}; \overset{t}{\log_b c^2}; \overset{t}{\log_c a^2}$

$b = a^{t-1}; c^2 = b^t = a^{t(t-1)}; c = a^{\frac{t(t-1)}{2}}; a^2 = c^t = \frac{t^2(t-1)}{2}$

$\boxed{t=2}$

$a = b = c$

$\frac{15}{7} = 4x+1 = \frac{x}{2}+2$

$3,5x = 1$

$x = \frac{2}{7}$

21103757 (U823580 M1304345)

Черновик.

НОД$(a,b,c)=6$

НОК$(a,b,c)=2^{15}\cdot3^{16}$

	a	b	c
2	α_1	α_2	α_3
3	β_1	β_2	β_3

$2^1 \quad 2^{15}\cdot 2^x$ для x 15 вар.

$3^1 \quad 3^{16}\cdot 3^y$

$x\neq1$ и $x\neq15$

$a,b,c>0$

$6\cdot13+3\cdot2=6\cdot14=84$

$6\cdot14+3\cdot2=6\cdot15=90$

$\sqrt{5x-1}=a$

$4x+1=b$

$\frac{x}{2}+2=c$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)^2$; $2\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\overset{t-1}{\log_a b}$, $\overset{t}{2\log_b c}$; $\overset{t}{2\log_c a}$

~~$\log_a b=\log_c a$~~

~~$\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_c a$~~

~~$\log_c b=\log_c^2 a$~~

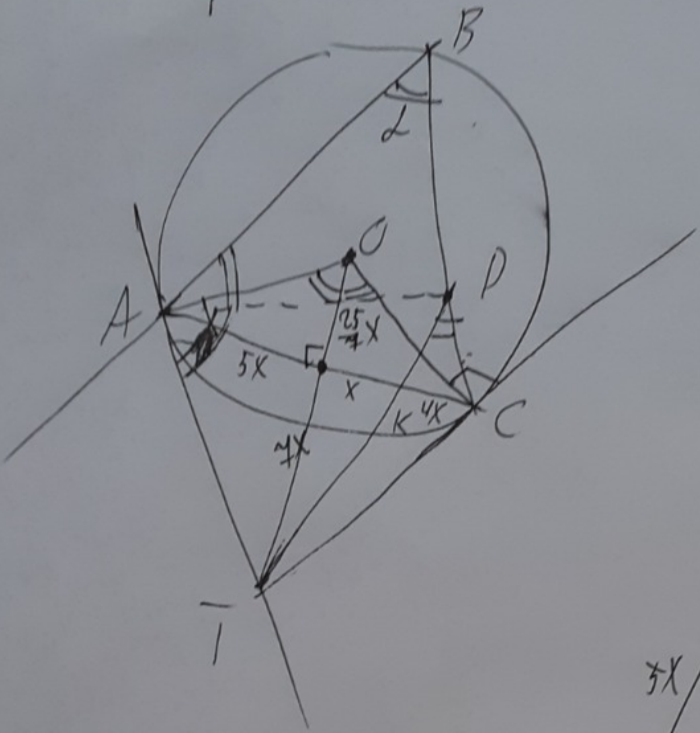
$\log_b c=\log_c a$

~~log~~ $\frac{1}{\log_c b}=\log_c a$

$\log_c a\cdot\log_c b=1$

$\log_a b+\log_a a=\log_a ab$

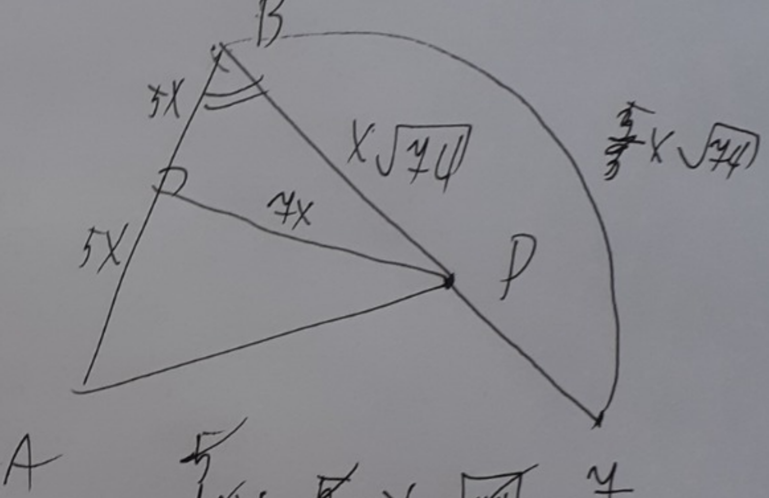
Чистовик.



$$r=\frac{7x+\frac{25}{7}x}{2}=$$

$$=\frac{74x}{14}=\frac{37x}{7}$$

$1+25$



$$\frac{\cancel{10}^{5}x\cdot\frac{5}{3}\cdot x\cdot\cancel{\sqrt{74}}\cdot\frac{7}{\cancel{\sqrt{74}}}}{\cancel{2}_{1}}=25$$

$\frac{7}{3}x=1$

$x=\frac{3}{7}$

$tg\,\alpha=\frac{7}{5}$

$$\cos\alpha=\frac{5}{7}\sin\alpha$$

$$1=\sin^2\alpha\cdot\left(1+\frac{25}{49}\right)=\frac{74}{49}\cdot\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha=\frac{49}{74}$$

$$\sin\alpha=\frac{7}{\sqrt{74}}$$

74×25

$37\cdot50$

1850

~~Черновик~~
Чистовик.

№6 (прод-е)

Тогда $AB = 10x = \frac{30}{7}$; $BC = \frac{5}{3}x \cdot \sqrt{74} = \frac{5}{7}\cancel{x} \cdot \sqrt{74}$

$\cos^2\alpha = \cancel{1-\sin^2}\ \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{74} \cdot \frac{7}{5}} = \frac{5}{\sqrt{74}}$

По т. косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$

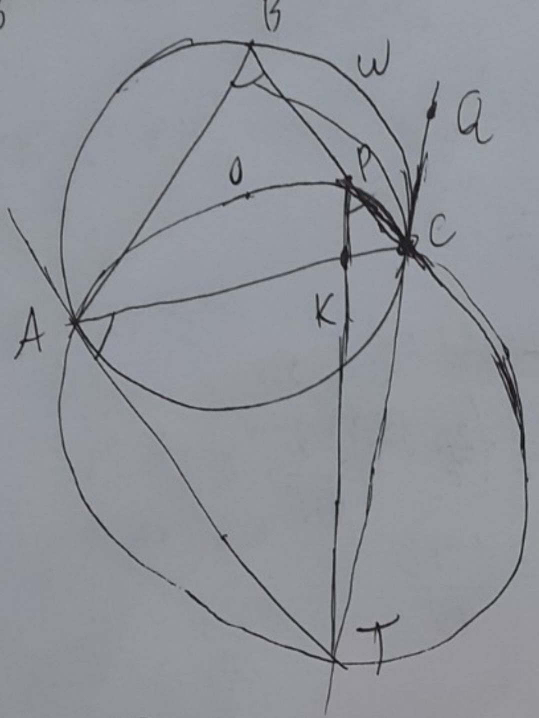
$AC^2 = \frac{900}{49} + \frac{1850}{49} - 2 \cdot \frac{30}{7} \cdot \left(\frac{5}{7} \cdot \sqrt{74}\right) \cdot \frac{5}{\sqrt{74}}$

$AC^2 = \frac{2750}{49} - \frac{1500}{49} = \frac{1250}{49}$

Ответ: $AC = \frac{25\sqrt{2}}{7}$

Чистовик.

№6



а) $AOPC$ – вписанный (по усл.)

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ (т.к. TA и TC – кас.)

$\Downarrow$

$AOCT$ – вписан. (сумма прот. углов 180°)

Тогда на оп. окр. $\triangle AOC$ лежат точки P и T. $\Rightarrow A, O, P, C, T$ лежат на одной окруж.

$\angle CPT = \angle CAT$ (т.к. T, A, P, C леж. на одной окр.)

$\angle CAT = \angle ABC$ (т.к. AT – кас.)

$\Downarrow$

$AB \parallel PT$ (т.к. $\angle ABC = \angle TPC$)

Тогда $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ (по двум углам)

$\Downarrow$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2, \quad \frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{AK+KC}{KC} = \frac{5}{2}$$

$\Downarrow$

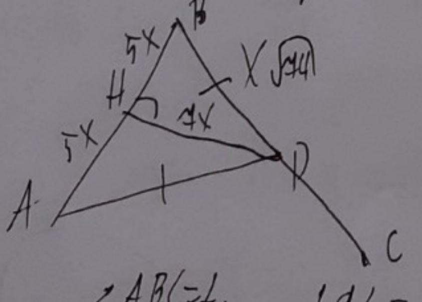
$$S_{ABC} = S_{KPC} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \underline{\underline{25}}$$

б) $\angle BAT = \angle ABC + \angle BAC$

$\angle PAT = \angle PCQ$ (т.к. A, P, C, T лежат на одной окр.; $Q \in CT$ за т. C)

$\angle PCQ = \angle BAC$ (т.к. CQ – кас.) $\Rightarrow \angle \overset{BA}{\cancel{AB}}T - \angle PAT = \angle BAP = \angle ABC$

т.е. $\triangle ABP$ – равнобедр., PH – высота, и медиана



Пусть $HP = 7x \Rightarrow AH = BH = 5x$ ($tg\angle ABC = \frac{7}{5}$)

$BP = x \cdot \sqrt{74}$ (т. Пифагора)

$$\frac{BC}{BP} = 1 - \frac{PC}{BC} = 1 - \frac{KC}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow BC = \frac{5}{3} x\sqrt{74}$$

$\angle ABC = \alpha$. $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{7}\sin\alpha \Rightarrow 1 = \sin^2\alpha\left(1 + \frac{25}{49}\right) = \frac{74}{49}\sin^2\alpha$

Тогда $\sin^2\alpha = \frac{49}{74}$; $\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}}$ (т.к. $0 < \alpha < 180$). $S_{ABC} = 25 = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\alpha}{2}$

$$50 = 10x \cdot \frac{5}{3} x\sqrt{74} \cdot \frac{7}{\sqrt{74}} \Rightarrow x = \frac{3}{7}$$

③