Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103756**

ID профиля: **341833**

Вариант 17

Чистовик Вариант 17.4.1 [redacted]

№1.

S – сумма 1-ых 10 членов возр. арифм. прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Известно: $a_6 a_{12} > S+1$

$a_7 a_{11} < S+17$.

Указать всевозмож. знач. a_1.

Решение: Запишем сумму арифм. прогрессии:

$$S = a_1 + \ldots + a_{10} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = n \cdot a_1 + \frac{(n-1)n}{2} d =$$

$$= 10a_1 + \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9}{\cancel{2}} d = 10a_1 + 45d \ (1),$$ где d – разность арифм. прогр.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Согласно усл-ю задачи и полученному нами (1), запишем:

$$\begin{cases} \underbrace{(a_1+5d)}_{a_6} \underbrace{(a_1+11d)}_{a_{12}} > S+1 \\ \underbrace{(a_1+6d)}_{a_7} \underbrace{(a_1+10d)}_{a_{11}} < S+14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1 & (2) \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1+45d+17 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 11a_1d + 5a_1d + 55d^2 - 10a_1 - 45d - 1 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1d + 6a_1d + 60d^2 - 10a_1 - 45d - 17 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 - 10a_1 > 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 - 10a_1 < 45d + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 55d^2 > 45d + 1 \\ a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 60d^2 < 45d + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1^2 - 2a_1(8d-5) - 55d^2 < -45d - 1 & (2^*) \\ a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 60d^2 < 45d + 14 & (3^*) \end{cases}$$

$(2^*) + (3^*)$: $5d^2 < 16$

$$d^2 < \frac{16}{5}$$

$$-\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$$

По усл-ю задачи a_n – целые $\Rightarrow$ d тоже целые. Поскольку нам дана возр. арифм. прогрессия, то $d > 0$. Тогда $d = 1$.

Перепишем (2), (3) с учётом того, что $d = 1$:

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \qquad a_1 \neq -3 \quad (**) \\ (a_1 - (-3 - \sqrt{11})) \cdot (a_1 - (\sqrt{11} - 3)) < 0 \end{cases}$$

$$-3 - \sqrt{11} < a_1 < \sqrt{11} - 3 \qquad (*)$$

Найдём целые a_1 из $(*)$:

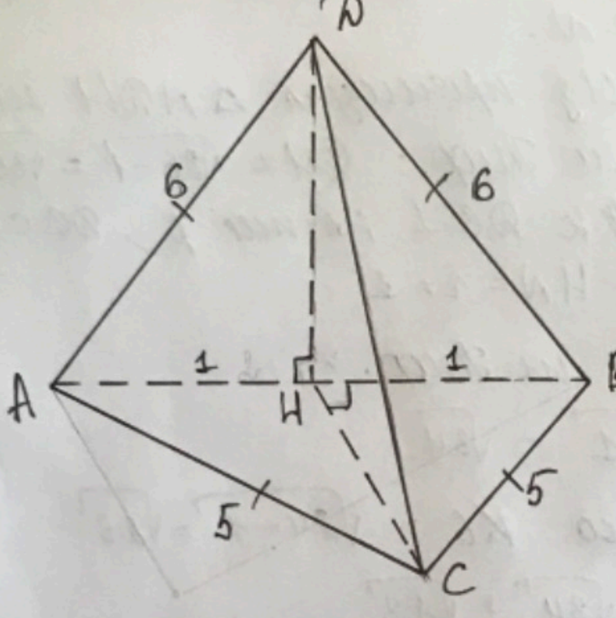
$a_1 = -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0$

Учтём $(**)$ $a_1 \neq -3$

Таким образом, окончательный ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

Чистовик ВАРИАНТ 14.4.1

№2.



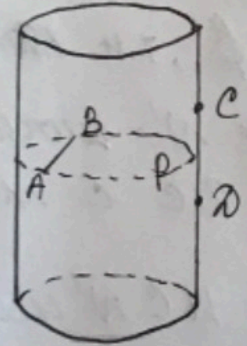
Дано:
$AB = 2$
$AC = CB = 5$
$AD = DB = 6$
Найти:
длина CD в тетраэдре?

Решение:

1) Рассм. р/б $\triangle ADB$

DH – высота и медиана
$\Rightarrow AH = HB = \frac{AB}{2} = 1$

Заметим, что $AB \perp$ пл-ти (DHC), т.к $AB \perp HC$, $AB \perp DH$



Т. C, D лежат на бок. пов-ти цилиндра

$CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow CD$ лежит на образующей бок. пов-ти

Т.к $AB \perp$ пл-ти $(DHC) \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow$

$\Rightarrow AB$ лежит в пл-ти, кот. перпендикулярна оси цилиндра.

Нарисуем сечение цилиндра этой пл-тью.

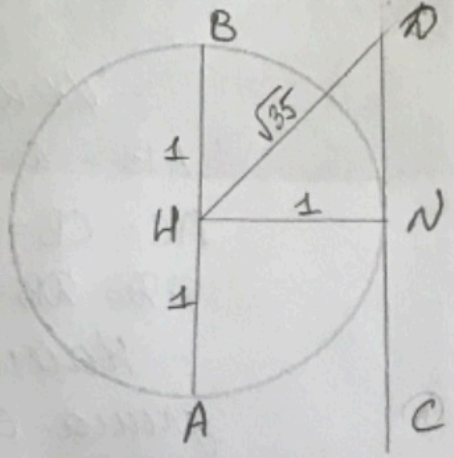
Получим круг, кот. параллелен основанию цилиндра

AB – хорда полученного круга.

т.к $AB = 2 \Rightarrow$ радиус основания $r \geq \frac{AB}{2}$

! хорда $\leq$ диаметра !

Итого, получим, что наименьший будет $r = 1$.



Рассм. два случая:

1) CD пересекает пл-сть р в т. N.

Из прямоугл. $\triangle ADH$ по т. Пиф.: $DH = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$

Т.к. $DC \perp$ пл-сти р, $DC \perp HN$ $\Rightarrow HN = r = 1$

Из прямоугл. $\triangle DHN$ по т. Пиф.:

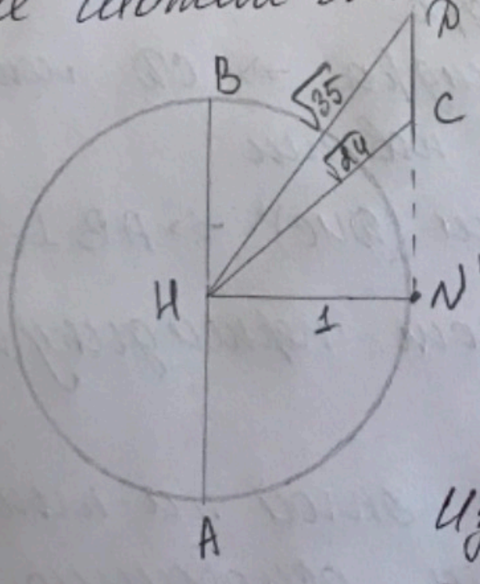
$$DN = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$$

Аналогично получаем, что $NC = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

Тогда $DC = DN + NC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

2) CD не пересек. р и C ближе к D

D не может быть ближе к пл-сти р, т.к. $AD > AC$



Обозначим через N' - точку пересеч. прямой DC с пл-тью р.

Из прямоугл. $\triangle HCN'$ имеем по т. Пиф.:

$CN' = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

Из прямоугл. $\triangle HDN'$ по т. Пиф.:

$DN' = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$

Заметим $DC = DN' - CN' = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Ответ: $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$ или $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Чистовик Вариант. 17. Ч. 1

№3

М - фигура на декартовой пл-ти

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2 & (1) \\ a^2 + b^2 \le \min(2a+2b, 2) & (2) \end{cases}$$

Найти: площадь фигуры М - ?

Решение: 1 Из 2) имеем:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 2 & (3) \\ a^2 + b^2 \le 2a + 2b & (4) \end{cases}$$

Преобразуем (4): $a^2 + b^2 \le 2a + 2b$

$$(a^2 - 2a + 1) - 1 + (b^2 - 2b + 1) - 1 \le 0$$

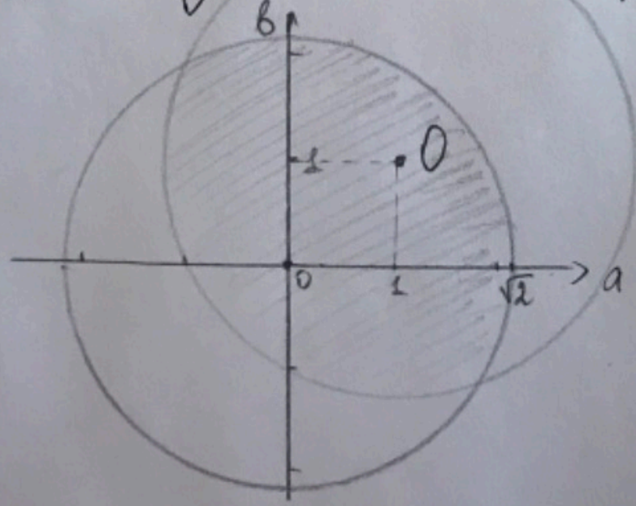
$$(a-1)^2 + (b-1)^2 - 2 \le 0$$

Мы получили окр-ть с центром в т. (1; 1) и радиуса $\sqrt{2}$ на пл-ти Oab

Посмотрим на (3): $a^2 + b^2 \le 2$

Это окр-ть с центром в т. (0; 0) и радиуса $\sqrt{2}$.

Нарисуем 2 получившиеся окружности



21103756 (U341833 M1299099)

Чистовик

② Запишем снова (1):

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$$

Окр-ть с центром в т. $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$ на пл-ти Oxy.

Вывод: M - мн-во, полученное у объединения окр-ей. Центры $(a;b)$ лежат в O (см. рис.)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103756**

ID профиля: **341833**

Вариант 17

Чистовик ВАРИАНТ 17.4.2

№4.

$$НОД\ (a;b;c) = 6$$

$$НОК\ (a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16}$$

1) По усл-ю имеем

$a = 2^{k_1}\cdot 3^{m_1}$ $b = 2^{k_2}\cdot 3^{m_2}$

$c = 2^{k_3}\cdot 3^{m_3}$

Хотя бы одно $k_i = 1$ и хотя бы одно $m_i = 1$ иначе получим $НОД(a,b,c) \neq 6$

Более того заметим, что хотя бы одно $k_j = 15$ и хотя бы одно $m_j = 16$ иначе $НОК(a,b,c) \neq$ $\neq 2^{15}\cdot 3^{16}$.

2) Выберем одно из k_1, k_2, k_3 так, чтобы $k_i = 1$ (3 способа), также из оставшихся выберем одно $k_j = 15$ (2 способа)

Оставшееся число k_e может принимать любое значение от 1 до 15

Итак, имеем: $3\cdot 2\cdot 15 = 90$

3) Аналогичным образом выберем $m_i = 1$ (3 способа), $m_j = 16$ (2 способа).

Оставшееся число m_p может принимать любое значение от 1 до 16.

Итак, имеем $3\cdot 2\cdot 16 = 96$

Умножим каждый способ выбрать m на каждый способ выбрать k : $96\cdot 90$

Чистовик

ВАРИАНТ 17.4.2

Могут присутствовать пересечения при таком способе выбора, а именно тройки чисел (a, b, c), кот. учтены более 1 раза.

4) Тройки чисел (a, b, c) в кот. 2 числа k равны 1 и 15, а третье $k \in [2; 14]$

Все три числа m равны либо 1 либо 16 учтены по 2 раза

Такую тройку можно выбрать $3 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 2$ способами.

5) Тройки чисел (a, b, c) в кот. 2 числа m равны 1 и 16, а также третье $m \in [2; 15]$

Все 3 числа k равны 1 или 15 учтены по 2 раза

Их можно выбрать $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 14$ способами

6) Тройки чисел, в кот. все k_i равны 1 или 15 (или две 1 одно 15), или наоборот) и все m_i равны 1 или 16 (или две 1 одно 16, или наоборот) можно выбрать $(3 \cdot 2) \cdot 32$ способами

Каждая тройка при подсчёте в 1м пункте учтена 4 раза.

Итак, кол-во разных (a, b, c) равно

$$96 \cdot 90 - 2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 13) \cdot (3 \cdot 2) - 2 \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 14) - 3 \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) =$$

$$= 8640 - 468 - 504 - 108 = 4560$$

Отв: 4560

Чистовик Вариант 17.

№5.

Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Запишем ОДЗ $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \end{cases}$ $x>\frac{1}{5}$ $x\neq\frac{2}{5}$

Пусть $u=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2\cdot\log_a b$, где $a=5x-1$
$b=4x+1$

$v=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2\log_b c$, где $c=\frac{x}{2}+2$

$w=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_c a$

Нетрудно заметить, что

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\log_a c\cdot\log_c a=1$

$u\cdot v\cdot w=2^2=4$ (1)

Если $\left.\begin{matrix} u=v \\ w=u-1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$ из (1): $u\cdot u\cdot(u-1)=4$

$u=2$

$u^2+u+2=0$

$D=1-8=-7<0$ $\varnothing$

$$\begin{array}{r|l} u^3-u^2-4 & u-2 \\ \hline -\,u^3-2u^2 & u^2+u+2 \\ \hline u^2-4 & \\ -\,u^2-2u & \\ \hline 2u-4 & \\ -\,2u-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2$

$\cancel{2}\log_{5x-1}(4x+1) = \cancel{2}$

$\cancel{\log}_{5x-1}(4x+1) = 1 = \cancel{\log}_{5x-1}(5x-1)$

$4x+1 = 5x-1$

$x = 2$

Если $v = w$ или $u = w$ получаем

$v = 2$ или $w = 2$

1) $v = 2$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2$

$\cancel{2}\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \cancel{2}$

$\cancel{\log_{4x+1}}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 1 = \cancel{\log_{4x+1}}(4x+1)$

$\frac{x}{2}+2 = 4x+1$

$x = \frac{2}{7}$

Проверка с ОДЗ: $\frac{1}{5} \vee \frac{2}{7}$

$7 < 10 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$ подходит

2) $w = 2$: $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$

$\cancel{\log_{\frac{x}{2}+2}}(5x-1) = \cancel{\log_{\frac{x}{2}+2}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$5x-1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$x = 2;\ 10$ подх. по ОДЗ.

Ответ: $x = 2;\ \frac{2}{7};\ 10$

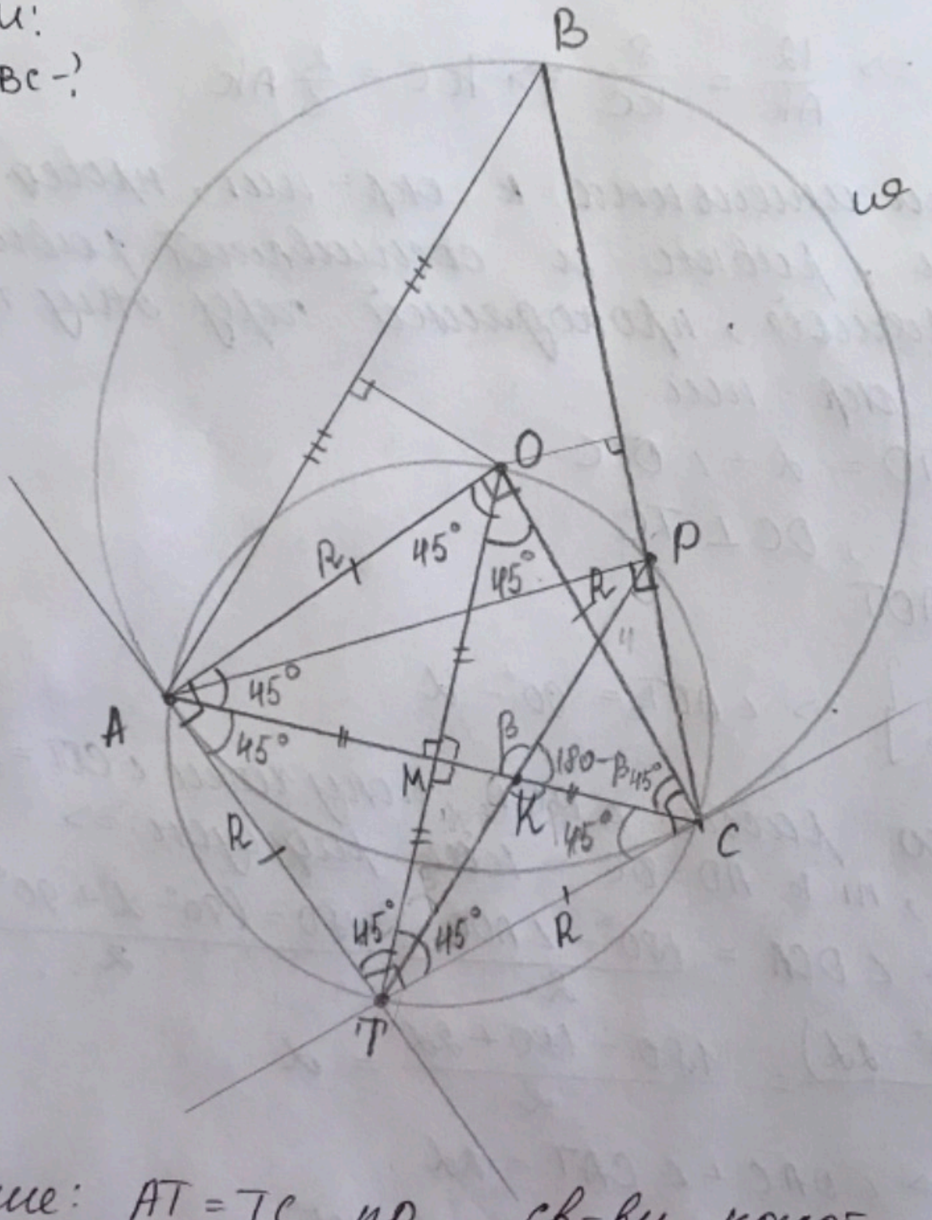
Чистовик Вариант 14 ч. 2

№6.

Дано: $S_{APK} = 6$ $S_{CPK} = 4$

Найти:

1) S_{ABC} - ?



Решение: $AT = TC$ по св-ву касат., провед. из 1-ой точки $\Rightarrow \triangle TAC$ р/б

$S_{APK} = \frac{1}{2} PK \cdot AK \cdot \sin\beta = 6$

$S_{CPK} = \frac{1}{2} PK \cdot KC \cdot \underbrace{\sin(180-\beta)}_{=\sin\beta} = 4$

Чистовик ВАРИАНТ 17 Ч.2

$$\begin{cases} PK \cdot AK \cdot \sin\beta = 12 \\ PK \cdot KC \cdot \sin\beta = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PK \cdot \sin\alpha = \frac{12}{AK} \\ PK \cdot \sin\alpha = \frac{8}{KC} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12}{AK} = \frac{8}{KC} \Rightarrow KC = \frac{2}{3} AK$$

Отрезки касательных к окр-ти, провед. из 1-ой точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окр-ти.

Пусть $\angle ATO = \alpha = \angle OTC$

$OA \perp AT$, $OC \perp TC$

Рассм. $\triangle AOT$

$$\begin{cases} \angle ATO = \alpha \\ \angle OAT = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle AOT = 90^\circ - \alpha$$

Аналогично рассм. $\triangle OCT$, получаем $\angle COT = 90^\circ - \alpha$

$\triangle AOC$ р/б, т.к $AO = OC$ как радиусы $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \frac{180 - (90^\circ - \alpha) + 90^\circ - \alpha)}{2} =$$

$$= \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)}{2} = \frac{180 - 180 + 2\alpha}{2} = \alpha$$

$\angle OAT = 90^\circ \Rightarrow \angle OAC + \angle CAT = 2\alpha$

$2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$\triangle AMO$ - прямоугл., т.к $\angle AMO = 180^\circ - \angle OAM - \angle AOM = 90^\circ$

Аналогично $\triangle OMC$ прямоугл.

Итак, $OT \perp AC$

Заметим, что прямоугольные $\triangle AOT$ и $\triangle COT$ р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow OA = OC = AT = TC = R \Rightarrow AOCT$ - квадрат

Чистовик Вариант 17 И. 2.

Рассм. $\triangle ATC$: По т. Пиф.: $AC = \sqrt{AT^2 + TC^2} = R\sqrt{2}$

В четырёхугольнике AOCT 2 противоположных угла в сумме дают $180°$ => около AOCT можно описать окр-ть.

OT - диаметр окр-ти, прох. через т. A, O, C

Но OT также и диагональ квадрата AOCT

В квадрате $AC = OT$ как диагонали => $AC = OT = R\sqrt{2}$

Т.к OT - диаметр => AC тоже диаметр. =>

=> $\triangle PAC$ прямоугольный ($\angle APC = 90°$)