Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103746**

ID профиля: **99224**

Вариант 17

№1 Для простоты записи введём $a = a_1$, тогда $a_i = a + x(i-1)$, где x – шаг арифм. прогрессии, т.к.

$$\left.\begin{matrix} a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_2 \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_2 - a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \quad (a \in \mathbb{Z}, \text{ т.к. } a_1 \in \mathbb{Z})$$

$$S = a + (a+x) + (a+2x) \dots (a+9x) = 10a + (1x + 2x \dots 9x) = 10a + \frac{10x \cdot 9}{2} =$$
$$= \underline{10a + 45x}$$

$$a_6 a_{12} = (a+5x)(a+11x) = a^2 + 16ax + 55x^2$$

$$a_7 a_{11} = (a+6x)(a+10x) = a^2 + 16ax + 60x^2$$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S + 1 \\ a_7 a_{11} < S + 17 \end{cases} \Rightarrow a_7 a_{11} - a_6 a_{12} < (S+17) - (S+1) \Rightarrow$$

$5x^2 < 16$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$, то подходят только 3 значения:

$x \in \{-1, 0, 1\}$, т.к. арифм. прогрессия – возраст., то 0 и -1

не подходят $\Rightarrow$ $x = 1$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S + 1 \\ a_7 a_{11} < S + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 16a + 55 > 10a + 46 \\ a^2 + 16a + 60 < 10a + 62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 6a + 9 > 0 \\ a^2 + 6a - 2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a+3)^2 > 0 \\ a^2 + 6a - 2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \\ a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases}$$

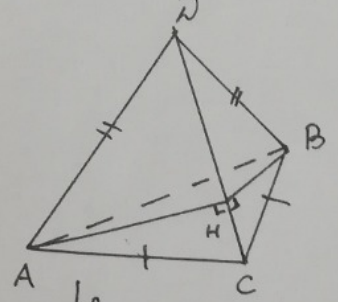
$$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 (-2)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$$

$\underline{3 < \sqrt{11} < 4}$ $(9 < 11 < 16) \Rightarrow$ т.к. $a \in \mathbb{Z}$, то

Ответ: $a \in \{-6, -5, -4, -2, -1, 0\}$

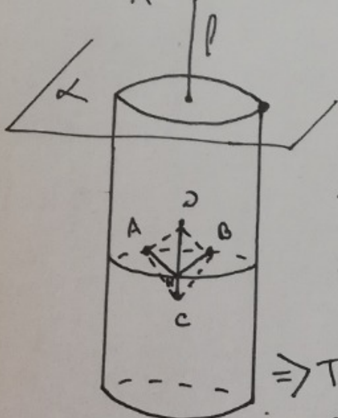
21103746 (U99224 M1303274)

№2



Проведём высоты из A и B на DC, так как $\triangle ADC = \triangle BDC$ (по трём сторонам: $AD = DB$, $AC = BC$, DC - общая), то ~~высоту~~ высоты упадут в одну и ту же точку на отрезке CD, назовём её H.

$AH \perp DC$, $BH \perp DC \Rightarrow$ пл-ть $ABH \perp DC$.



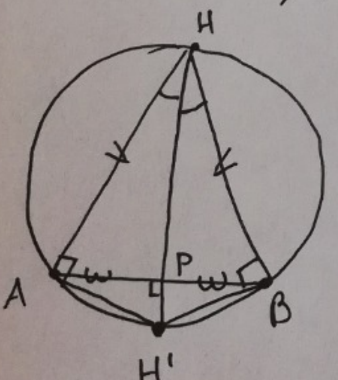
$DC \parallel l$ (l - ось цилиндра)

$DC \perp ABH$

$l \perp \alpha$ (где α - пл-ть ‖ основаниям цилиндра)

$\Rightarrow ABH \parallel \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Треугольник ABH вписан в окружность, лежащую в основании цилиндра (т.к. $ABH \parallel \alpha$, то ABH пересекает боковую поверхность ~~цил~~ цилиндра по той же окр-ти, а так точки A, B и H лежат на бок. стороне цилиндра, то они тоже вписаны). Рассмотрим пл-ть ABH:



Проведём ~~AP - вы~~ высоту HP, H' - продолжение HP до пересечения с окружностью

$AH = HB$ (соотв. высоты в равных треугольниках: $\triangle ADC$, $\triangle BDC$)

$\Rightarrow \triangle AHB$ - р/б $\Rightarrow$ HP также и медиана $\Rightarrow$

$AP = PB = \frac{AB}{2} = 1$. HP - также и биссектриса $\Rightarrow$

$\angle AHP = \angle BHP$. Тогда $\triangle AHH' = \triangle BHH'$ ($AH = HB$, HH' - общ. сторона, $\angle AHH' = \angle BHH'$)

$\Rightarrow \angle HAH' = \angle HBH'$, также по св-ву четырёхугольн., вписанного в окр-ть,

$\angle HAH' + \angle HBH' = 180° \Rightarrow \angle HAH' = \angle HBH' = 90° \Rightarrow HH'$ - диаметр окр-ти.

$AP \cdot PB = HP \cdot PH'$ (пересек. хорды в окр-ти) $\Rightarrow$

$HP \cdot PH' = 1 \Rightarrow PH' = \frac{1}{HP} \Rightarrow HH' = HP + \frac{1}{HP} \Rightarrow r = \left(HP + \frac{1}{HP}\right)\frac{1}{2}$

Продолжение на след. странице

Чистовик

Продолжение $\boxed{№2}$

3 стр.

$x = HP$. Нужно минимизировать $\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{2} \Rightarrow$ нужно минимизировать $x+\frac{1}{x}$. Докажем, что $x+\frac{1}{x} \geq 2$:

$x > 0 \Rightarrow$ домножим на x:

$x^2+1 \geq 2x$

$(x-1)^2 \geq 0$ – доказано, заметим также, что равенство достигается только при $x = 1 \Rightarrow$ Для наименьшего радиуса цилиндра нужно, чтобы $HP = 1$.

По т.Пифагора $AH = \sqrt{HP^2+AP^2} = \sqrt{2}$.

Аналогично применим т.Пифагора для $\triangle AHC$ и $\triangle AHD$:

$$HC = \sqrt{AC^2-AH^2} = \sqrt{5^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{23}$$

$$HD = \sqrt{AD^2-AH^2} = \sqrt{6^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{34}$$

$$CD = HC + HD = \sqrt{23}+\sqrt{34}$$

Ответ: $CD = \sqrt{23}+\sqrt{34}$.

Чистовик

$\boxed{№3}$ $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2(a+b),2) \end{cases}$

$\boxed{M \ni (x,y): \exists a,b:}$

4 стр.

$(-a)^2 = a \Rightarrow$

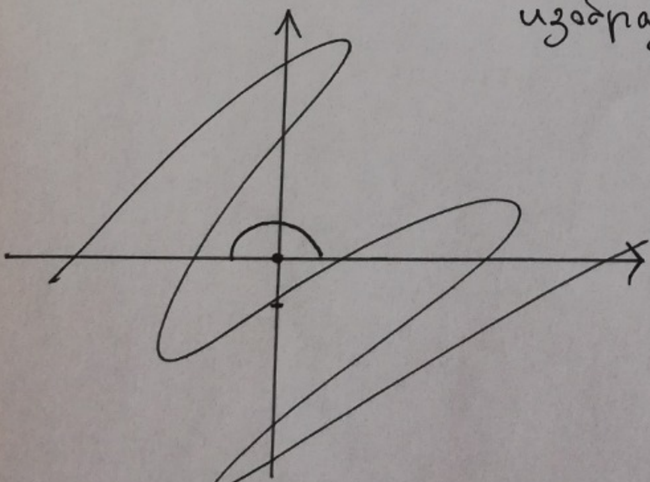
$\Rightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2(a+b),2) \end{cases}$

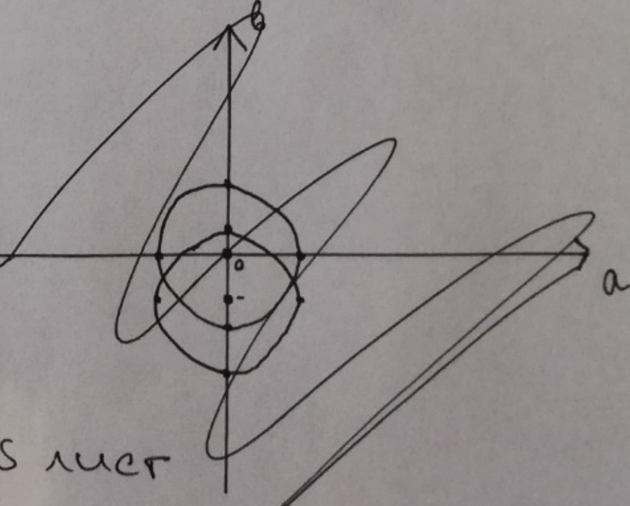
Решим относительно a, b: то-есть, нужно понять, при каких x, y у этой системы есть решения.

$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 2$ — круг с $r=\sqrt{2}$ с центром в (x,y)

$a^2+b^2 \le \min(2(a+b),2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2a+2b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \end{cases}$ пересечение окружностей с $r=\sqrt{2}$ и центром в $(0,0)$ и $(1,1)$: изобразим решение графически





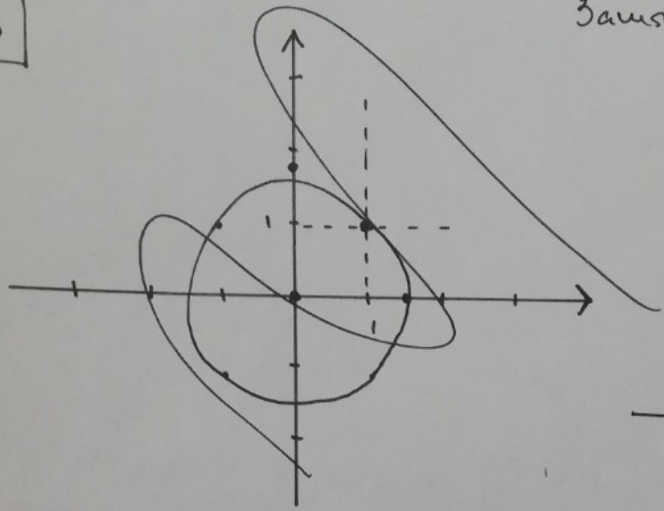
См. следующий лист

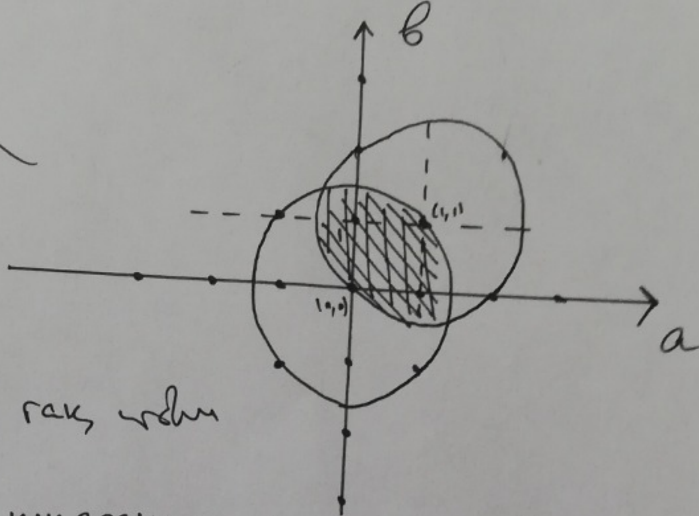
Чистовик

№3

Заштрихованная часть – решение второго уравнения

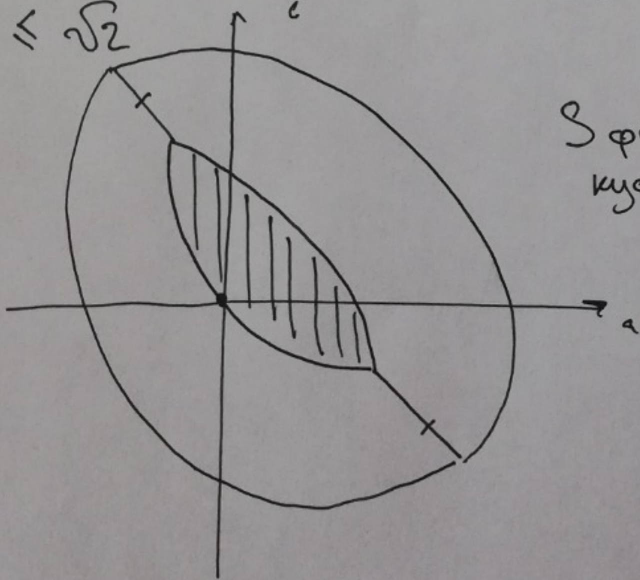
(5 стр.)





Нужно расположить (x,y) так, чтобы окр-ть из (x,y) с $r=\sqrt{2}$ пересекала заштрих. область

$\Rightarrow$ такие (x,y), что расстояние между (x,y) и заштрих. областью $\leq \sqrt{2}$



S финальной области – 2 куска окружностей с $r=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103746**

ID профиля: **99224**

Вариант 17

чистовик ① лист

$\boxed{№4}$ НОД$(a,b,c)=6 \Rightarrow a,b,c = 6x, 6y, 6z$:

НОД$(x,y,z)=1$ (если НОД$(x,y,z)=k$, то НОД$(a,b,c)=3k \Rightarrow k=1$)

НОК$(x,y,z) = \frac{\text{НОК}(a,b,c)}{6} = 2^{14}\cdot 3^{15}$ (если НОК $(x,y,z)=k$, то $k \vdots x,y,z \Rightarrow 6k \vdots 6x, 6y, 6z \Rightarrow$ если $k < \frac{\text{НОК}(a,b,c)}{6}$, то $6k <$ НОК(a,b,c), но в то же время $6k \vdots a,b,c \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow k = \frac{\text{НОК}(a,b,c)}{6}$)

$\begin{cases} \text{НОД}(x,y,z)=1 \Rightarrow \text{хотя бы одно из чисел} \not\vdots 2 \text{ и еще одно (возможно, то же)} \not\vdots 3 \\ \text{НОК}(x,y,z) = 2^{14}\cdot 3^{15} \Rightarrow \text{макс. степени вхождения } 2 - 14, \text{ а } 3 - 15 \end{cases}$

~ Эти усл-я необходимы, так если $x,y,z \vdots k$, то НОД$(x,y,z) \geq k$, а т.к. НОД$(x,y,z)=1$, такого не может быть.

Если $x \vdots 2^{14+k}$, то НОК$(x,y,z) \vdots x \Rightarrow \vdots 2^{14+k} \Rightarrow k=0$, аналогично с 3. Также из этого следует, что $x,y,z \vdots$ только 2 и 3.

~ Эти условия достаточны, т.к. мала делится только на 2 и 3, и нет никаких трех чисел $\vdots 3$ и $2 \Rightarrow$ НОД$(x,y,z)=1$, а НОД(a,b,c) - макс. степень делителя по всем числам.

Посмотрим, как можно расставить множители:

~~$x \vdots 2^{14} \Rightarrow 1$ вар. $(x \not\vdots 2^{15})$~~

~~$y \vdots 2^{0} \Rightarrow 1$ вар.~~

~~$z \vdots 2^{<14} \Rightarrow 15$ вар. $(z \not\vdots 2^{15})$~~

~~$\Rightarrow 15 \cdot 3! = 90$ (перестановки)~~

~~$x \vdots 2^{14}$, $y \vdots 2^{0}$, $z \vdots 2^{14}$ — 3 варианта расставить~~

~~$\Rightarrow 93$.~~

21103746 (U99224 M1303275)

черновик

№4 ②лист

$$\left.\begin{aligned} x &: 2^{14}\,(\vdots\, 2^{15}) - 1 \text{ вар.} \\ y &: 2^{0}\,(\vdots\, 2^{1}) - 1 \text{ вар.} \\ z &: 2^{0<k<14} - 13 \text{ вар.} \end{aligned}\right\} \cdot 3! = 78$$

вариантов расставить степени двойки по-разному

$$\left.\begin{aligned} x &: 2^{14}\,(\vdots\, 2^{15}) - 1в \\ y &: 2^{0}\,(\vdots\, 2^{1}) - 1в \\ z &: 2^{14}\,(\vdots\, 2^{15}) - 1в \end{aligned}\right\} \cdot 3 = 3$$

варианта расставить степени 2 по-разному так, чтобы у двух чисел были одинаковые степени

аналогично для $z : 2^{0}\,(\vdots\, 2^{1})$ $\exists$ 3 варианта $\Rightarrow$

Разных способов расставить степени 2 — 84

Аналогично для 3^x получим:

$$\left.\begin{aligned} x &- 3^{15} \\ y &- 3^{0} \\ z &- 3^{0<\ldots<15} \end{aligned}\right\} \cdot 3! = 84, \quad \left.\begin{aligned} x &- 3^{15} \\ y &- 3^{0} \\ z &- 3^{15} \end{aligned}\right\} \cdot 3 = 3 \quad \left.\begin{aligned} x &- 3^{15} \\ y &- 3^{0} \\ z &- 3^{0} \end{aligned}\right\} \cdot 3 = 3 \Rightarrow$$

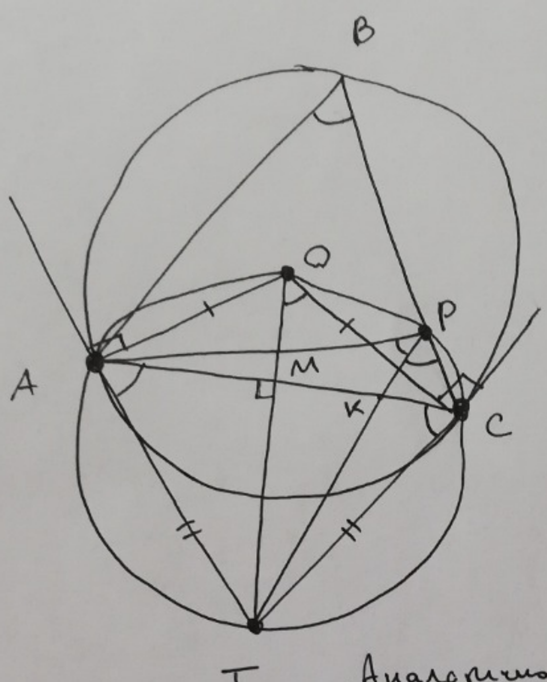
всего 90 вариантов $\Rightarrow$

Ответ: $84 \cdot 90 = 7560$

Чистовик

№ 6

③ лист



а)

$\angle AOC =$ дуге $AC\ (\not\ni B) = \alpha$

$\angle CAT = \frac{1}{2}$ дуги $AC\ (\not\ni B) = \frac{\alpha}{2}$

(как угол между хордой и касат.)

Аналогично $\angle ACT = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle ATC =$

$= 180^\circ - \angle CAT - \angle ACT = 180^\circ - \alpha. \Rightarrow \angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow AOTC$ – вписанный четырехугольник $\Rightarrow T \in$ второй окр-ти из усл-я

$\angle APT = \angle ACT$ (опир. на дугу AT) $\Rightarrow \angle APT = \frac{\alpha}{2}$

$\angle AOC = \angle APC$ (опир. на одну дугу AC) $\Rightarrow \angle APC = \alpha$

$\angle ABC$ опир. на дугу $AC \Rightarrow$ измеряется её половиной $\Rightarrow$

$\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$. $\angle ABC = \angle KPC = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AB \parallel KP \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$

Так как у $\triangle APK$ и $\triangle KPC$ общая высота (из P на AC), то $\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{KC}{AC} = \frac{2}{5}$

т.к. $\triangle ABC \sim \triangle KPC$, то $S_{\triangle ABC} = \cancel{S_{\triangle KPC} \cdot \left(\frac{AC}{AC}\right)^2 = 4.} =$

$= S_{\triangle KPC} \cdot \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \underline{\underline{25}}$

Ответ: а) 25

Черновик

④ лист

$\boxed{№6}$ б) $\angle ABC = arctg\, 7/5 \Rightarrow tg\angle ABC = 7/5$

$\angle OAT = 90°$ (кас.) $\Rightarrow$ TO – диаметр $\Rightarrow$ TO $\ni$ Q (центр второй окр-ти) $\Rightarrow TO \perp AC$ (линия центров окр-тей и отрезок между точками пересечения) $\Rightarrow$

~~$tg\angle\alpha(ABC)$ =~~ $TO \cap AC = M$, заметим, что т.к. $\angle AMT = 90°$, а $\triangle ATC$ – р/б ($AT = CS$, как касательные)

$\Rightarrow tg\angle\alpha = \frac{MT}{AM} = \frac{2MT}{AC} \Rightarrow \frac{2MT}{AC} = \frac{7}{5} \Rightarrow MT = \frac{7AC}{10}$

$\angle TOC = \angle TAC$ (опир на дугу TC) $\Rightarrow \angle TOC = \alpha$

$\Rightarrow tg\alpha = \frac{MC}{OM} = \frac{AC}{2OM} = \frac{7}{5} \Rightarrow OM = \frac{5AC}{14}$

21103746 (U99224 M1303275)

Чистовик

5 лист

$\boxed{№5}$ Обл-ть опр-я: $x \in (1/5; 2/5) \cup (2/5; +\infty)$

Заметим, что

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$$

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$