Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103720**

ID профиля: **172725**

Вариант 17

Чистовик №1 Вариант 17

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$

$a_2 = a_1 + d$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_6 a_{12} > S + 1$

$a_7 \cdot a_{11} < S + 17$

$S = 10a_1 + \frac{10 \cdot 9}{2} d =$

$= 10a_1 + 45d$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) =$

$= a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) =$

$= a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 + 16 > S + 17 > a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2$

$5d^2 < 16$

$d < \sqrt{\frac{16}{5}} = \sqrt{3\frac{1}{5}}$; т.к. $d \in \mathbb{Z}$; $d > 0$; $d = 1$

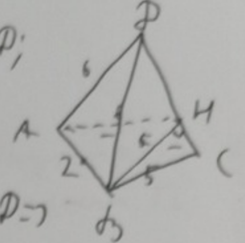
$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \\ a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0; \ \frac{D}{4} = 11; \ a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \\ a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0; \ \frac{D}{4} = 0; \ a_1 \neq -3 \end{cases}$$

$\sqrt{11} \in (3; 4) \Rightarrow -3-\sqrt{11} < -6$; $-3+\sqrt{11} > 0$

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$

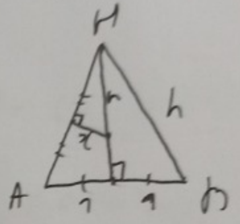
Чистовик №2 Вариант 17



1) Построим высоту BH в $\triangle BCD$; т.к. $\triangle BCD = \triangle ACD$ — по 3 сторонам, AH — тоже высота $\triangle ACD$

$AH \perp CD$; $BH \perp CD \Rightarrow (AHB) \perp CD \Rightarrow$

$\Rightarrow (AHB) \parallel$ основанию; т.к. $A; B; H \in$ боковая поверхность; то радиус описанной окружности $\triangle ABH$ — радиус цилиндра. Обозначим $BH = AH = h$. тогда:



высота в треугольнике $\triangle ABH$ к основанию равна $\sqrt{h^2-1}$; тогда, обозначим за x длину серединного перпендикуляра $\frac{1}{\sqrt{h^2-1}} = \frac{x}{h/2}$ — по подобию треугольников. $x = \frac{h}{2\sqrt{h^2-1}}$; $r^2 = x^2 + \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{4}\left(1+\frac{1}{h^2-1}\right) =$

$= \frac{h^2}{4}\cdot\frac{h^2}{h^2-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{h^4}{h^2-1}$; Найдём минимальное значение $4r^2$:

$$\left(\frac{h^4}{h^2-1}\right)' = \frac{h^{4\prime}(h^2-1) - h^4\cdot(h^2-1)'}{(h^2-1)^2} = \frac{4h^5-4h^3-2h^5}{h^4-2h^2+1} = \frac{2h^3(h^2-2)}{(h^2-1)^2}$$

есть 2 случая: если BCD остроугольный и тупоугольный.

$-$ $-\sqrt{2}$ $+$ -1 0 $-$ 1 $\sqrt{2}$ $+$

$\Downarrow$

минимум при $h = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} DC = \sqrt{36-h^2} + \sqrt{25-h^2} = \sqrt{34} + \sqrt{23} \\ DC = \sqrt{36-h^2} - \sqrt{25-h^2} = \sqrt{34} - \sqrt{23} \end{array}\right.$$

; Ответ: $\sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

Чистовик N3 Вариант 17

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)\end{cases}$$

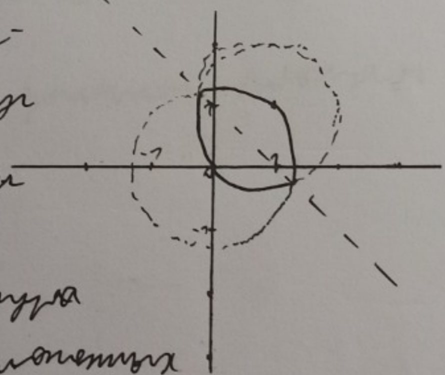
1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ — это окружность с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$

2) $a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)$

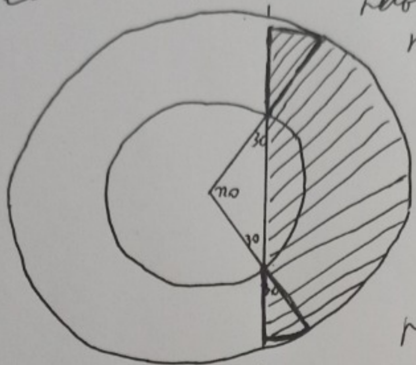
$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a+b \ge 1;\ a^2+b^2 \le 2\\ a+b \le 1;\ a^2+b^2 \le 2a+2b;\ a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 2;\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2\end{array}\right.$$

Рассмотрим точки плоскости, которые попадают под неравенство: это 2 части окружности, ограниченные хордой; причём, т.к радиусы окружностей равны, и эти пересекают центры друг друга, эти дуги равны 120° каждая. Искомая фигура М — это фигура из всех точек, расположенных на расстоянии не больше чем $\sqrt{2}$ от изображенной выше.



3) т.к. фигура симметрична относительно прямой $x+y=1$, рассмотрим её половину:



Так как множество точек, равноудалённых от окружности также является окружностью, искомое это сектор окружности с радиусом $2\sqrt{2}$ без учёта треугольника в окружности $\sqrt{2}$, и 2 сектора окружности радиусом $\sqrt{2}$

посчитаем суммарную площадь:

$$S_{пол} = \frac{1}{3}\pi\cdot(2\sqrt{2})^2 + 2\cdot\frac{1}{12}\pi\cdot(\sqrt{2})^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2})^2 = \frac{8}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$= 3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$; значит площадь искомой фигуры

$6\pi - \sqrt{3}$

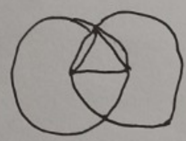
Ответ: $6\pi - \sqrt{3}$

черновик

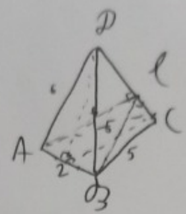
$\frac{D}{4} = \cancel{[illegible]} + 9 + 2 = 11$

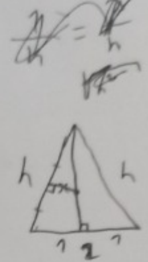
$a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$

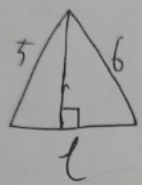
$\frac{D}{4}$



черновик №2







$\sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$\sqrt{36+1} = \sqrt{37}$

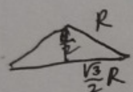
$\frac{1}{\sqrt{h^2-1}} = \frac{x}{\frac{h}{2}}$

$x\sqrt{h^2-1} = \frac{h}{2}$

$x^2(h^2-1) = \frac{h^2}{4}$

$x = \frac{h}{2\sqrt{h^2-1}}$

$\sqrt{36+h^2} + \sqrt{25+h^2} = l$



$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \sqrt{3}R =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2$

$r^2 = x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 =$

$\frac{\cancel{36}}{\cancel{36}} = \frac{1}{}$

$\frac{3a}{\cancel{36}\,a} = \frac{1}{12}$

12

$= \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{h^2-1} =$

$= \frac{h^2 \cdot (1+h^2-1)}{4(h^2-1)} =$

$= \frac{h^4}{4(h^2-1)}$

$\left(\frac{h^4}{h^2-1}\right)' = \frac{h^{4'} \cdot (h^2-1) - h^4 \cdot (h^2-1)'}{(h^2-1)^2} =$

$4h^3 \cdot (h^2-1) -$

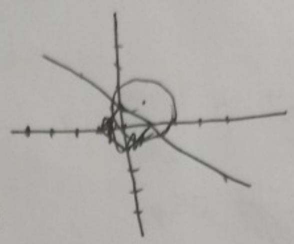
$=$

$h = \frac{\cancel{\ }}{2(h-1)}$

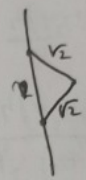
$r^2 = \cancel{\ } \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{h^4}{h^2-1}$

№3 Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2) \end{cases}$$

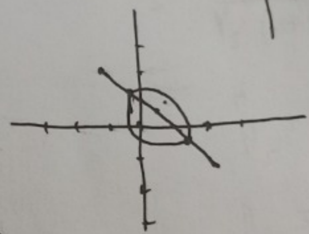


$a^2+b^2 \le 2a+2b$; $a+b \le 1$

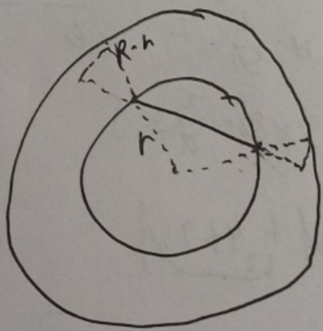


$a^2-2a+b^2-2b+2 \le 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2.$



$$\left[\begin{array}{l} a+b \le 1;\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \\ a+b \ge 1;\ a^2+b^2 \le 2 \end{array}\right.$$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103720**

ID профиля: **172725**

Вариант 17

стр 1 Чистовик №4 Вариант 17

$\begin{cases} НОД = 6 \\ НОК = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$

т.к. НОК $= 2^{15} \cdot 3^{16}$; среди чисел $a; b; c$ есть хотя бы одно число, в разложении на простые множители которого 2 в степени ≥ 2; это значит, что есть хотя бы одно число, в разложении которого 2 в 1 степени, т.е оно кратно 2, но не кратно 4. аналогично с 3: есть хотя бы одно число, в разложении которого 3 в степени ≥ 2; и хотя бы одно, в котором 3 в степени 1; т.е числа можно представить как ① 6×2^m; 6×3^n; $6 \times 2^p \times 3^k$; либо как ② 6; $6 \times 2^m \times 3^n$; $6 \times 2^p \times 3^k$

разберём все случаи:

1.1) $m=0$; $n=0$; $\Rightarrow p=14$; $k=15$; т.е всего 3 варианта.

1.2) $m \geq 1$; $n=0$; $k=15$; $\left[\begin{array}{l} m=14; p \in [1;14] \quad 14 \times 6 \text{ вар} \\ p=14; m \in [1;14] \quad 14 \times 6 \text{ вар} \end{array}\right. \Rightarrow 168$ вар

1.3) $n \geq 1$; $m=0$; $p=14$; $\left[\begin{array}{l} n=15; k \in [1;15] \quad 15 \times 6 \text{ вар} \\ k=15; n \in [1;15] \quad 15 \times 6 \text{ вар} \end{array}\right. \Rightarrow 180$ вар

1.4) $n \geq 1$; $m \geq 1$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=14; p \in [1;14] \\ p=14; m \in [1;14] \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} n=15; k \in [1;15] \\ k=15; n \in [1;14] \end{array}\right. \end{cases}$ $14 \times 15 \times 6$ вар $= 1260$ вар

2.1) $m=p$; $n=k$; $\Rightarrow m=p=14$; $n=k=15 \Rightarrow 3$ варианта

2.2) $m \geq p$; $n \geq k \Rightarrow m=14$; $n=15$; $p \in [1;14]$; $k \in [1;15]$ $(14 \times 15 \times 1 - 1) \times 6 =$ $= \cancel{1260} = 1254$

2.3) $m \geq p$; $n \leq k \Rightarrow m=14$; $k=15$; $p \in [1;14]$; $n \in [1;15]$ $(14 \times 15 - 1) \times 6 =$ $= 1254$

Итого: $3 + 168 + 180 + 1260 + 3 + 1254 + 1254 = 4122$ вар.

стр 2 Чистовик №5 Вариант 17

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ: $\begin{matrix} 5x-1>0 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \end{matrix}$; $\begin{matrix} 5x-1\neq 1 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{matrix}$; $\begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases}$, т.е.

все логарифмы не равны нулю;

$2\log_{5x-1}(4x+1)$; $2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

1) Случай;

$$\begin{cases} \log_{5x-1}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \\ 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{5x-1}(4x+1)}{\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)}=1; \quad \log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1; \quad 5x-1=\frac{x}{2}+2 \\ 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=\log_{\frac{x}{2}+2}\left(\dfrac{5x-1}{\frac{x}{2}+2}\right); \quad 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=0 \Rightarrow \varnothing \end{cases}$$

2) случай

$$\begin{cases} 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2\log_{5x-1}(4x+1)-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}=\frac{1}{2}; \quad \log_{4x+1}(5x-1)=\frac{1}{2}; \quad 5x-1=\sqrt{4x+1} \\ \dfrac{\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)}{\log_{\frac{(4x+1)^2}{5x-1}}(5x-1)}=1; \quad \log_{\frac{x}{2}+2}\left(\dfrac{(4x+1)^2}{5x-1}\right)=1; \quad \frac{x}{2}+2=(5x-1)^3 \end{cases}$$

Стр 3 Чистовик №5 продолжение: Вариант №

$\begin{cases} 5x-1=\sqrt{4x+1} \\ \frac{x}{2}+2=(5x-1)^3 \end{cases}$; $\begin{cases} 25x^2-10x+1=4x+1 \\ \cancel{\frac{x}{2}+2=125x^3-75x^2+15x-1} \end{cases}$; $25x^2-14x=0$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{14}{25} \end{array}\right.$

$\frac{14}{25\cdot 2}+2=\left(\frac{14\cdot 5}{25}-1\right)^3$; $\frac{7}{25}+2=\left(\frac{9}{5}\right)^3$; $\frac{57}{25}=\frac{729}{125}$ $\varnothing$

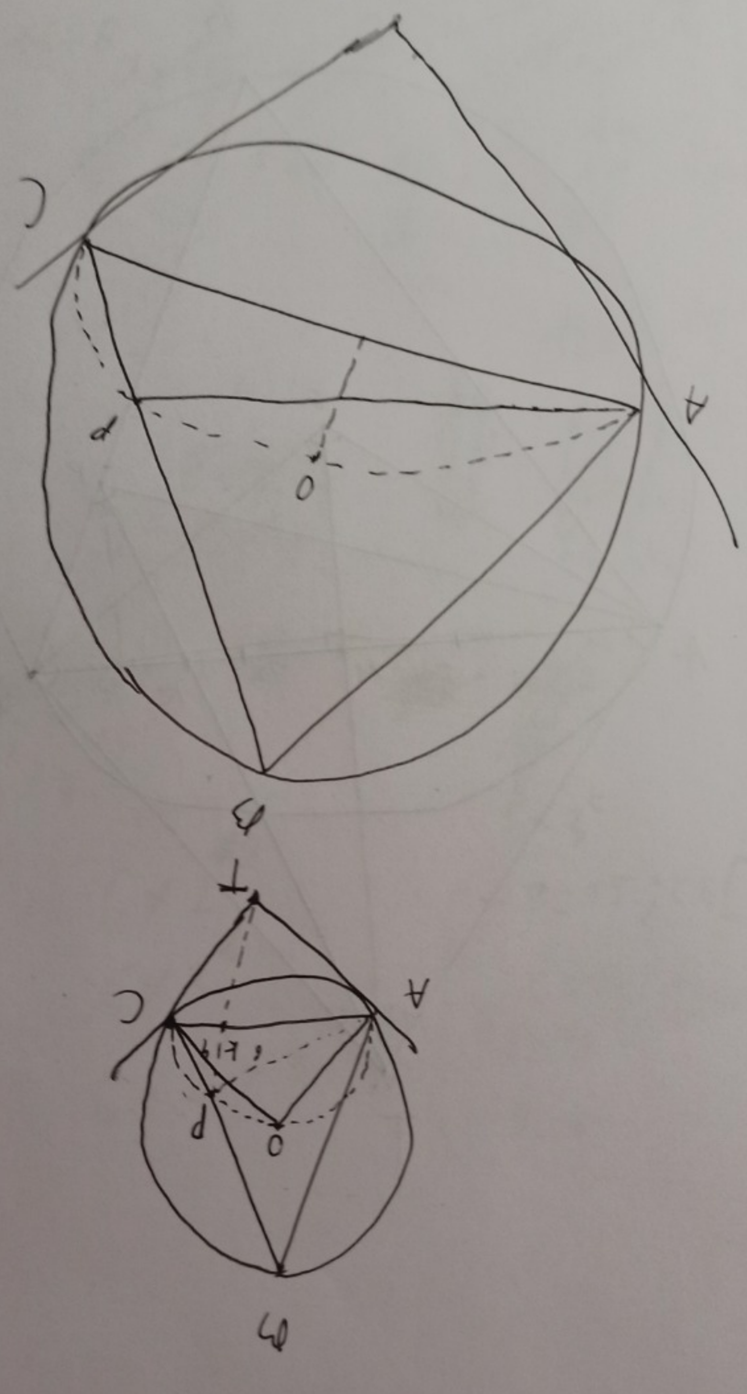
3) Случай;

$\begin{cases} 2\log_{5x-1}(4x+1)=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \\ \dfrac{2\log_{5x-1}(4x+1)}{\cancel{\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)}}=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)-1 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{\log_{5x-1}(4x+1)}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}=\frac{1}{2} \\ \dfrac{2\log_{5x-1}(4x+1)}{\log_{\left(\frac{(\frac{x}{2}+2)^2}{4x+1}\right)}(4x+1)}=\frac{1}{2} \end{cases}$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)=\frac{1}{2}$; $\sqrt{\frac{x}{2}+2}=4x+1$; $\log_{\frac{(\frac{x}{2}+2)^2}{4x+1}}(5x-1)=\frac{1}{2}$

$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{2}+2}=4x+1 \text{ ; } \frac{x}{2}+2=16x^2+8x+1 \text{ ; } 16x^2+7{,}5x-1=0 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{4x+1}}=5x-1 \text{ ; } (4x+1)^{\frac{3}{2}}=5x-1 \text{ ; } (4x+1)^3=(5x-1)^2 \end{cases}$ $\varnothing$

Ответ: нет решений



Цуровень №4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=6 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a\times b\times c\div 6\div 6$ $\cancel{a\times b\times c = 6\cdot 2^{15}\cdot 3^{16} = 2^{16}\cdot 3^{17}}$

$a=6x$
$b=6y$
$c=6z$

$p_1;p_2;\ldots$
$q_1;q_2;\ldots$
$m_1;m_2;\ldots$

$d \mid a$
$d \mid b$
$d \mid c$

НОК

$K_1=6$

$d=6$

$b\times c$

6×2^k

6×3^t

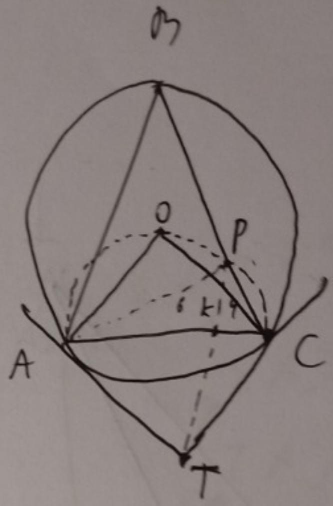
$2^{15}+3^{16}$

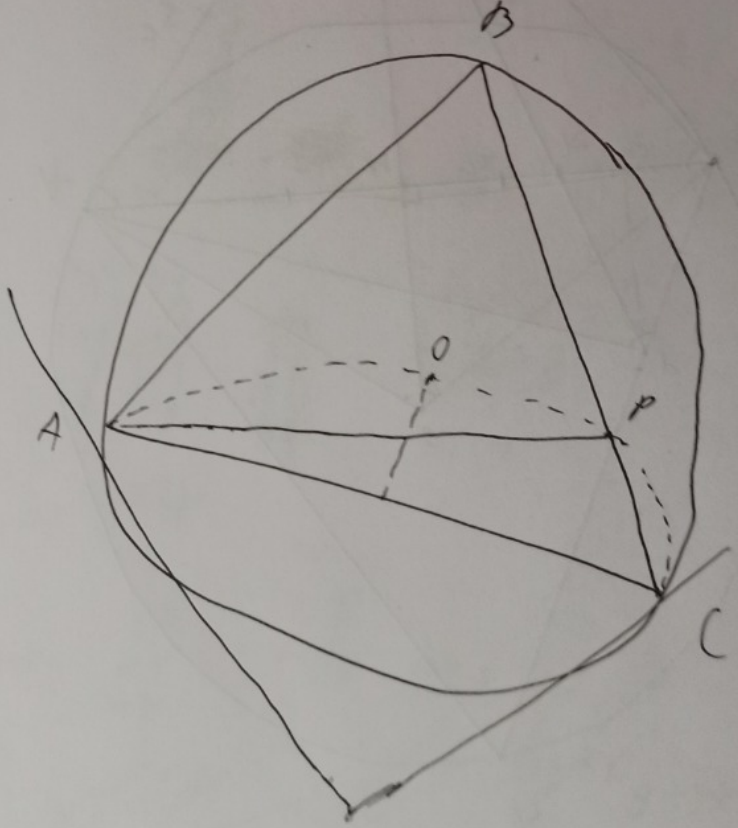
6×2^a
6×3^b
$6\times 2^c\times 3^d$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=15;\ c\in[\\ c=15 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=16 \\ d=16 \end{array}\right. \end{cases}$$

REDMI NOTE 8 PRO
AI QUAD CAMERA

Черновик №6





задача №4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=6 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a\times b\times c \div 6\div 6$

$a=6x$

$b=6y$

$c=6z$

$d=6$

$2^{15}+3^{16}$

6×2^{a}

6×3^{b}

$6\times 2^{c}\times 3^{d}$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=15;\ c\in[\\ c=15 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=16 \\ d=16 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

REDMI NOTE 8 PRO
AI QUAD CAMERA

$\log_{5x-1}(4x+7)$; $\log_{4x+7}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$a=5x-1$; $b=4x+7$; $c=\frac{x}{2}+2$

$\log_a b$; $\log_b c^2$; $\log_c a^2$

$\cancel{\log_a b \; ; \; 2\log_b c \; ; \; 2\log_c a}$

$\log_a b$; $2\log_b c$; $\log_c a$ $\quad 1=\log_c c$

$\cancel{\log_a b = \log_b c}$

$\log_c a - 1 = \log_c\left(\frac{a}{c}\right)$

$5x-1-4x-7=$

$=x-2$

1 7+180+3768 = 4122

черновик

$180 = \alpha + 90 + \beta - ...$

$+x$

$x = \alpha - \beta$

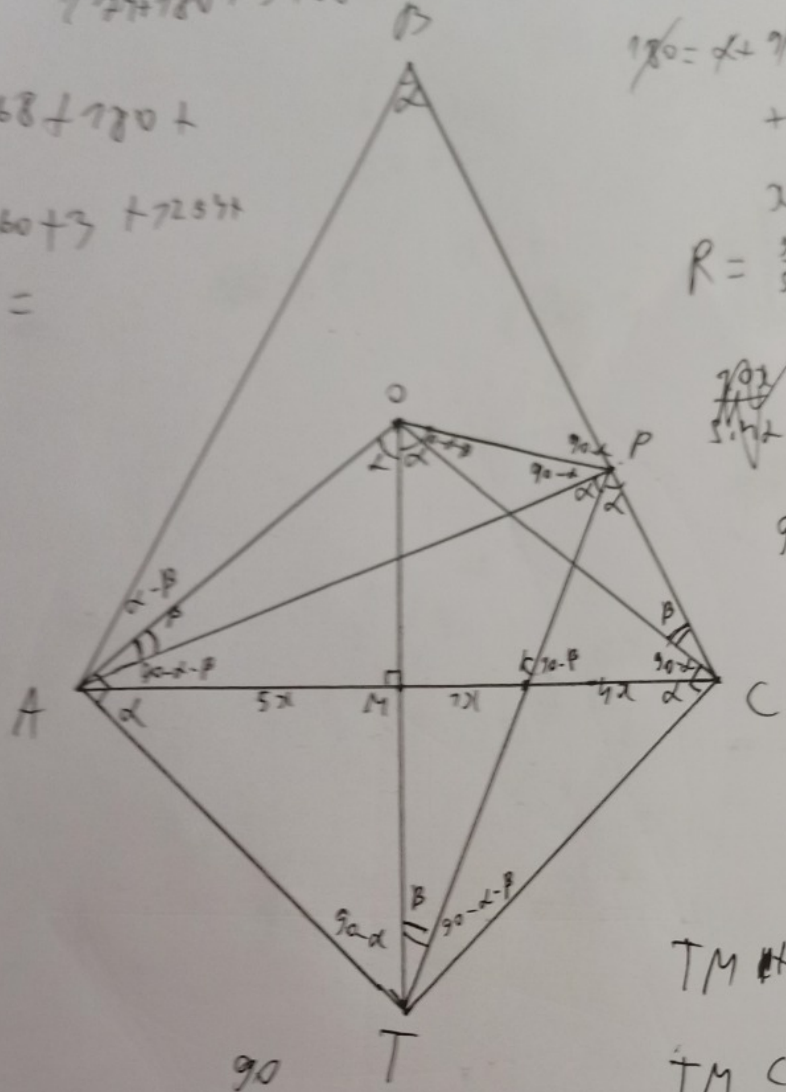
$R = \frac{7x}{\sin\alpha}$

3+768+180+

1 +1260+3 +7254

+7254 =

=



$90 + \beta - \alpha$.

$TM \, tg\beta = x$

$TM \, ctg\alpha = 5x$

$\frac{tg\beta}{ctg\alpha} = \frac{1}{5}$

90

14+15+6=

= 90 0 + 360 =

= 1260

нернатик №4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=6 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{15} \end{cases}$$

$a\times b\times c \div 6 \div 6$ $\quad a\times b\times c = 6\cdot 2^{15}\cdot 3^{16} = 2^{16}\cdot 3^{17}$

$a=6x$ $\quad p_1; p_2; \ldots$ $\quad d/a$
$b=6y$ $\quad q_1; q_2; \ldots$ $\quad d/b$ $\quad abcd$
$c=6z$ $\quad m_1; m_2; \ldots$ $\quad d/c$

$k_1=6$

$d=6$

$b\times c$

6×2^k

6×3^t

$2^{15}\times 3^{16}$

6×2^a
6×3^b
$6\times 2^c\times 3^d$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=15;\ c\in[\\ c=15 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=16 \\ d=16 \end{array}\right. \end{cases}$$

REDMI NOTE 8 PRO
AI QUAD CAMERA

21103720 (U172725 M1296164)