Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103715**

ID профиля: **259573**

Вариант 17

Чистовик

Чистовик

№1

$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 \Rightarrow S_{10} = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = \underline{10a_1 + 45d}$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + d \cdot 5)(a_1 + d \cdot 11) = a_1^2 + a_1 \cdot 11d + a_1 \cdot 5d + 55d^2 =$

$= a_1^2 + 16d \cdot a_1 + 55d^2$

$\underline{a_1^2 + 16d \cdot a_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1}$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 10a_1 d + 6a_1 d + 60d^2 =$

$= a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2$

$\underline{a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17}$

т.к прогрессия возрастающая $d > 0$

т.к a_i – целые то и $d \in Z$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

домножим на −1 и сложим

$-5d^2 > -16$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d^2 < 3 + \frac{1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1$ т.к $d > 0$ и $d \in Z$ $\quad (2^2 > 3 + \frac{1}{5})$

тогда

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases}$$

Чистовик

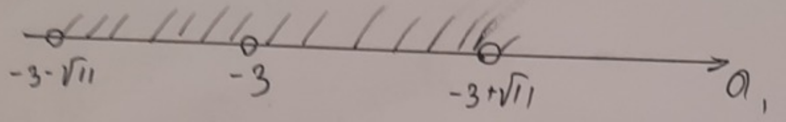
№1 продолжение

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+\cancel{10}9>0 \\ a_1^2+6a_1-2<0 \end{cases} \quad D=36+4\cdot 2=44$$

$$a_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{44}}{2}=\frac{-6\pm 2\sqrt{11}}{2}=-3\pm\sqrt{11}$$

$\cancel{D=36-4\cdot 9=}$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ (a_1+3-\sqrt{11})(a_1+3+\sqrt{11})<0 \end{cases}$$



$$a_1\in(-3-\sqrt{11};-3)\cup(-3;-3+\sqrt{11})$$

$$\cancel{> -3-\sqrt{11}} \quad -7<-3-\sqrt{11}<-6$$

$$0<-3+\sqrt{11}<1$$

значит: т.к $a_1\in Z$ $a_1=-6,-5,-4.$

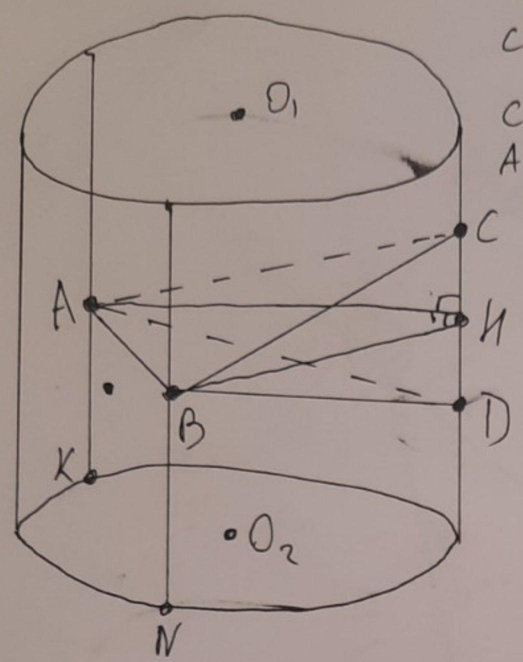
$a_1=-2,-1,0$

Ответ: $a_1=-6;-5;-4;-2;-1;0$

2

Чистовик

№2



Дано

$CD \parallel O_1O_2$

$CB = AC = 5$

$AD = DB = 6$

$AB = 2$

r-min

CD-?

Решение

$CD \parallel O_1O_2$

$C \in$ б. Пов $D \in$ б. Пов

⇓

CD лежит на б Пов $\parallel O_1O_2$

~~значит~~

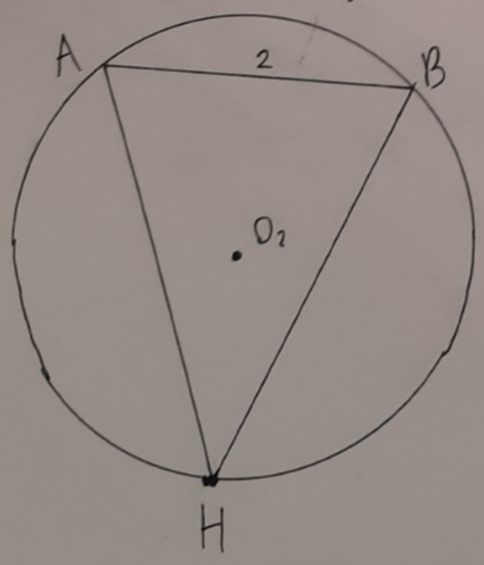
проведем высоты из B и A

Они попадут в одну точку т.к $\triangle CBD = \triangle CAD$ по тр. [illegible]

т.к все образующие цилиндра $\parallel$ высоты $\perp$ и образующим проходящим через A и B значит (ABH) $\perp$ образующим значит $\parallel$ основаниям значит

$NB = KA$, $AB \parallel (NKO_2)$

спроецируем рисунок на (KNO_2)



радиус описанной окружности равен $R = \frac{AB}{2 \cdot \sin\angle AHB}$

R_{min} если max $\sin\angle AHB$

MAX значение $\sin = 1$, достигается при $\angle AHB = 90°$, тогда

вспомним что $AH = HB$ т.к $\triangle CDB = \triangle CDA$

тогда найдем AH по теореме Пифагора

$AH^2 + HB^2 = AB^2$

$2AH^2 = 4$

$AH^2 = 2$

$\triangle$ ~~AB~~ $BAH = \sqrt{2}$

3

Чистовик

продолжение №2

если $AH = \sqrt{2} = BH$ найдем $(\#1)$

$CD = CH + HD$

из $\triangle AHC$

$CH = \cancel{\sqrt{25-2}}\ \sqrt{-AH^2 + AC^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

из $\triangle AHD$

$HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)\end{cases}$$

рассмотрим нижнее неравенство

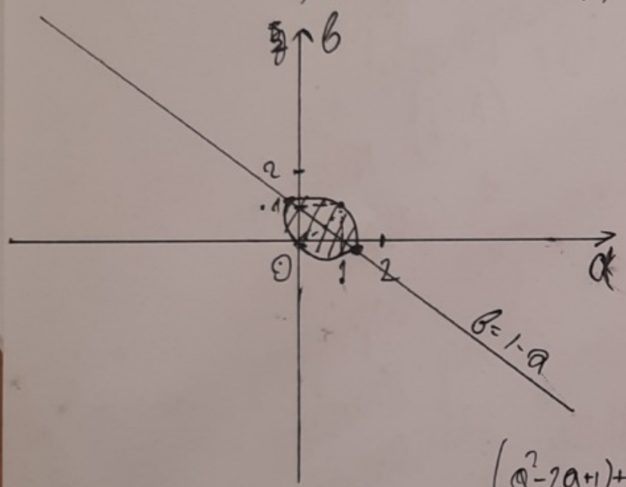
$2a+2b \ge 2$

$2a-2 \ge -2b$

$a-1 \ge -b$

~~в~~ $1-a \le b$, тогда изобразим

эту линию (разделяющую)



и тогда точки ниже ее задаются

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

выше – $a^2+b^2 \le 2$

тогда

$a^2+b^2-2a-2b \le 0$

$(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)-2 \le 0$ $(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

изобразим

$a^2+b^2 \le 2$ изобразим

тогда $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ это

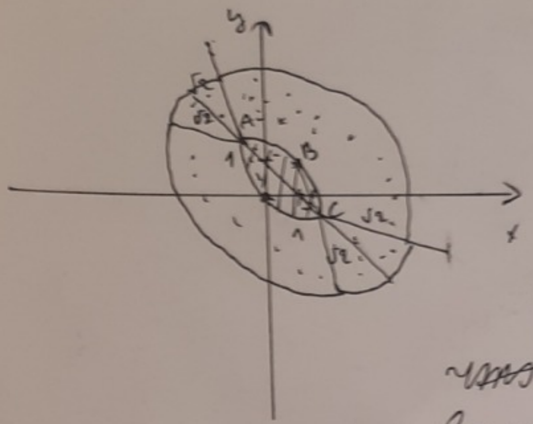
множество ~~кругов~~ закрашеных окружностей с центров в точках отмечены на воа и $R=\sqrt{2}$ изобразим:

5

21103715 (U259573 M1297667)

Чистовик

№3 продолжение



тогда новая фигура будет образована ~~предыдущей пер~~ нормалями к краю предыдущей фигуры длиной $= R = \sqrt{2}$

~~что всеравно что две~~ что всеравно что 2 сегмента круга с радиусами $= \sqrt{2} + \sqrt{2}$ и центрами лежащими в точках $(1;1)$ $(0;0)$ т.к перпендикуляр (нормаль) к окружности есть продолжение радиуса окружности, отдельно стоит рассмотреть изломы, в них нормалей можно провести бесконечно поэтому там, нужно просто построить окружности

тогда ~~S~~ = ~~новая фигура ∾ предыдущей каждая ее точка S = площадь предыдущей фигуры • k^2 - 2△ABC~~ $S_{предыдущ} \cdot K^2 - 2\triangle ABC$

тогда ~~S новая~~ новая фигура – две закрашенных окружности (сегменты) с центрами в точках $(0;0)$ $(1;1)$ тогда они ∾ предыдущим сегментам с $K = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{R}{r} = 2$, тогда $S_{новой} = \frac{S_{стар}}{2} \cdot K^2 \cdot 2 = S_{стар} \cdot 4$

← одной половины фигуры

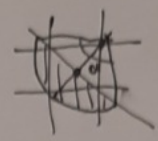
6

21103715 (U259573 M1297667)

Чистовик

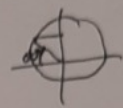
№3 продолжение

$$S_{стар} = 2 \cdot \frac{R^2 \cdot \sin\alpha}{2}$$



где $\alpha = 2 \cdot \arccos \frac{1}{2} =$

$= 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$



$S_{стар} = 2 \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{3}$

тогда $S_{нов} = 4 \cdot \sqrt{3}$

Ответ: $S_{нов} = 4\sqrt{3}$

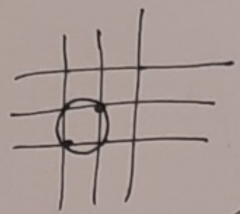
Черновик

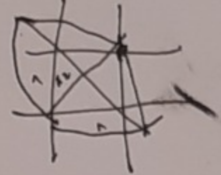
$a_1\ a_2\ a_3 \dots a_n$ $\quad a_6 \cdot a_{12} > S_{10}+1$ $\quad a_1 - ?$ $\quad \frac{1+3}{2} \cdot 3$

$S_1 -$ $\quad a_7 \cdot a_{11} < S_{10}+17$ $\quad \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10$

$1\ 3\ 5$

$5 = 1+2(3-1)$





$\sqrt{11} \in 3;4$

$CD \parallel O_1O_2$

$CD \parallel O_1O_2$

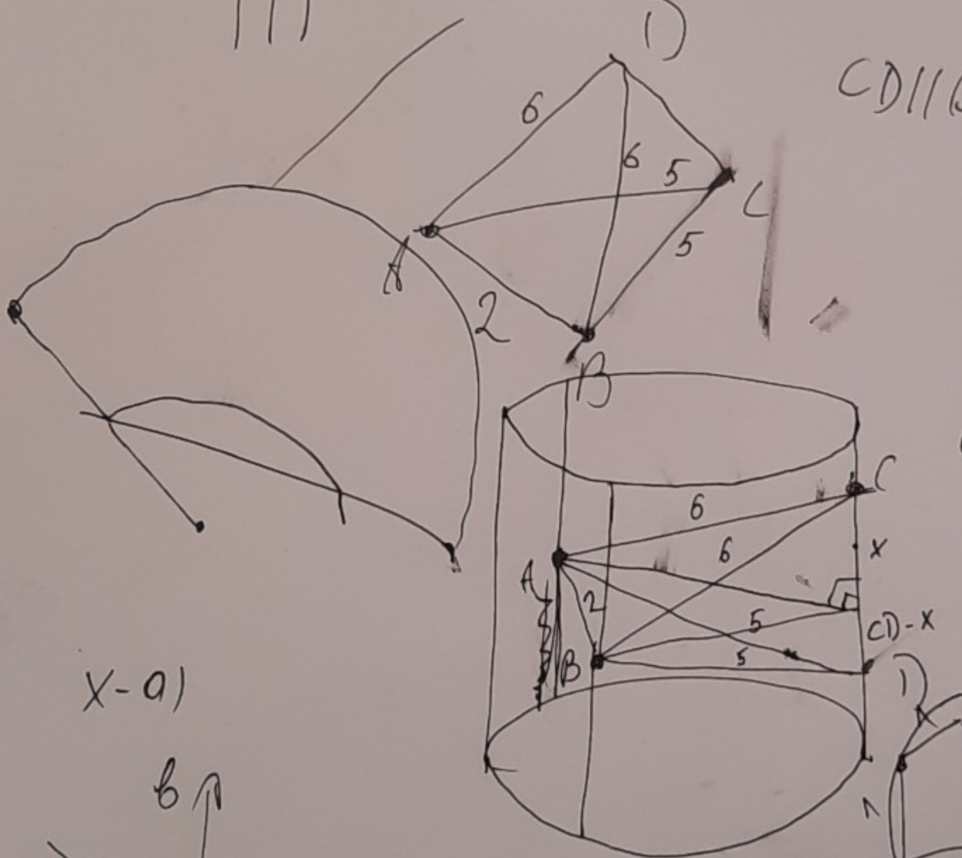
~~значит~~

$D \in$ б.пов $\quad C \in$ б.пов

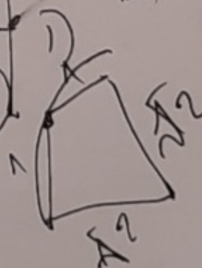
⇓

CD лежит на б. поверх

$\parallel O_1O_2$



$\min(2a+2b;\ 2)$

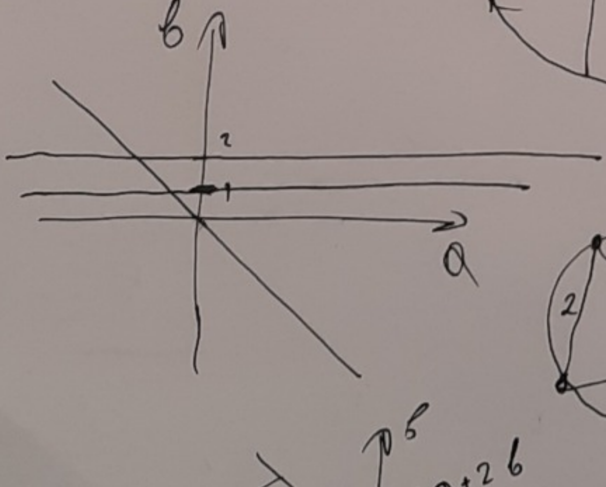


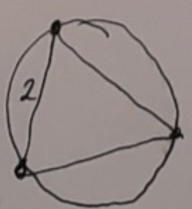
$2a+2b=0$

$2a=-2b$

$-a=b$

$X-a)$





$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2)$

$2a+2b \ge 2$ $\quad (a-1)$

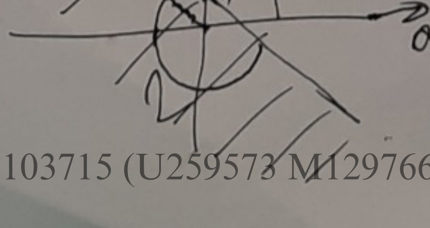
$2a-2 \ge -2b$ $\quad a^2$

$a-1 \ge -b$

$-a+1 \le b$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

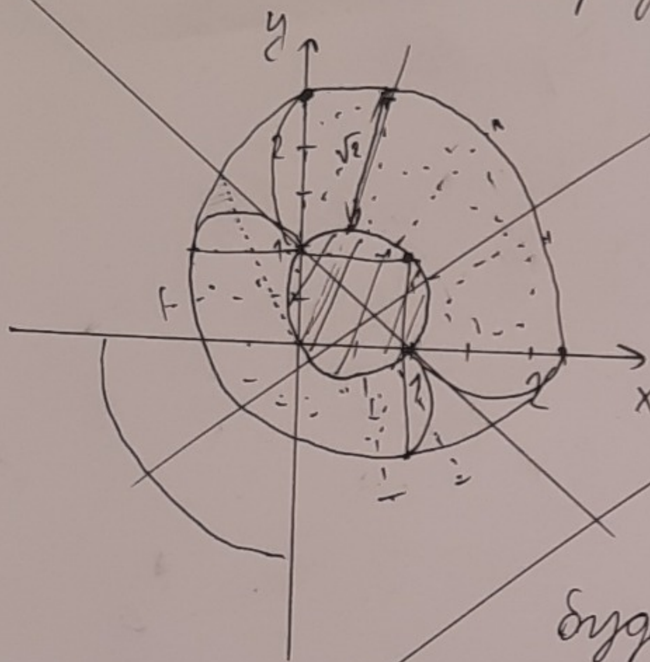
a^2-2a+1 $\quad +2 \quad -2$



1

Черновик

№3 продолжение



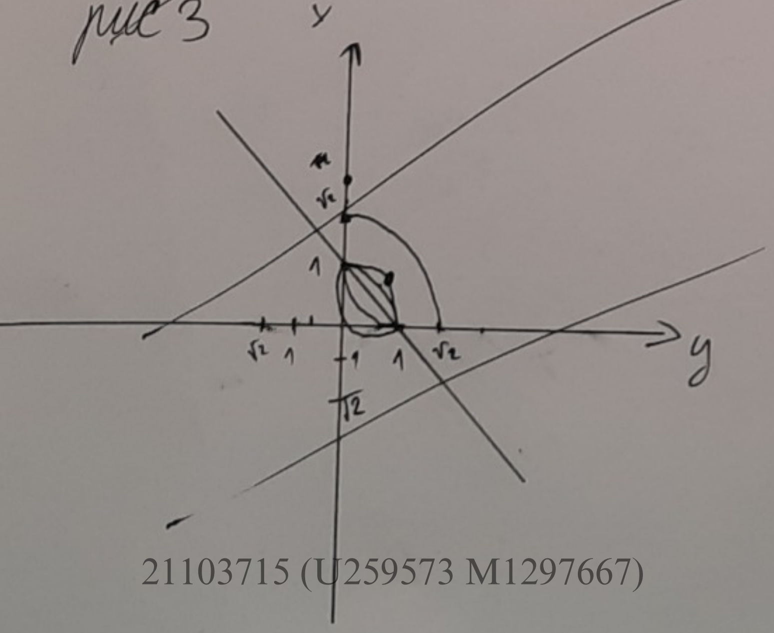
тогда новая ~~площадь~~ ~~площадь новой~~ фигуры будет подобна предыдущей т.к. каждая её точка была

тогда новая фигура будет образована перпендикулярами к кругу предыдущей длиной $= R = \sqrt{2}$

что равносильно что два сегмента круга ~~сферы~~ с радиусом равным $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ и центрами лежащими в точках $(1;1)$ и $(0;0)$ т.к. перпендикуляр (нормаль) к окружности есть продолжение радиуса окружности

рис 3

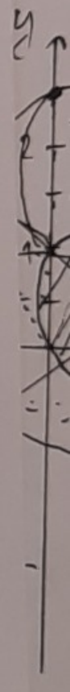
рис 3



Черновик

$a^2+b^2 \leq 2a+2b$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103715**

ID профиля: **259573**

Вариант 17

Чистовик

№4

Пусть $a = 2^{a_1} 3^{a_2}$

$b = 2^{b_1} 3^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2}$

В ~~кажд~~ тройке $(a_1 b_1 c_1)$ хотябы одно число равно 1 и хотябя одно равно 15

В тройке $(a_2\ b_2\ c_2)$ хотябы одно число равно 1 и хотябы одно равно 15

В первой тройке ~~тройке~~ если числа разные то ~~то~~ таких троек $13 \cdot 3! = 78$, а если есть две ~~..~~повторяющися 1 и ~~..~~ повторяющя 15, то таких трок $3+3=6$ Значит всего ~~троек~~ таких троек $78+6=84$

Аналогично вторых троек

$14 \cdot 3! + 6 = 90$

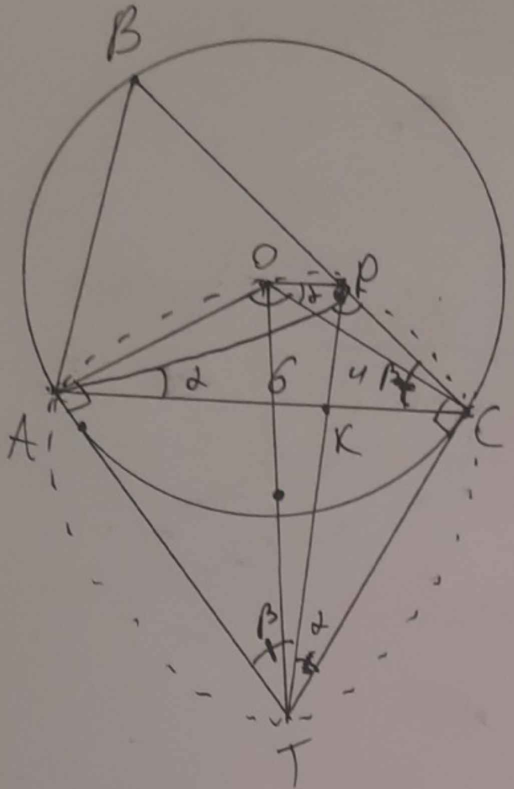
Значт всего пар троек $84 \cdot 90 = 7560$

Ответ: 7560

1

Чистовик

№6



AOPC лежат на одной окружности по условию

AOCT – вписанный т.к $\angle A = \angle C = 90°$

тогда AOPCT – на одной окружности

тогда $\angle PTC = \angle PAC$

$\angle PTA = \angle PCA$

тогда из $\triangle PAC$ $\angle APC = 180 - \alpha - \beta$

из $\square AOCT$ $\angle AOC = 180 - \alpha - \beta$

тогда $\angle ABC = \frac{180 - \alpha - \beta}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$

① $\frac{S_{\triangle PCK}}{S_{\triangle PKA}} = \frac{KC \cdot \frac{1}{2} \cdot h}{AK \cdot \frac{1}{2} \cdot h} = \frac{4}{6}$ $\frac{KC}{AK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

② проведем OT тогда OT – диаметр ~~A~~ синтей окружности т.к $\angle OCT = 90°$

③ $\angle TPC = \frac{1}{2} \cup TC = \frac{1}{2} \angle AOC$

④ по гер окр (W) : $\angle AB = \frac{1}{2} \angle AOC$ (впи и центр)

$\angle ABC = \angle TPC$

~~$\triangle ABC$ и KPC~~ ~~$\angle C$ общ~~

~~$\angle ABC = KPC \Rightarrow ABC \sim KB$ подоб~~

$\boxed{3}$ ②

21103715 (U259573 M1297668)

Чистовик

продолжение №6

$\triangle ABC$ и $\triangle KPC$ — $\angle C$ - общ

(ТРС)

$\angle ABC = \angle KPC \Rightarrow ABC \sim KPC$

по двум углам

тогда $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{3\left(AK + \frac{2AK}{3}\right)}{2AK}\right)^2 = \left(\frac{3AK+2AK}{2AK}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$KC = \frac{2AK}{3}$ $AC = AK + KC$

$S_{\triangle ABC} = 4 \cdot \frac{25}{4} = 25$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 25$

3

Чистовик

№5

$a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$b = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$c = \log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)$

пусть $a = b = c+1$

тогда

$\cancel{\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}$

$\cancel{\log_{5x-1} 4x+1 = \log_{4x+1} \frac{x}{2}+2}$

$\cancel{\frac{1}{\log_{4x+1} 5x-1} = \log_{4x+1} \frac{x}{2}+2}$

$\cancel{\frac{1-\log_{4x+1} \frac{x}{2}+2 \log_{4x+1} 5x-1}{\log_{4x+1} 5x-1} = 0}$

$\cancel{1 = \log_{4x+1} \frac{x}{2}+2 \cdot \log_{4x+1} 5x-1}$

условия:

$5x-1>0$ $\quad 5x-1 \neq 1$

$5x>1$ $\quad 5x \neq 2$

$x > \frac{1}{5}$ $\quad x \neq \frac{2}{5}$

$4x+1>0$ $\quad \frac{x}{2}+2 \neq 0$

$4x>-1$ $\quad \frac{x}{2} \neq -2$

$x > -\frac{1}{4}$ $\quad x \neq -4$

$\frac{x}{2}+2>0$ $\quad \frac{x}{2}+2 \neq 1$

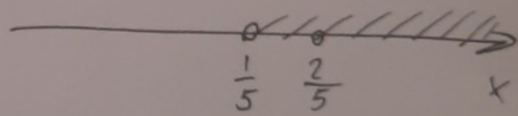
$x>-4$ $\quad \frac{x}{2} \neq -1$

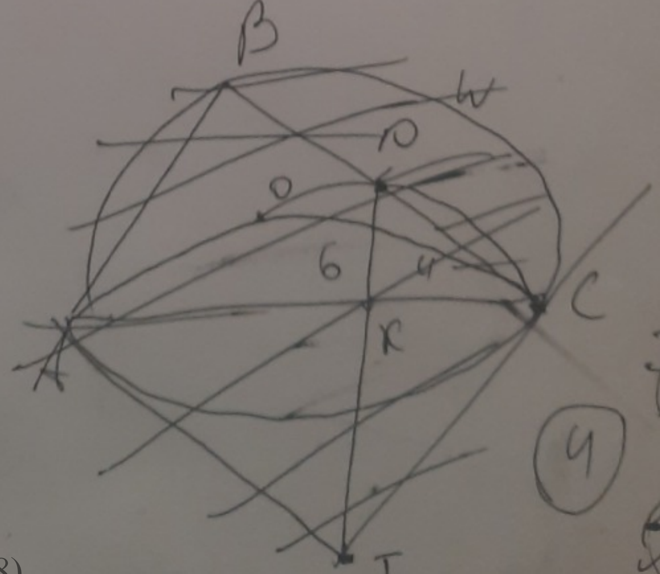
$x \neq -2$

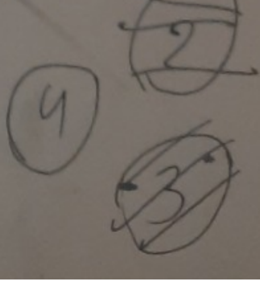
$4x+1 \neq 1$

$4x \neq 0$

$x \neq 0$







21103715 (U259573 M1297668)

Чистовик

№5 продолжение

очевидно, что $a \cdot b \cdot c = 4$

тогда пусть равные числа $= t$

тогда третье $t+1$

тогда

$t^2(t+1) = 4$

$t^3 + t^2 = 4$

$t^3 + t^2 - 4 = 0$

$t = 2$

$(t-2)(t^2+2t+2)$

$D = 4 - 4 \cdot 2 < 0$

$t^3 + t^2 + 0t - 4 \mid t-2$

$-\; t^3 - 2t^2 \qquad t^2 + 2t + 2$

$-\; 2t^2 + 0t$

$2t^2 - 4t$

$-\; 2t - 4$

$2t - 4$

0

$t = 2$

если $a = 2$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2$

$5x - 1 = 4x + 1$

$\boxed{x = 2}$

если $b = 2$

$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2$

$\frac{x}{2} + 2 = 4x + 1$

$x + 4 = 8x + 2$

$-7x = -2$

$x = +\frac{2}{7}$

если $c = 2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x - 1$

$\frac{x^2}{4} + 2x + 4 = 5x - 1$

$x^2 + 8x + 16 = 20x - 4$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$D = 144 - 4 \cdot 20 = 64 \qquad x_{1,2} = \frac{12 \pm 8}{2} = 10$

$= 2$

Ответ: $x = 2$ ~~x=2~~ $x = \frac{2}{7}$ $x = 10$

5

21103715 (U259573 M1297668)

Черновик

$НОД(a\,b\,c) = 6 = 2^1 \cdot 3^1$

$НОК(a\,b\,c) = 2^{16} \cdot 3^{16}$

$НОД =$

	a	b	c
2	$\square^{1}$	$\square^{k}$	$\square^{16}$
3	$\square^{1}$	$\square^{n}$ 14 чисел	$\square^{16}$

$\dfrac{\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1}{\log_{4x+1} \frac{x}{2}+2} = 1$ 1 1 16

1 1 n 16

11 16 1 16 16

11 16 1 1 16

$\dfrac{\lg b}{\lg a} = \dfrac{\lg c}{\lg b}$ $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 14 \cdot 14 + 2(3 \cdot 14 + 3 \cdot 14) + 2 + 2 + 2 + 2$

$\log_a b^2$

$\log_b c^2$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ $\log_c a$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $\log_b b^2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$2\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = \log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1$

$2^1 \cdot 2^2$

3^2 3^3

4 5

$2^{\text{наим}} \cdot 3^{\text{наим}}$ $2^{\text{наиб}} \cdot 3^{\text{наиб}}$

$k \in 2;15$

14 чисел

$\log_2 4 = x$

~~3·3·14·14 + 3·~~

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 14 \cdot 14 + 2(3 \cdot 14 + 3 \cdot 14) +$

$+ 2 + 2 + 2 + 2$

a b c

a b c

a a a

a b

a

a b c

n k

14 × 14 = 56, 14 → 196 + 1

5, 27 × 8 = 216

17

197, 216, 197, 1512, 1944, 197, 40652

1

21103715 (U259573 M1297668)

Черновик

~~рассм~~ продолжение №4

~~рассмотрим случай когда первый столбик~~ - 1
~~второй~~

1 случай
ни k ни n $\neq 16, 1$, тогда комбинаций $3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1=$
$=27\cdot8$

и т.к вариантов k и n = 14
то $S=27\cdot8\cdot14\cdot14$

2 случай
или k или n равны или 1 или 16
тогда комбинаций $\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1}{2!\cdot2!}$
т.к числа повторения

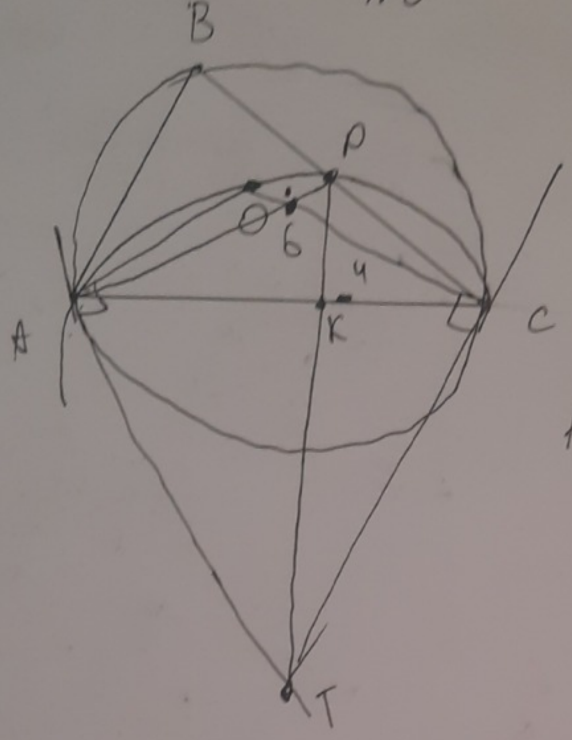
т.к n и k равны или 1 или 16
$S=\frac{3^3\cdot2^3}{4}\cdot2\cdot2=27\cdot8$

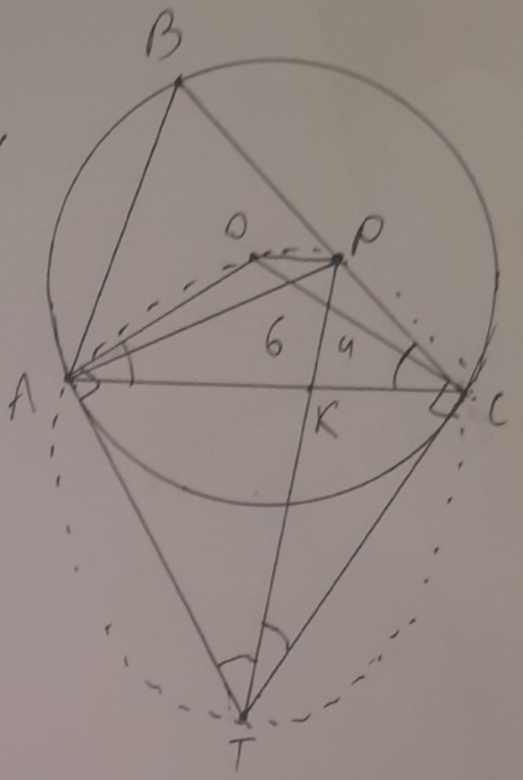
тогда $S=27\cdot8\cdot14\cdot14+27\cdot8=40652$

Ответ: 40652

Черновик

№6





21103715 (U259573 M1297668)

Черновик

$$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1) + \log_{\frac{x}{2}+2}\frac{x}{2}+2$$

2

Черновик

№4

НОД(а в с) = 6 = $2^1 \cdot 3^1$

НОК(а в с) = $2^{16} \cdot 3^{16}$

т.к НОК(а в с) содержит только 2^{16} и 3^{16} сами эти числа содержат в разложении на простые множители только 2 и 3

т.к НОД(а в с) = $2^1 \cdot 3^1$ наим степень 2 и 3 среди чисел = 1

т.к НОК(а в с) = $2^{16} \cdot 3^{16}$ наиб степень 2 и 3 среди чисел = 16,

тогда запишем степени двойки и тройки таблицей, тогда среди каждой строчки есть 1 и 16, и в третьем любое число

	a	в	c
2	1	k	16
3	1	n	16

1 случай если в третьем не 1 и не 16

случаев = $\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{комбинаций } 16, 1, n \text{ и } k} \cdot \underbrace{14 \cdot 14}_{\text{вариаций } k \text{ и } n}$

2 случай если n или k = 1 или 16 ① если только одно из чисел 1 или 16 — $(3 \cdot 14 + 3 \cdot 14) \cdot 2$ т.к таким числом может быть 2

перестановок

вариаций другого числа

② если каждое из n и k = 16 или 1:

1 1