Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103689**

ID профиля: **171779**

Вариант 17

Чистовик | №1 17) пусть d - разность $\Rightarrow a_6 a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 >$

$> S+1$

$a_7 a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < S+17$

сложим неравенства : $a^2 + 16a_1 d + 55d^2 + S + 17 > a^2 + 16a_1 d + 60d^2 + S + 1$

$16 > 5d^2$

$3,2 > d^2$

т.к. $d > 0$, $d < \sqrt{3,2}$ и последовательность целых чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1$

2) $S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9d) = 10a_1 + 45 \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases} \Rightarrow$ т.к. a_1 - целые, то $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$

1

Scanned by TapScanner

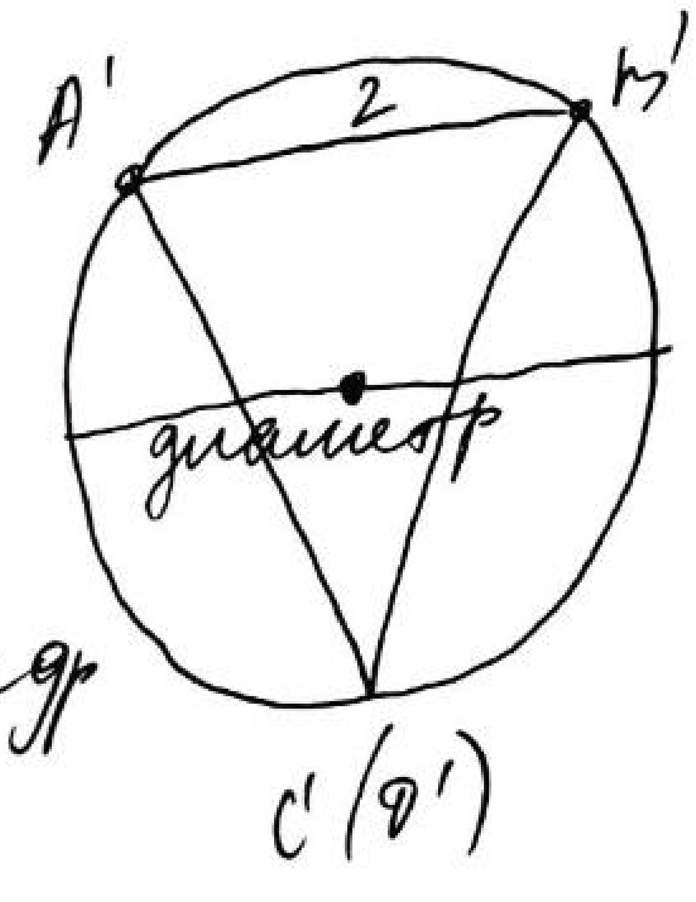
Чистовик | №2: 1) ~~рассмотрим проекцию на основание цилиндра~~

так как все вершины лежат на боковой поверхности цилиндра, а ребро CD должно быть параллельно оси цилиндра, значит ребро CD целиком принадлежит боковой поверхности цилиндра.

2) так как треугольники ABD и ABC ~~подобные~~ равнобедренные (AB в обоих является основанием), то скрещивающиеся прямые CD и AB перпендикулярны (если N – середина AB, то DN перпендикулярна AB; CN перпендикулярна AB, значит плоскость $(CDN) \perp AB$)

3) рассмотрим проекцию ~~плоскости~~ на основание цилиндра: точки C и D совместятся. Так как AB и CD перпендикулярны (а также ось цилиндра перпендикулярна его основанию), то отрезок $A'B'$ будет тоже равен 2 (где A' и B' проекции точек A и B)

4) так как $A'B' = 2$, то диаметр основания не может быть меньше 2. Так как в условии дальше рассматривается цилиндр с меньшим радиусом, значит рассматриваемый цилиндр имеет диаметр равный 2, то есть радиус равный 1.



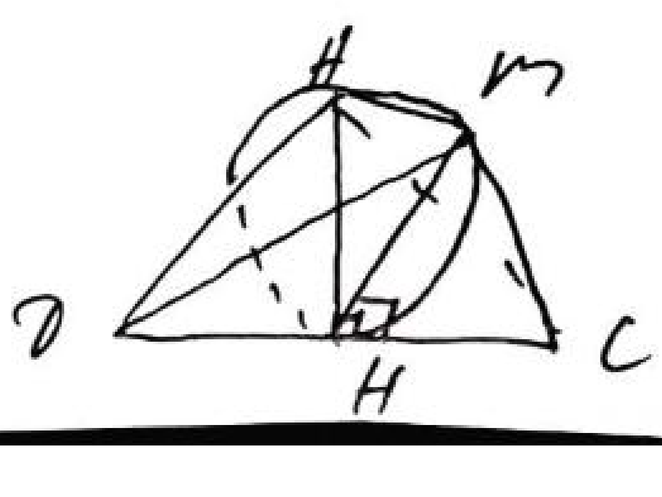
5) так как плоскость ~~(A'B'C')~~ проекции перпендикулярна ~~перпендикулярна~~ ребру CD, то отрезок $A'C'$ равен длине высоты опущенной из точки A на CD (аналогично $B'C'$: который равен высоте из B на CD). В силу равенства треугольников CDA и CDB основания данных высот совпадут. Пусть H – точка основания этих высот; получаем, что $AH = A'C'$, $BH = B'C'$. Однако, так как $A'B' = 2$ является диаметром, то $AH = BH = \sqrt{2}$.

6) тогда из теоремы Пифагора из треугольников DBH и CBH находим отрезки DH и HC: $\triangle DBH$: $DH = \sqrt{DB^2 - BH^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

$\triangle CBH$: $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{23}$



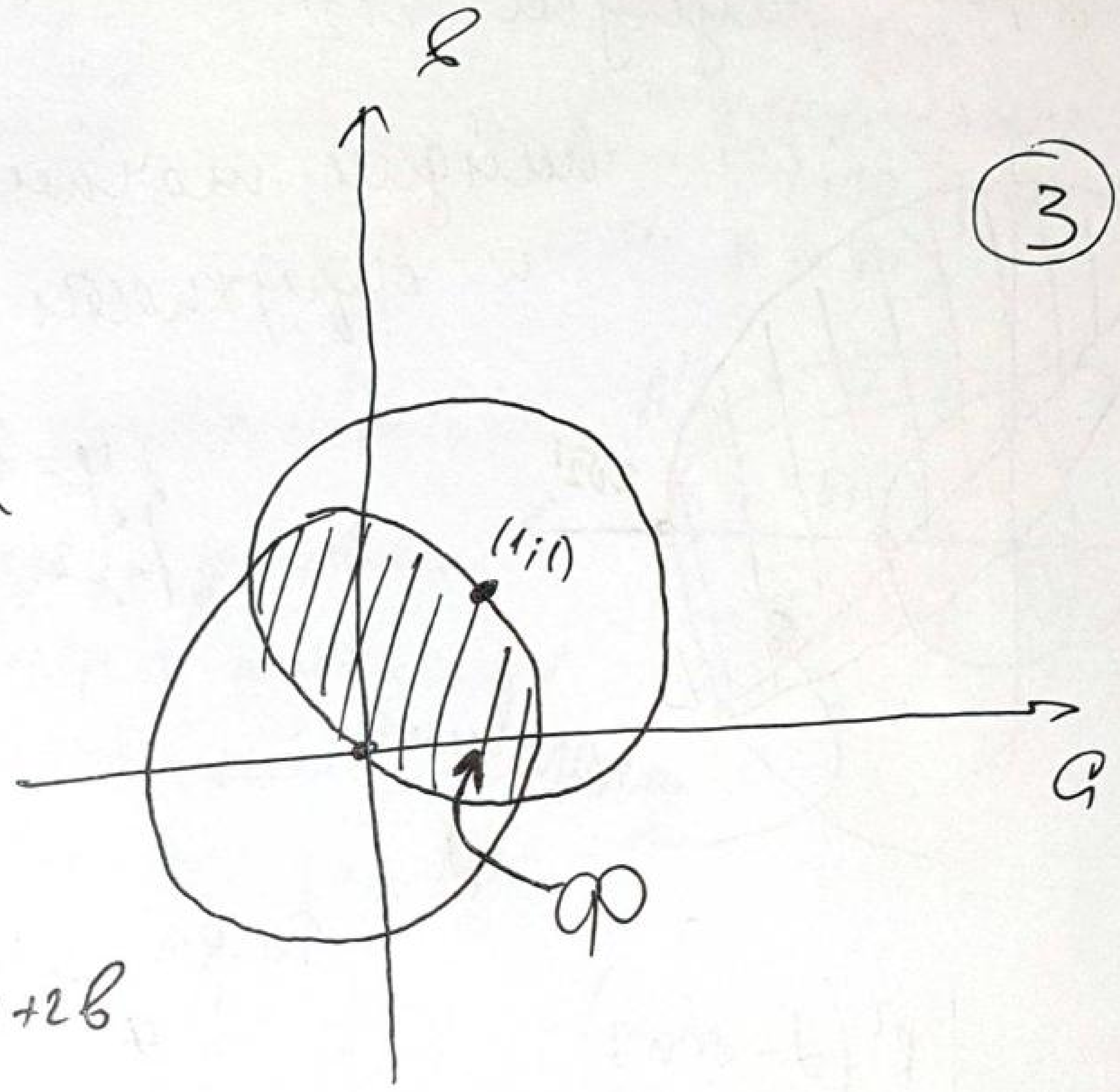
Чистовик | №3: 1) вначале рассмотрим второе неравенство:
~~[illegible]~~ множество пар $(a;b)$ ~~[illegible]~~ удовлетворяющих условию
$a^2+b^2 \le 2$ - это множество точек плоскости Oab, расстояние от которых до начала координат не больше $\sqrt{2}$

множество $(a;b)$ удовлетворяющих условию

$$a^2+b^2 \le 2a+2b \Leftrightarrow a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$$

это множество точек плоскости Oab, расстояние от которых до точки $(1;1)$ не больше $\sqrt{2}$



3

условие $a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)$ равносильно системе $\begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases}$

следовательно множество точек $(a;b)$ на плоскости Oab, удовлетворяющих второму неравенству из условия задачи равно пересечению внутренностей двух кругов с радиусами $\sqrt{2}$ (заметим, что центр первой граничной окружности лежит на второй и наоборот). Назовем полученную фигуру фигурой Ф.

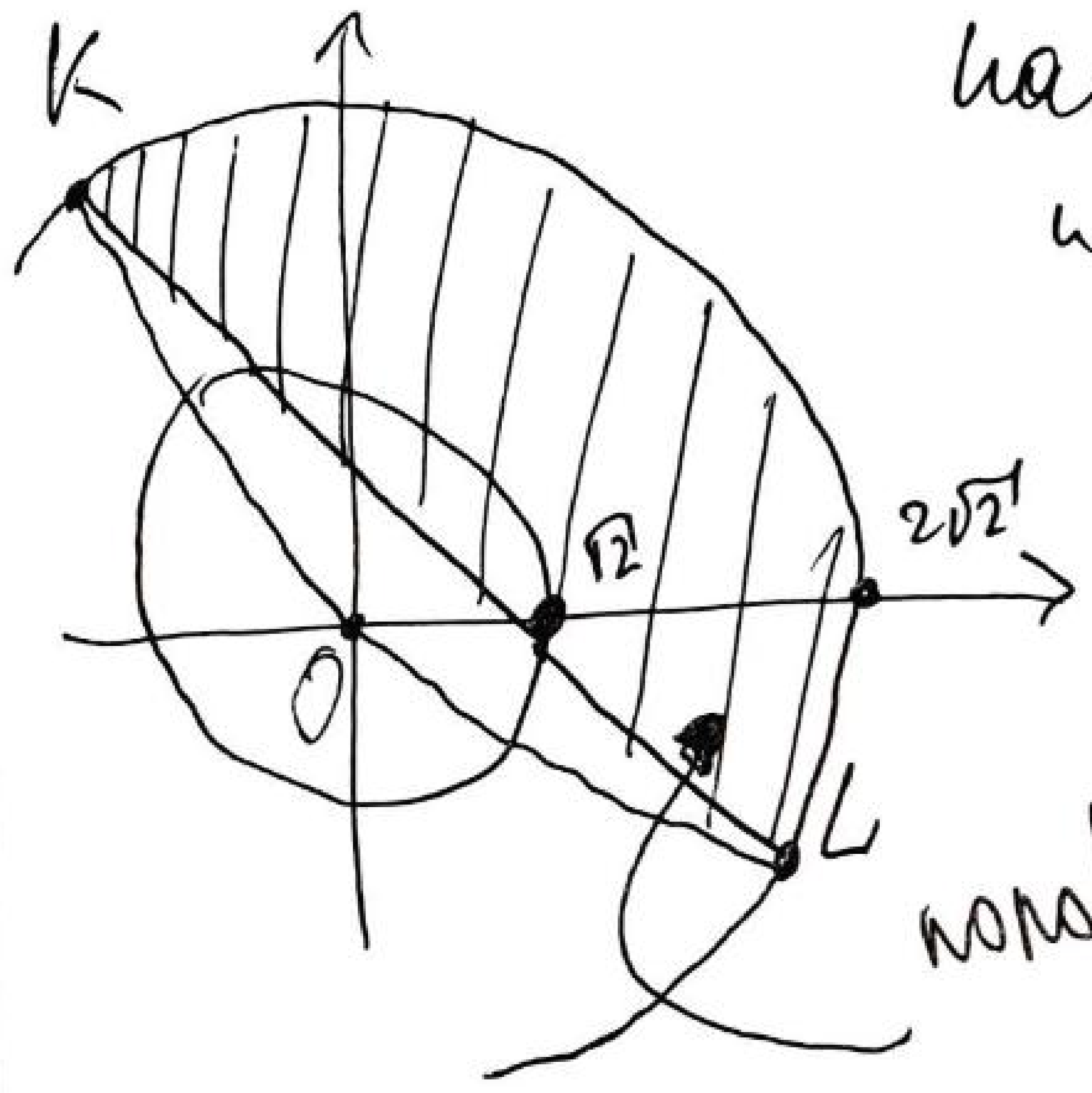
2) рассмотрим плоскость Oxy. ~~[illegible]~~ Если на плоскости Oxy нарисовать фигуру Ф, то множество точек фигуры M - это точки плоскости Oxy, минимальное расстояние от которых до точек фигуры Ф не больше $\sqrt{2}$.

Чистовик

другими словами, возле каждой точки фигуры Ф нарисован круг радиуса $\sqrt{2}$.

(4)

3) фигура Ф симметрична относительно прямой $y=1-x$, а поскольку фигура M получается из фигуры Ф «пририсовыванием» кругов радиуса $\sqrt{2}$, значит фигура M тоже симметрична относительно прямой $y=1-x$. Рассмотрим одну из половин фигуры M, отсечённую прямой $y=1-x$, это отсечённый сегмент от круга радиуса $2\sqrt{2}$.



половина M

найдем точки пересечения прямой $y=1-x$ и окружности радиуса $2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} y=1-x \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2}; \frac{1+\sqrt{15}}{2}\right)}_{K}, \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2}; \frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)}_{L} \right\}$$

$$S_{сегм.} = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$$

Тогда $\angle KOL$: $\cos\angle KOL = \frac{\vec{OK}\cdot\vec{OL}}{|OK|\cdot|OL|} =$

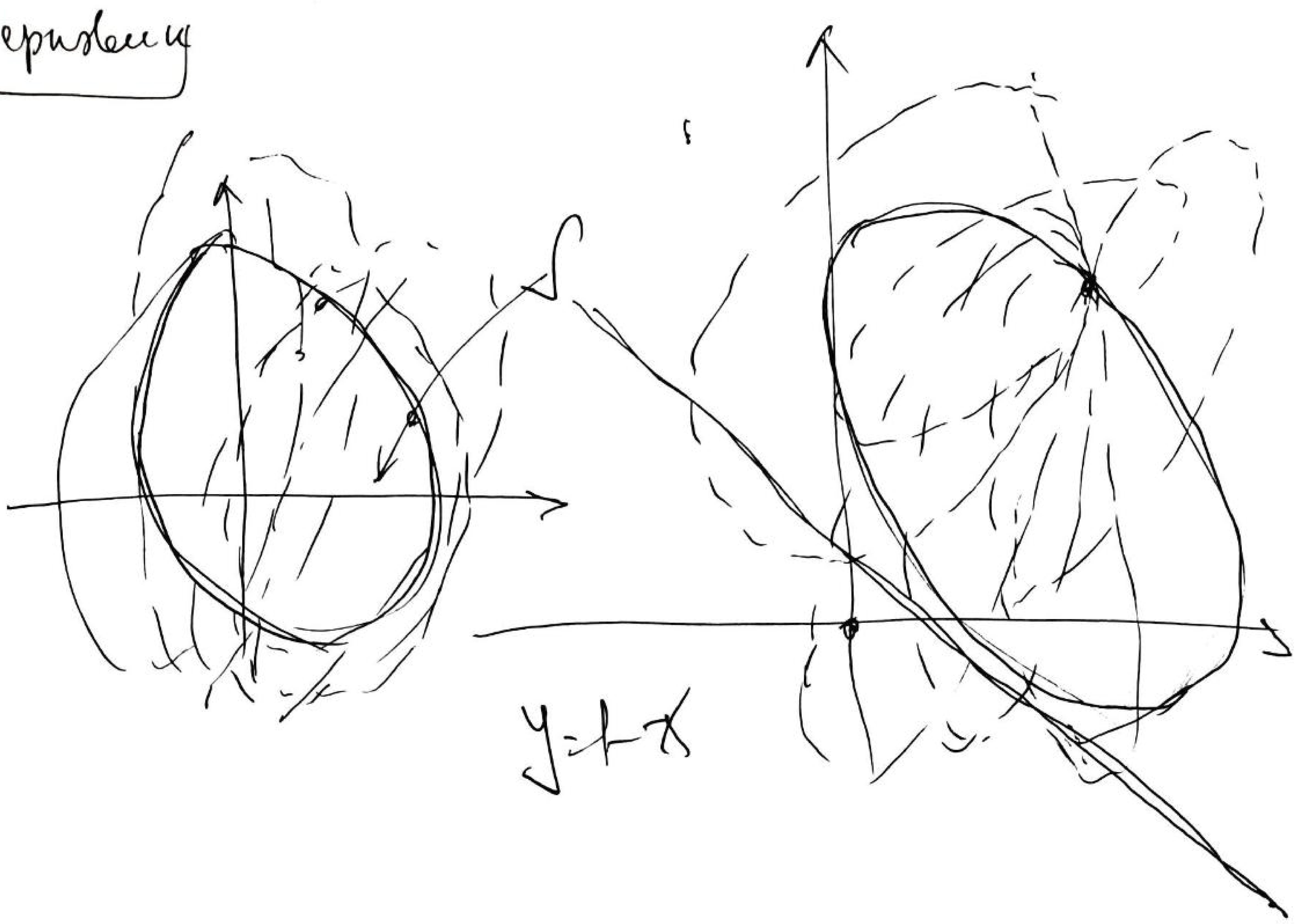
$$= \frac{-\frac{7}{2}-\frac{7}{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{-7}{8} \Rightarrow S_M = 2S_{\text{половины } M} = 2S_{\text{сегм. } \angle KOL} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\left(\arccos\left(-\frac{7}{8}\right) - \sin\left(\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)\right)\right) =$$

$$= 8\cdot\left(\arccos\left(-\frac{7}{8}\right) - \sin\left(\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)\right)\right)$$

Ответ: $8\left(\arccos\left(-\frac{7}{8}\right) - \sin\left(\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)\right)\right)$.

Черновик



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103689**

ID профиля: **171779**

Вариант 17

Чистовик | №4: пусть $a = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3}$

причём α_i, β_i, γ_i – натуральные числа (т.к. НОК содержит только 2 и 3 в качестве простых множителей).

(1) Тогда $НОД(a,b,c) = 6 \iff \begin{cases} \min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1 \\ \min(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = 1 \end{cases}$

$НОК(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \iff \begin{cases} \max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 15 \\ \max(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = 16 \end{cases}$

1) рассмотрим $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. пусть $\alpha_2 = 1 (\min)$, $\beta_2 = 15 (\max)$,

$2 \leq \gamma_2 \leq 14 \Rightarrow 13$ вариантов

меняя местами $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ получаем $13 \cdot 6! = 13 \cdot 24 = 312$ троек $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, где все числа различные. Добавим тройки с повторениями: $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (1;15;15); (15;15;1); (1;1;15);$ $(1;15;1); (15;1;1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 312 + 6 = 318$ различных троек $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

2) аналогично $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$: $14 \cdot 6!$ троек с разными числами + 6 троек с повторениями $\Rightarrow 342$ различные тройки $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$

3) тройка (a, b, c) однозначно задается выбором тройки $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ и выбором тройки $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, следовательно всего троек чисел $(a; b; c)$ равно $318 \cdot 342 = 108756$

Ответ: 108756

Чистовик | N5: пусть $A=\log_{5x-1}(4x+1)$, $B=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$; $C=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

тогда ~~начальность~~ набор чисел $2A, 2B, C$

Заметим, что $ABC=1$ (2)

1 сл.) ~~[illegible]~~

пусть $2A=C=2B+1 \Rightarrow 2A=2B+1 \Rightarrow A-B=\frac{1}{2}$

$A=B+\frac{1}{2} \Rightarrow B(2B+1)\left(B+\frac{1}{2}\right)=1$

$\ldots \; B(2B+1)^2=2$

$A=1;\ B=\frac{1}{2};\ C=2$

$x=2$

~~[illegible]~~

$$\begin{cases} 5x-1 \geqslant 4x+1 \Leftrightarrow x\geqslant 2 \\ 5x-1 \geqslant \frac{x}{2}+2 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{2}{3} \\ 4x+1 \geqslant \frac{x}{2}+2 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{2}{7} \end{cases}$$

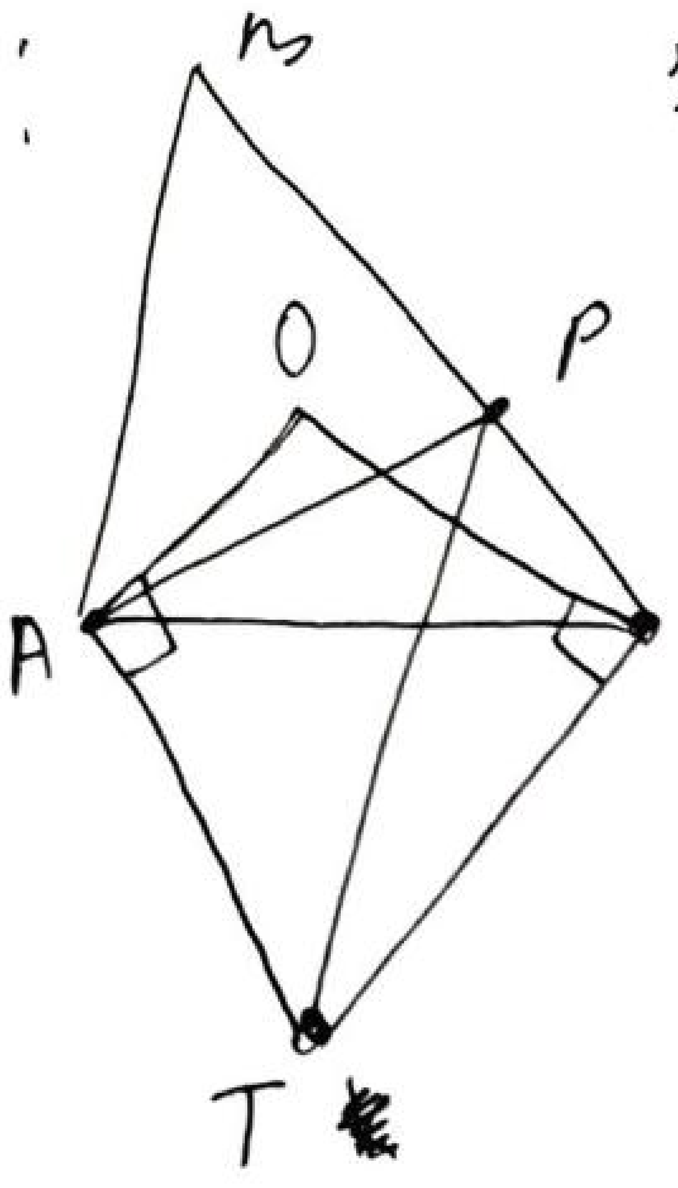
2сл.) пусть $\begin{cases} 2A=2B=C+1 \\ ABC=1 \end{cases} \Rightarrow A=B=C=1$, нет $x_{\text{общего}}$

3 сл.) пусть $\begin{cases} 2B=C=2A+1 \\ ABC=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2};\ B=1;\ C=2$ ← нет x общего

Ответ: 2

Чистовик

№6:



3

1) четырёхугольник $AOCT$ вписанный (сумма противоположных углов $180°$). Так как точка P лежит на окружности, описанной около треугольника AOC, то все точки A, O, P, T, K лежат на одной окружн.

2) Так как $AT = TC$ (касательные к одной окружности из одной точки), то углы $\angle APT = \angle CPT$ тоже равны (опираются на равные хорды). Тогда из отношения площадей $\triangle APT$ и $\triangle CPT$ получаем $AP/CP = 3/2$

3) если $\angle AOC = 2x$, то углы $\angle ABC = x$ (вписанный на ту же дугу). Тогда углы $\angle BPA = 180° - 2x$ (так как углы $\angle AOC = \angle APC = 2x$), а значит $\angle BAP = x$. Получаем, что треугольник ABP равнобедренный $BP = PA$, а из пункта (2) получаем $BP : PC = 3 : 2$.

Черновик)

$\log(a;b;c)=6$

$\text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}$

$b = \dots$

$c = \dots$

$a \vdots 6$

$b \vdots 6$

$c \vdots 6$

$2^{15}\cdot 3^{16} \vdots a$

$2^{15}\cdot 3^{16} \vdots b$

$2^{15}\cdot 3^{16} \vdots c$

$\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)=1$

$\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)=1$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$2\log_{5x-1}(\dots)=2\log\dots(\dots)$

$\frac{1}{\log_{4x+1}(\dots)}-\log_{4x+1}(\dots)=0$

$A=\log_{5x-1}(\dots)$ $\quad 2A$

$B=\log_{4x+1}(\dots) \Rightarrow 2B$

$C=\log_{\frac{x}{2}+2}(\dots)$ $\quad C$

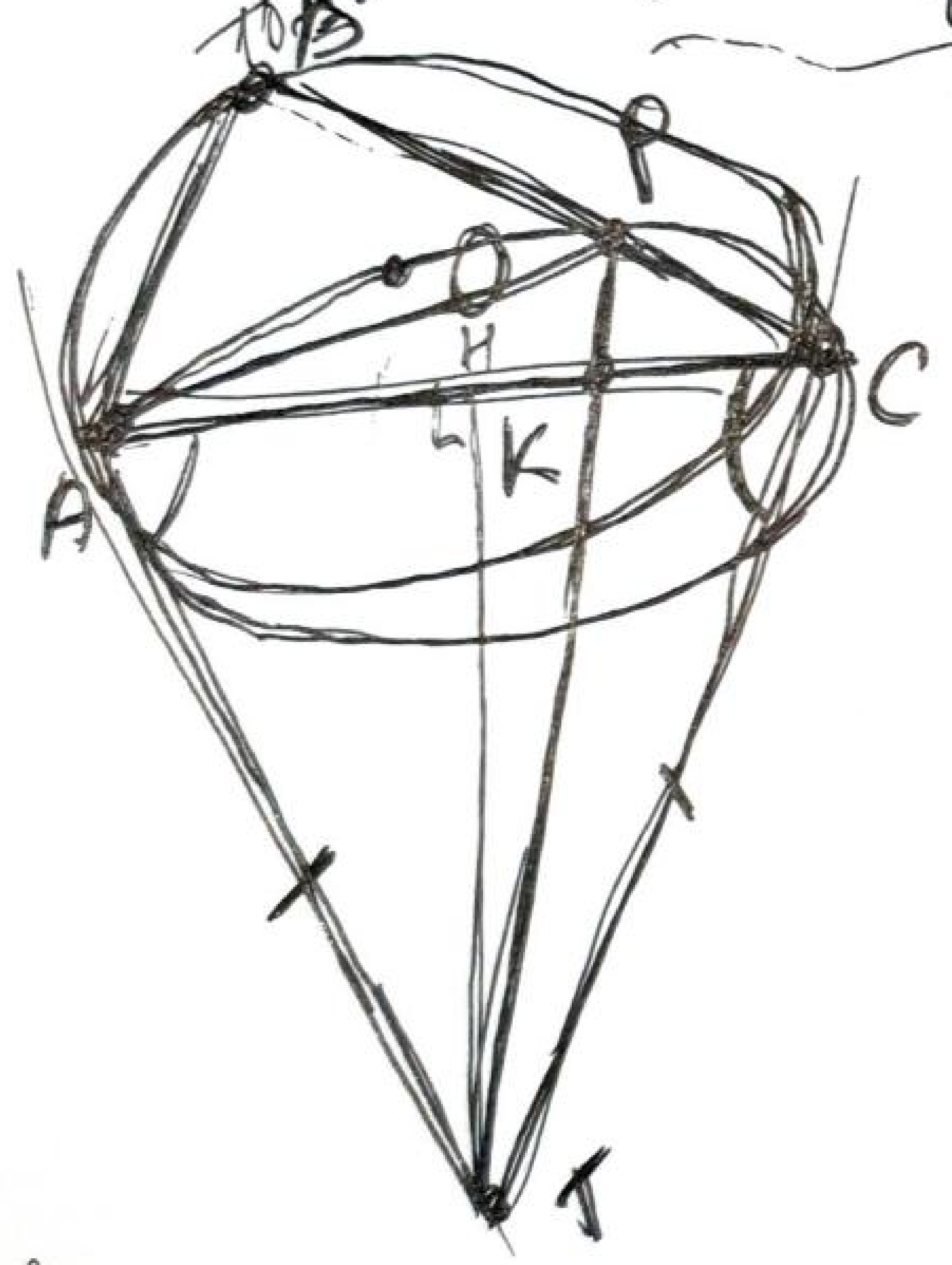
$\frac{1-\log_{4x+1}(x/2+2)\cdot\log_{4x+1}(5x-1)}{\log_{4x+1}(\dots)}=0$

$\frac{1-(\dots)}{\log_{4x+1}(\dots)}=0$

$\begin{array}{r} 318 \\ \times 342 \\ \hline 636 \\ 1272 \\ 954 \\ \hline 108756 \end{array}$

$\log_{5x-1}(4x+1)\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1$

$ABC=1$



$S_{APK} : S_{CPK} = 6:4 \Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{3}{2}$

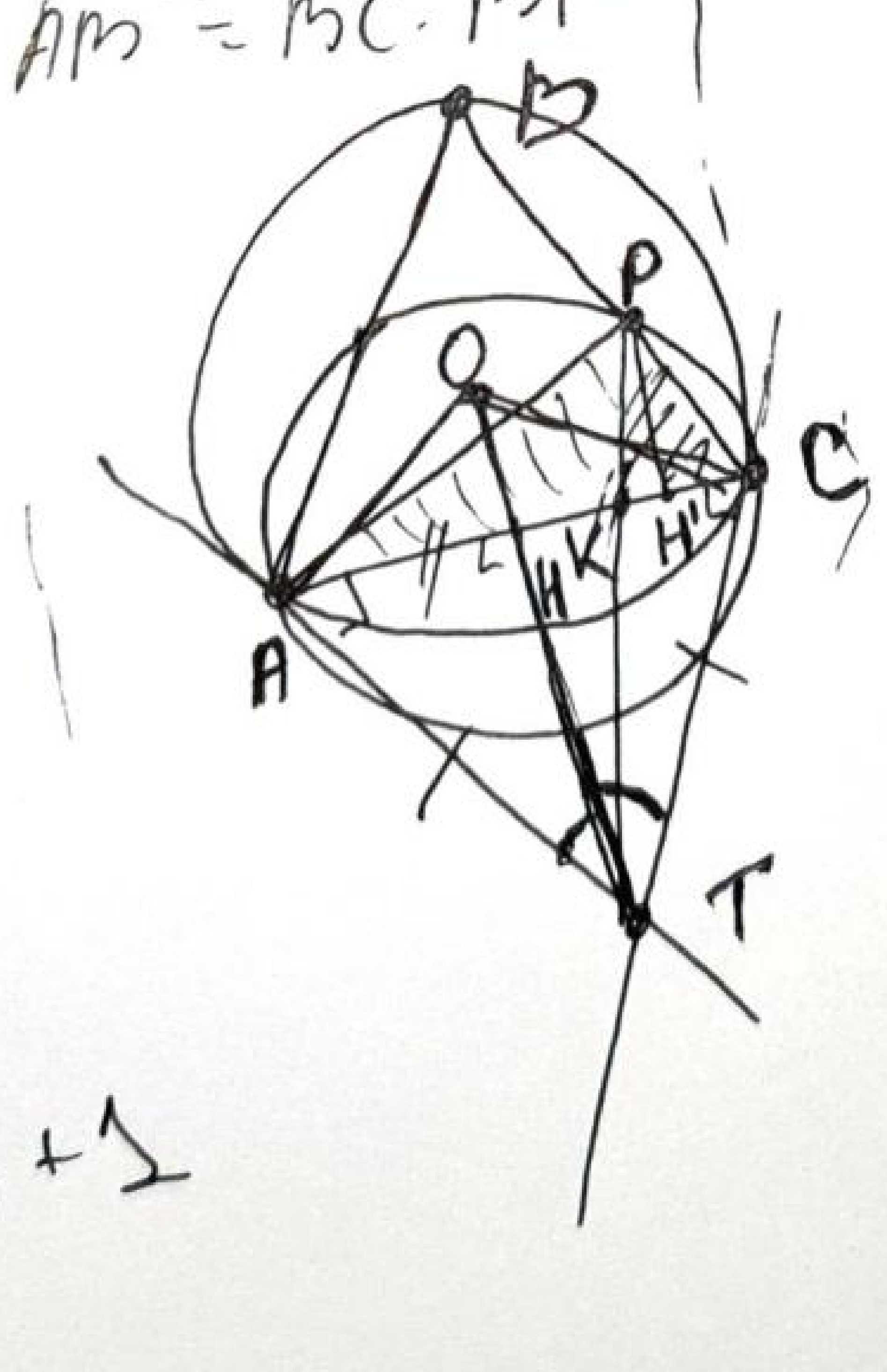
$AK=3x$

$KC=2x$

$AC=5x$

$S_{ABC}-?$

$AB^2=BC\cdot BP$



$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}}=\frac{BH'}{BH}=\frac{r}{R}$

$\frac{AB}{\sin\angle C}=2R$

$\frac{AP}{\sin\angle C}=2r$

$\frac{r}{R}=\frac{AP}{AB}$

1сл.) $2A=C=2B+1$

2сл.) $2A=2B=C+1$, $ABC=1$

3сл.) $2B=C=2A+1$, $ABC=1$

Scanned by TapScanner