# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103606**

ID профиля: **53536**

Вариант 17

Чистовик

№1

$a_1$ – первый член
$b$ – разность прогр. $(b>0)$

$$\underbrace{a_1 \quad a_1+b \quad \ldots \quad a_1+9b}_{S} = 10a_1 + \frac{9\cdot 10}{2} b = 10a_1 + 45b$$

$a_6 = a_1 + 5b$
$a_{12} = a_1 + 11b$
$a_7 = a_1 + 6b$
$a_{11} = a_1 + 10b$

---

$a_6 \, a_{12} > S+1$

$(a_1+5b)(a_1+11b) \cancel{\ldots} = a_1^2 + 11a_1b + 5a_1b + 55b^2 > 10a_1 + 45b + 1$

$(a_1+6b)(a_{1}+10b) = a_1^2 + 16a_1b + 60b^2 < 10a_1 + 45b + 17$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1b + 55b^2 > 10a_1 + 45b + 1 \\ a_1^2 + 16a_1b + 60b^2 < 10a_1 + 45b + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 + a_1^2 + 16a_1b + 55b^2 > 10a_1 + 45b + 17 \\ a_1^2 + 16a_1b + 60b^2 < 10a_1 + 45b + 17 \end{cases}$$

$16 + \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1}b + 55b^2 > \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1}b + 60b^2$

$16 > 5b^2$

$\frac{16}{5} > b^2$

прогрессия из целых чисел $\Rightarrow$ $b \in \mathbb{Z}$ и $b > 0$ (возраст.) $\Rightarrow$

$b = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \leftarrow \text{значит } a_1 \neq -3 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$$

21103606 (U53536 M1297011)

Чистовик

$a_1^2+6a_1-2<0$

корни

$a_1=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+4\cdot 2}}{2}=-3\pm\sqrt{9+2}=-3\pm\sqrt{11}$

$-3-\sqrt{11}\le a_1\le -3+\sqrt{11}$

причем $3<\sqrt{11}<4$ $\Rightarrow$ ~~$-3-3\le a_1\le -3+3$~~

~~$-6\le a_1\le 0$~~

$-3-4<-3-\sqrt{11}\le a_1\le -3+\sqrt{11}<1$

$-7\ \cancel{-6}<a_1<1$

$\boxed{-6\le a_1\le 0}$

Все ли вар-ты возможны?

$a_1=0\quad b=1$

$S=45b=45$

$a_6\cdot a_{12}=5\cdot 11>46$

$a_7a_{11}=60<45+17$

$a_1=-1\quad b=1$

$S=35$

$a_6a_{12}=4\cdot 10=40>36$

$a_7a_{11}=5\cdot 9=45<35+17$

$a=-2\quad b=1$

$S=25$

$a_6a_{12}=3\cdot 9=27>26$

$a_7a_{11}=4\cdot 8=32<25+17$

$a=-3\quad b=1$ ← ранее показали, что $a_1\ne -3$

$S=15$

$a_6a_{12}=2\cdot 8=16>16$ – нет $\Rightarrow$ не подх.

$a=-4\quad b=1$

$S=5$

$a_6a_{12}=1\cdot 7=7>6$

$a_7a_{11}=2\cdot 6=12<17+5$

$a=-5\quad b=1$

$S=-5$

$a_6a_{12}=0>-4$

$a_7a_{11}=1\cdot 5=5<-5+17$

$a=-6\quad b=1$

$S=-15$

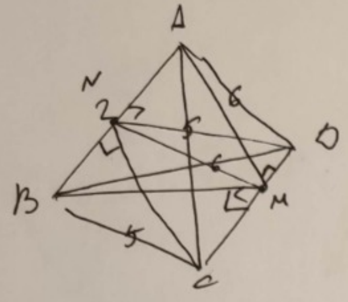
$a_6a_{12}=-1\cdot 5=-5>-15+1$

$a_7a_{11}=0<-15+17$

**Ответ:** подходят $a_1=0;-1;-2;-4;-5;-6$.

21103606 (U53536 M1297011)

№2. Чистовик




Окружность цилиндра ⊥ ~~боковому~~ оси => CD ребру. Тогда проведём плоскость через т. A ⊥ CD. Она пересечет прямую CD в т. M (м. б. M ∈ CD или нет)

~~Тогда~~

Построим т. N – сер. AB.

в △ ABD и в △ ABC ~~CN – бисс~~, CN и DN – бисс. мед. и выс., т. к. AD = BD и AC = BC => CN ⊥ AB и DN ⊥ AB =>

=> CND ⊥ AB.

плоскость

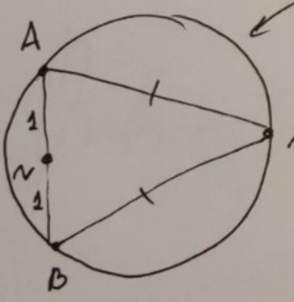
Но тогда, если AM ⊥ CD, и AN ⊥ NCD => по th о 3 перп.

MN ⊥ CD

Но тогда по th о 3 перп. BM ⊥ CD => ABM ⊥ CD

Значит, ABM ∥ окружности цилиндра.

Тогда спроецируем весь цилиндр ~~на основание~~ ∥ CD в плоскость ABM ~~на основание~~ (ABM ∥ основанию)



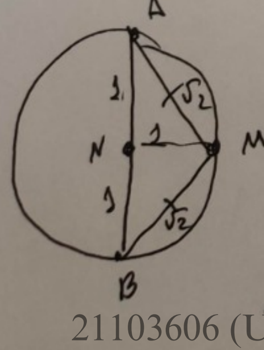

окружность

Т. к. AB ⊥ NCD и AN = NB и M ∈ NCD => AM = BM (A и B симметричны отн. плоскости NCD)

радиус цилиндра – радиус окр. ABM.

~~Он~~ Диаметр ABM ≥ хорды AB => min радиус цилиндра и => окружности ABM равен 1.

и тогда N – центр окружности.




Тогда в т. M попали проекции точек C и D на плоск. ABM.

Мы знаем AC и AD => можем найти MC и MD.

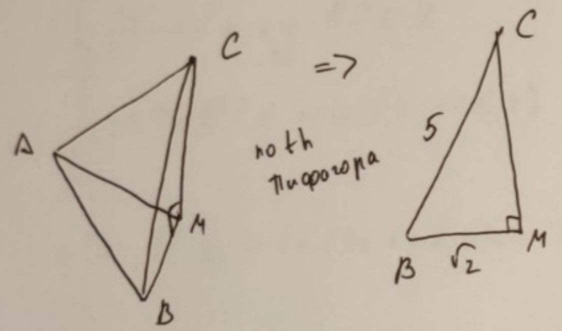
Т. к. в цилиндре min радиуса

$AM = \sqrt{2}$ ($\angle AMB = 90°$; $AM = MB$ и $AB = 2$)

21103606 (U53536 M1297011)

Чистовик

$\triangle AMC$ или $\triangle BMC$ – прямоугольные, т.к. $CMD \perp ABM$



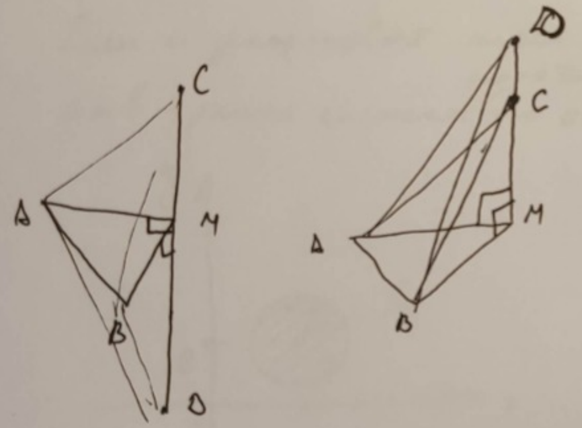
=> по th Пифагора

$CM = \sqrt{CB^2 - BM^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

Аналогично $DM = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$.

C и D могут лежать по одну сторону от M, а могут по разные. В зависимости от этого $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

или $CD = |CM - DM| = \sqrt{34} - \sqrt{23}$



Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{23}$ или $\sqrt{34} - \sqrt{23}$.

Чистовик

№3.

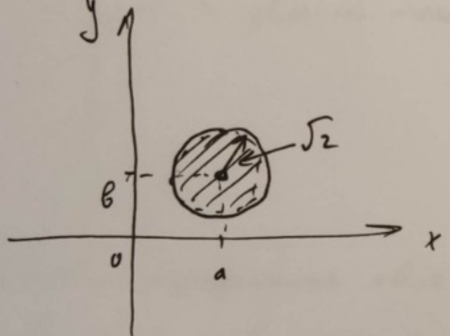
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$

$$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \iff \begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases}$$

Сначала рассм. условия:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases}$$

Если на декартовой плоск. есть какие-то $x$ и $y$ и существуют (хотя бы одно) $a$ и $b$ – реш-я системы, то отметим точку с коорд. $(a, b)$




Расст-е от неё до т. $(x; y)$ $\le \sqrt{2}$, т.к. расст-е от $(x, y)$ до $(a; b)$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \Rightarrow$

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \le \sqrt{2}$

Значит, $(x; y)$ может быть где-то внутри окружности (или на её границе) с центром в $(a; b)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

Но и на $(a; b)$ есть условия.

$a^2+b^2 \le 2 \Rightarrow$ от т. $(0; 0)$ до т. $(a; b)$ расст-е $\le \sqrt{2} \Rightarrow$ т. $(a; b)$ внутри (или на границе) окружности с центром $(0; 0)$ и радиу-сом $\sqrt{2}$.

Ещё одно усл-е: $a^2+b^2 \le 2a+2b$

$a^2-2a+b^2-2b \le 0$

$(a-1+1)(a-1-1)+(b-1+1)(b-1-1) \le 0$

$(a-1)^2-1+(b-1)^2-1 \le 0$

$\cancel{a-b)}\ \boxed{(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2}$

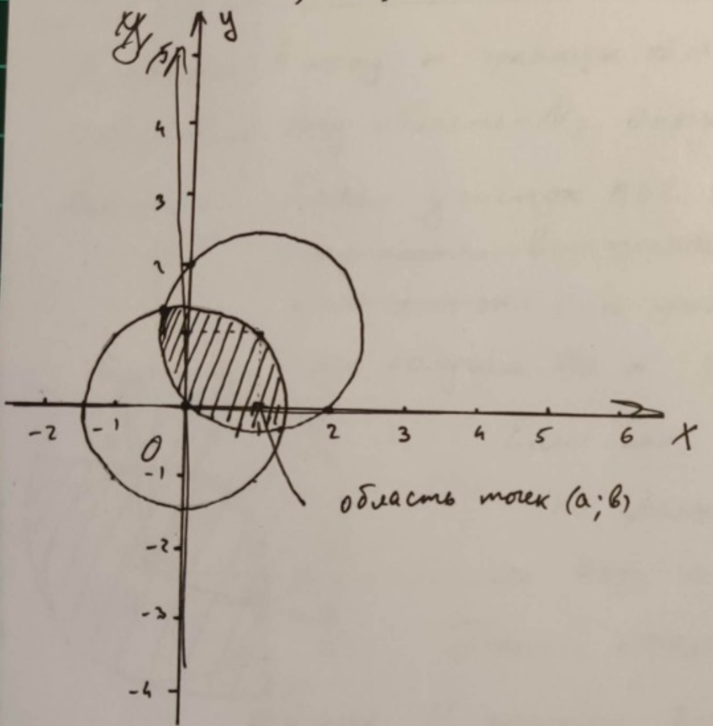
Чистовик

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \Rightarrow$

т. $(a;b)$ удалена от $(1;1)$ не более, чем на $\sqrt{2}$.

Итак, можно найти все подходящие под усл-е $a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$ $(a;b)$ и затем все т. ~~x и y~~ $(x;y)$ удалены от $(a;b)$ не более, чем на $\sqrt{2}$.

Мн-во $(a;b)$:




Точки $(a;b)$ удалены от $(0;0)$ на $\le \sqrt{2}$ и от $(1;1)$ на $\le \sqrt{2} \Rightarrow$ лежат в пересечении кругов с радиусами $\sqrt{2}$ и центрами в $(0;0)$ и $(1;1)$ ($\sqrt{2}$ – диаг. кв. со ст. 1) $\Rightarrow$ т. $(1;1) \in$ кругу с ц. $(0;0)$ и от $(0;0)$ до $(1;1)$ как раз $\sqrt{2}$

---

точки $(x;y)$ – все точки на $XOY$, удаленные от хотя бы какой-то т. $(a;b)$ на $\le \sqrt{2}$

Чтобы определить область фигуры $M$, можно в кажд. точке фигуры из всех $(a;b)$ провести окр. радиусом $\sqrt{2}$.

---

~~Нам нужно~~ Обозн. множества $M_0$ – точки, уд. от $(0;0)$ на $\le \sqrt{2}$

$M_1$ – от $1,1$

нам нужно $M$: ~~A~~ $(x;y) \in M$ удалены от какой-то т. из $M_0$ на $\le \sqrt{2}$ и от какой-то т. из $M_1$ на $\le \sqrt{2}$. Можно постр. окружности с рад. $\le \sqrt{2}$ из всех т. области перес. $M_1$ и $M_0$, а можно постр. все точки, удаленные от какой-нибудь из т. $M_0$ на $\le \sqrt{2}$ — $M_0'$;

от какой-нибудь т. $\in M_1$ на $\le \sqrt{2}$ – $M_1'$ и

$M = M_1' \cap M_0'$, т.к. т. из $M_0$ удалены на $\le \sqrt{2}$ от т. области пересечения $M_1'$ и $M_0'$.

Чистовик.

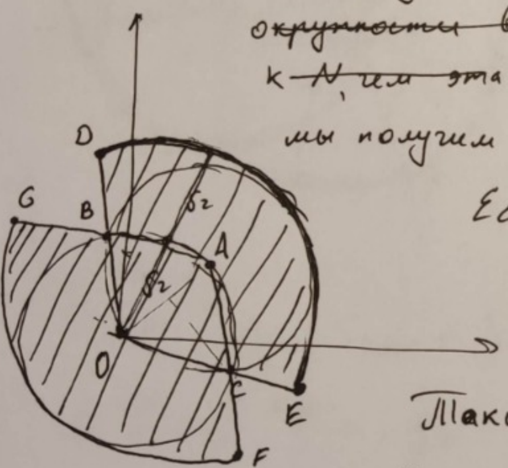
~~Если (x; y) удалено от (a; b) на $\le \sqrt{2}$, а (a; b) удалено от (0; 0) и (1; 1) на $\le \sqrt{2} \Rightarrow$ (x; y) удалено от (0; 0) и (1; 1) на $\le 2\sqrt{2}$.~~

~~Утверждается, что это мн-во M – это пересе-е окружн. с радиусом $2\sqrt{2}$ и центрами в (0; 0) и (1; 1)~~

---

Проведём в кажд. т. границы области пер-я окр. с рад. $\sqrt{2}$ и ц. (0; 0) и (1; 1) (обозначим эту область – N), окружность с радиусом $\sqrt{2}$.

~~все эти~~ Рассм. участок BAC границы N. ~~Когда мы проведём окружности в т. границы и возьмем всю область ближе к N, им эта~~ Если провести окр. с рад. $\sqrt{2}$ из т. на ней, то мы получим все т., удаленные от т. O на расст-е $2\sqrt{2}$.




Если мы проведем окр. с рад. $\sqrt{2}$ из точек не на границе, то внутри угла BOC ~~эти~~ эти окр. не дадут доп. точек фигуре M.

Таким образом, в углах $\angle BOC$ и $\angle BAC$ (аналог.) фигуре M принадл. все точки внутри окружности радиуса $2\sqrt{2}$ с центрами в O и A соответсвенно.

Обозначим т. D на OB: B-сер. DO и аналог. т. G, E, F.

Тогда какие точки в углах DBG и ECF $\in$ M?

$BD = BO$ и $BG = BA \Rightarrow BG = BD = \sqrt{2}$. $B \in N$.

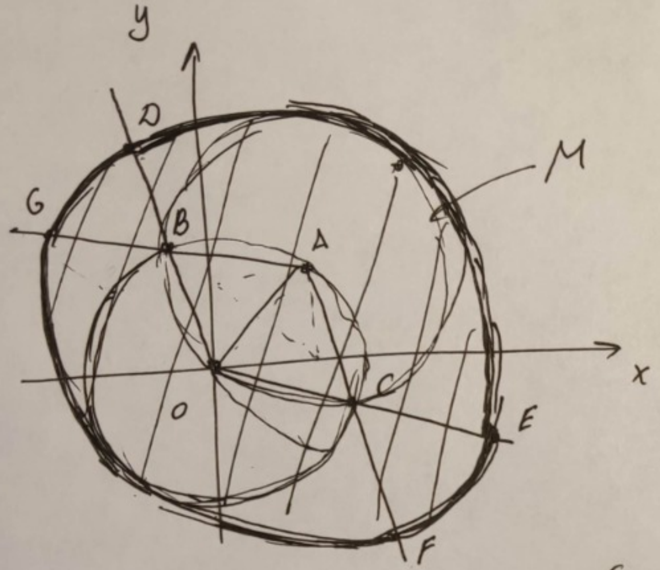
Все точки, кроме т. B, из мн-ва N лежат ~~все~~ вне угла DBG $\Rightarrow$ все точки, удаленные от т. $\in N$ на расст-е $\le \sqrt{2}$ лежат внутри участка круга с центром в т. B с радиусом $\sqrt{2} = BD = BG$.

Итого, фигура M:

21103606 (U53536 M1297011)

Чистовик

фигура М – пересечение ~~окружностей~~ кругов с центрами А и О
и радиусами $2\sqrt{2}$ – внутри углов BOC и GAF
И 2 кусочка круга с рад. $\sqrt{2}$ в т. В и С и в углах DBG и ECF.




Считаем площадь М
как сумму 4 секторов.

$OA = OB = AB = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\angle OBA = \angle DBG = 60° \Rightarrow$

$S_{BDG} = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{\pi \cdot 2}{6} = \frac{\pi}{3}$

$S_{CEF} = S_{BDG} = \frac{\pi}{3}$

$\angle BOC = 2\angle BOA = 120° \Rightarrow$

$S_{DOE} = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{120}{360} = \frac{\pi \cdot 8}{3} = \frac{8}{3}\pi$

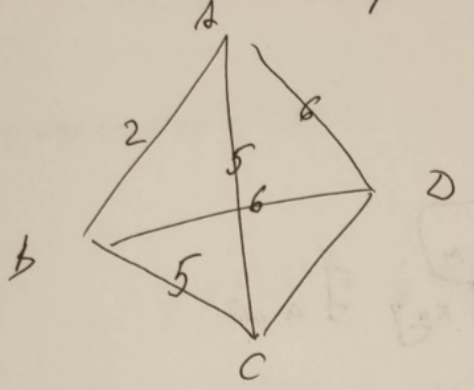
$S_M = S_{BDG} + S_{CEF} + S_{DOE} + S_{GAF} - S_{BACO} =$

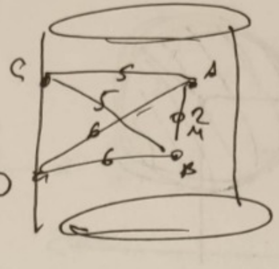
$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{8}{3}\pi + \frac{8}{3}\pi - 2S_{OBA} = 6\pi - 2 \cdot OA \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot OA = 6\pi - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{6\pi - \sqrt{3}}$

Ответ: $6\pi - \sqrt{3}$.

(границы фигуры М $\in$ фигуре М)

Черновик

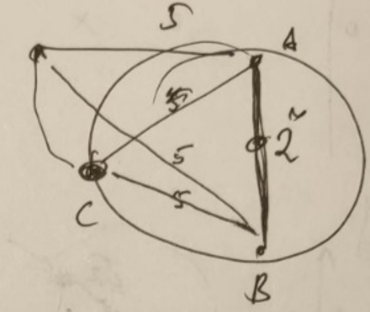



радиус-min

CD-кат?

CMD




S – Σ первых 10 ч.

↑ ар. пр.

$a_1 \; a_2 \, ..$

$b>0$

$$\underbrace{a_1 \quad a_1+b \quad \quad a_1+9b}_{S}$$

~~$9+16\cdot 3+55=.$~~

$9+55-48=-30+46$

$$\overbrace{1+2+3+ \ldots n}= \frac{n(n+1)}{2}$$

$n \cdot n-1 \ldots 1$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$9+16\cdot 3+55>30+46$

$9+48+55>76$

$(a_1+5b)(a_1+11b)$

$(5-3)(11-3)$

$2\cdot 8$

$$10a_1+45b+17>a_1+16a_1b+60b^2-5b^2>10a_1+45b+1$$

$a_1^2+6a_1+9>0$

$(a_1+3)^2>0$

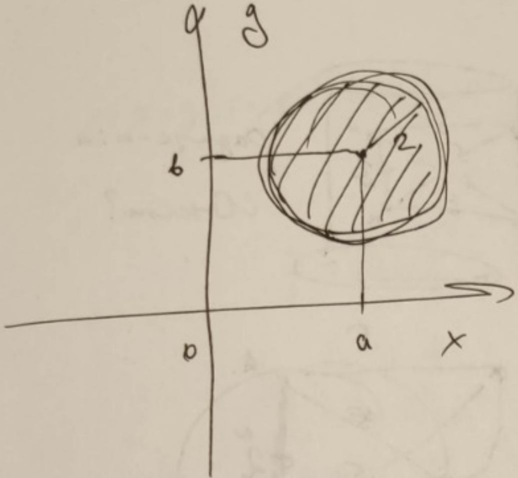
$-3$

$60-45=17$

$a_1^2+6a_1-2<0$

$$\frac{-6\pm\sqrt{36+4\cdot 2}}{2}=-3\pm\sqrt{9+}$$

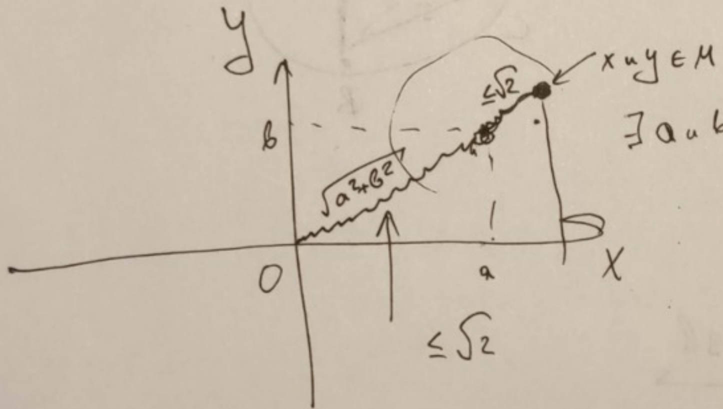
Черновик




x и y ∃ a и b

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$$

$$a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2)$$




∃ a и b:

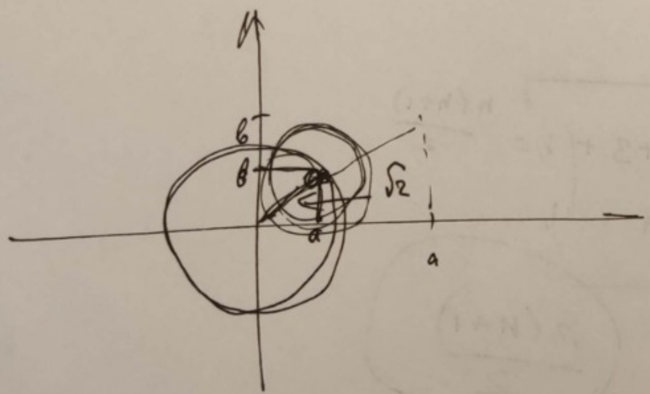
$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

$$\frac{1+3}{2} = 2 \geqslant \sqrt{3}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \le 1$$

$$\sqrt{ab} \le \frac{a^2+b^2}{2} \le 1$$

$$ab \le 1$$




$$a(a-2)+b(b-2) \le 0$$

$$a^2+b^2$$

$$(a+b)^2+2(a+b)+1 =$$

$$= (a+b+1)^2$$

$$a^2+b^2+2ab+1$$

$$a^2+b^2 \le 2a+2b$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \le a+b$$

$$a^2+b^2 \le a+b$$

$$a(a-2)+b(b-2) \le 0$$

$$(\alpha+1)(\alpha-1)+(\beta+1)(\beta-1) \le 0$$

$$\alpha^2+\beta^2 \le 2$$

$$a^2-2a+1+b^2-2b+1 \qquad (a-b)(a+b)$$

$$a \to \alpha+\frac{1}{2} \qquad a+\frac{1}{2} = \alpha$$

$$2\alpha-2;\ 2\beta-2$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2 \le \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\cdot 2+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\cdot 2;$$

ue $\downarrow$ на $\frac{1}{2}$ $\qquad 4 \le$

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \le 2\left(a-\frac{1}{2}\right)+2\left(b-\frac{1}{2}\right), \quad 1$$

$$a-\frac{1}{2}$$

21103606 (U53536 M1297011)

Черновик

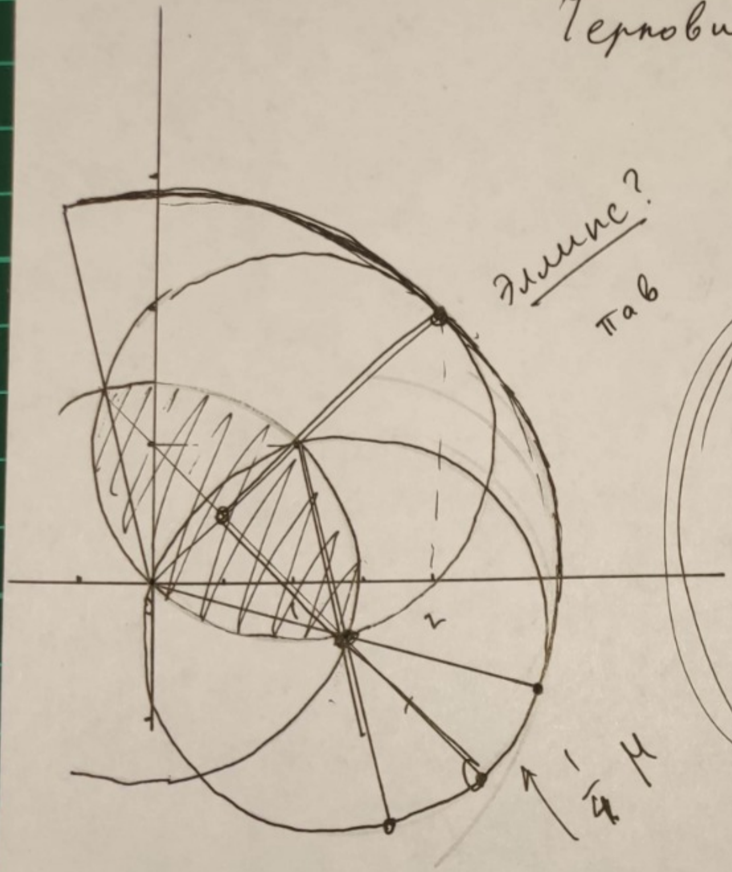
1.

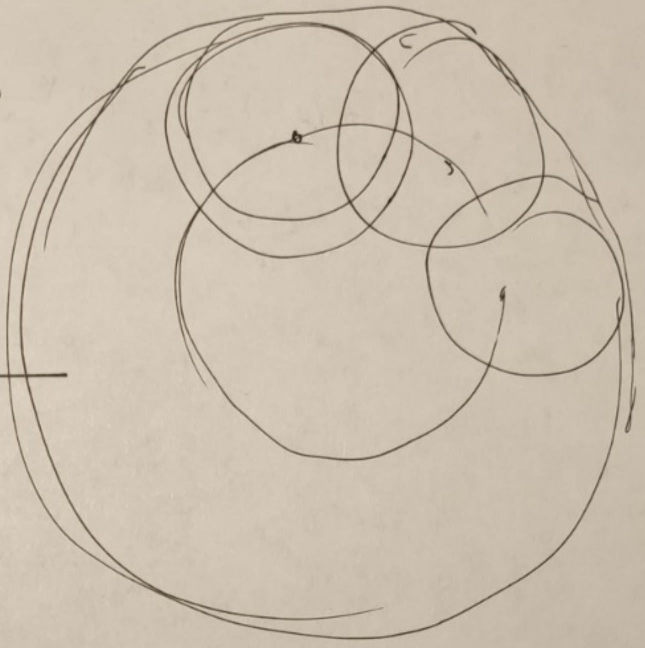
$\cancel{1}+\cancel{2}+\cancel{3}+\cancel{4}+\cancel{5}+\cancel{6}+\cancel{7}+\cancel{8}+\cancel{9}$

$$\frac{2}{3}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2-\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}$$

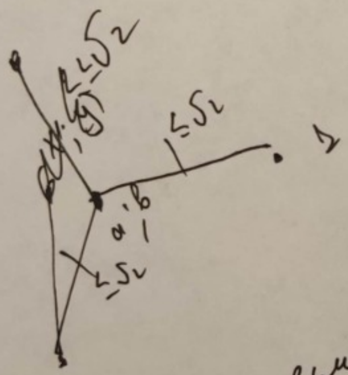
$$\frac{2\cdot 8}{\cancel{4}} \qquad \frac{16+2}{3} \qquad 6\pi-\sqrt{3}$$

Черновик



пересе-е 2окр. – м R

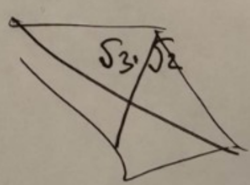



0

если

$$\frac{1+8+1+8}{3} = \frac{9+9}{3} = 6\pi$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$$



# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103606**

ID профиля: **53536**

Вариант 17

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a, b; c) = 6 \\ НОК(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases} \Rightarrow a = 6\alpha;\ b = 6\beta;\ c = 6\gamma$$
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$

~~Известно, что~~
НОК – min число, которое $\vdots\ a, b, c.$ и $\Rightarrow\ \vdots\ 6\alpha, 6\beta, 6\gamma.$

если $НОД(a, b, c) = 6 = НОД(6\alpha; 6\beta; 6\gamma)$, то $НОД(\alpha, \beta, \gamma) = 1.$

$НОК(a, b, c)$ имеет только 2 и 3 – простые делители $\Rightarrow$

$\alpha, \beta, \gamma$ – ~~это~~ все числа вида $2^{x_1} \cdot 3^{x_2}$, где $x_1; x_2 \in \mathbb{Z}$ и $\geq 0$.

$НОК(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16} = НОК(6\alpha, 6\beta; 6\gamma) \Rightarrow$

$\boxed{НОК(\alpha, \beta, \gamma) = 2^{14} \cdot 3^{15}}$

Если $НОД(\alpha, \beta, \gamma) = 1$, то из них max 2 числа $\vdots\ 2$ и max 1 число $\vdots\ 3$.

Рассм. вар-ты:

$\alpha, \beta, \gamma$ – 2 единицы $\Rightarrow$ третье – $2^{14} \cdot 3^{15}$. Таких вариантов $\boxed{3}$

и $\Rightarrow$ для a b c вар-ты однозначно определены через $\alpha, \beta, \gamma$.

~~$\alpha, \beta, \gamma$ – 1 единица $\Rightarrow$ $2^{ки}$ и $3^{е}$ – любое число 2 и 3, т.к. они~~
~~уже из-за одной единицы заведомо имеют НОД = 1.~~
~~если $\alpha = 1$, то $\beta\gamma = 2^{14} \cdot 3^{15}$~~
~~~~в $\beta$ от 1~~ – либо $\beta = 2$ $\gamma$ – ост. и наоборот~~
~~либо $\beta = 3$ $\gamma$ – ост. и наоборот } 4 вар-та~~
~~иначе в $\beta$ от 1 до 13 – $2^{ек}$ и от 1 до 14 – $3^{ек}$ $\Rightarrow$~~
~~вар-тов выбрать $\beta$: $13 \cdot 14$.~~
~~Всего вар-тов, когда ровно 1 число из $\alpha, \beta, \gamma = 1$:~~
~~$\boxed{3 \cdot (4 + 13 \cdot 14)}$~~

Остальные вар-ты – среди $\alpha, \beta, \gamma$ нет единиц.
~~~~

Чистовик

Среди $\alpha, \beta, \gamma$ – одна единица

если ~~в~~ одно $\vdots 2$ и $\not\vdots 3$, а другое $\vdots 6$ – $\cancel{13}$ 13

одно $\not\vdots 2$ и $\vdots 3$, а другое $\vdots 6$ – $\cancel{14}$ 14

одно $\vdots 2$ и $\not\vdots 3$, а другое $\not\vdots 2$ и $\vdots 3$ – $\cancel{1}$ 1

иначе в ~~в~~ одном от 1-13 2-ек и от 1-14 3ек

Тогда вар-тов, когда одно число = 1:

$$3 \cdot \Big(\overbrace{13\cdot 2 + 14 \cdot 2 + 2}^{\text{если не оба} \vdots 6} + \overbrace{13 \cdot 14}^{\text{оба} \vdots 6}\Big) = \boxed{3 \cdot (27 \cdot 2 + 2 + 13 \cdot 14)}$$

выбрать число = 1

Чистовик

если все $\alpha, \beta, \gamma$ не 1, то max 2 $\vdots 2$ и max 2 $\vdots 3$

$\Downarrow$

~~либо одно $\vdots 2$ и $\vdots 3$~~

есть число $\not\vdots 3$ и оно не 1 $\Rightarrow$ оно $\vdots 2$

и есть число $\not\vdots 2$ и оно не 1 $\Rightarrow$ оно $\vdots 3$

и третье ? $\vdots 2$ или $\vdots 3$ или $\vdots 6$

Если только одно $\vdots 3$, то:

числа вида $2^{y_1}$ $2^{y_2}$ $3^{y_3}$ $\quad y_3 = 15$ ; $y_1 + y_2 = 14$.

Вар-тов выбора соответствия $\alpha, \beta, \gamma \to 2^{y_1}; 2^{y_2}; 3^{y_3}$ 6.

~~3·2~~ вар-тов разных $y_1$ и $y_2$ – 12 и один при $y_1 = y_2 \Rightarrow$

всего вар-тов с ровно 1 числом $\vdots 3$ и другими не 1:

~~3~~ $\boxed{3 \cdot 13}$ ← для первого из ост. вар-тов

$\uparrow$ вар-тов выбора, кто $\vdots 3$

Если только одно $\vdots 2$, то аналогично

вар-тов выбора этого одного – 3

А первый из оставшихся $\vdots$ ~~$2^1; 2^2$~~ $3^1; 3^2 \ldots 3^{14}$

$\boxed{3 \cdot 14}$

Если одно $\vdots 2$, другое $\vdots 3$, третье $\vdots 6$

$2^{y_1}$ $3^{y_2}$ $2^{y_3} 3^{y_4}$

по-отдельности распределим $y_1 + y_3 = 14$ двоек и

$y_2 + y_4 = 15$ троек.

причем здесь $y_1$ и $y_3$ – разные $\Rightarrow$ вар-тов таких наборов

$2^{y_1}; 3^{y_2}; 2^{y_3} 3^{y_4}$ – $13 \cdot 14$. А вар-тов соотв. с $\alpha, \beta, \gamma$ – еще 6.

$\boxed{6 \cdot 13 \cdot 14}$

Чистовик

итоги:

$3+3\cdot(4+13\cdot14)+3\cdot13+3\cdot14+6\cdot13\cdot14=$

$=3+12+3\cdot13\cdot14+3\cdot13+3\cdot\cancel{17}\,14+6\cdot13\cdot14=$

$=9\cdot13\cdot14+3\cdot27+15=1728+81+15=\boxed{1824}$

$13\times14$: $62$, $13$, $192$

$192\times9=1728$

$27\times3=81$

$1728+81+15=1824$

~~Ответ: 1824.~~

$3+\cancel{3\cdot(14\cdot)}\;3(13\cdot2+14\cdot2+2+13\cdot14)+3\cdot13+3\cdot14+6\cdot13\cdot14=$

$=\cancel{3\cdot}\;3\cdot(13\cdot14+2\cdot28)+3\cdot28+6\cdot13\cdot14=$

$=9\cdot28+9\cdot13\cdot14=\cancel{9\cdot14\cdot}\;9\cdot14\cdot15=9\cdot7\cdot30=\boxed{1890}$

~~14~~

$63\times3=189$

Ответ: 1890.

Чистовик

№ 5.

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \qquad \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \qquad \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$$

~~По ОДЗ~~ $\cancel{\sqrt{5x-1} \neq 1}$

Некоторые ограничения на $x$:

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1} \neq 1 \\ 4x+1 \neq 1 \\ \frac{x}{2}+2 \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq \frac{2}{5} \\ x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

~~Кроме~~ $\cancel{4x+1 > 0}$

$\cancel{\frac{x}{2}+2>0}$

---

Есть всего 3 вар-та равенства пары чисел.

1) $\cancel{\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \cdot \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) =}$

$\cancel{= \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) + 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) + 2\log_{\frac{x}{2}+2}\left(\sqrt{5x-1}\right) =}$

$\cancel{= 2\left(\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) + \log_{\frac{x}{2}+2}\left(\sqrt{5x-1}\right) + \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\right) - \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)}$

Обозначим $\sqrt{5x-1} = y_1$; $4x+1 = y_2$; $\frac{x}{2}+2 = y_3$

$$\log_{y_1} y_2 \cdot \log_{y_2} y_3^2 = \log_{y_1} y_2 \cdot 2 \cdot \log_{y_2} y_3 = 2\log_{y_1} y_3$$

$$2\log_{y_1} y_3 \cdot \log_{y_3} y_1^2 = 4\log_{y_1} y_1 = 4$$

Т. е., если 2 из чисел $\log_{y_1} y_2$; $\log_{y_2} y_3^2$ и $\log_{y_3} y_1^2$ равны, а другое < их на 1 — пусть они $\alpha$, $\alpha$ и $\alpha-1$

$\Rightarrow \alpha \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) = 4$

$\alpha^3 - \alpha^2 - 4 = 0$

$\alpha = 2$ — корень

$\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 < 0 \Rightarrow$ больше $\varnothing$

$$\begin{array}{r|l} \alpha^3 - \alpha^2 - 4 & \alpha-2 \\ -\ \alpha^3 - 2\alpha^2 & \alpha^2+\alpha+2 \\ \hline \alpha^2 \\ -\ \alpha^2 - 2\alpha \\ \hline 2\alpha - 4 \end{array}$$

Значит, $\alpha = 2$.

есть 3 вар-та пар, которые $= 2$

1) $\log_{\sqrt{5x-1}} (4x+1) = 2$

$\log_{4x+1} \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2$

$\log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1) = 1 \Rightarrow \frac{x}{2}+2 = 5x-1$

$x+4 = 10x-2$ $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$6 = 9x \Rightarrow \boxed{\cancel{x = \frac{2}{3}}}$ подойдёт?

$\begin{cases} 5x-1 = 4x+1 \\ (4x+1)^2 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{5\cdot\frac{2}{3} - 1 = 4\cdot\frac{2}{3}+1} \text{ ~~неверно~~} \\ 4x+1 = \pm\left(\frac{x}{2}+2\right) \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ $5\cdot\frac{2}{3} - 1 = 4\cdot\frac{2}{3}+1$ — неверно

2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}} (4x+1) = 2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1) = 2 \\ \log_{4x+1} \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-1 = 4x+1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x-1 \\ 4x+1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \leftarrow \text{подставим} \\ 3^2 = 9 \ (+) \\ 9 = 3^2 \ (+) \end{cases}$

Итоговая проверка $x = 2$

$\log_3 (9) = 2$

$\log_3 (9) = 2$ — всё верно

$\log_9 (3^2) = 1$

3) $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}} (4x+1) = 1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1) = 2 \\ \log_{4x+1} \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-1} = 4x+1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x-1 \\ (4x+1)^2 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-1 = 16x^2+1+8x \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x-1 \\ \left[\begin{array}{l} 4x+1 = \frac{x}{2}+2 \\ 4x+1 = -\frac{x}{2}-2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{x = \frac{6}{7}} \\ \cancel{x = \frac{2}{3}} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{7} \\ x = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Чистовик

~~если $x = \frac{6}{7}$, то~~

~~$\sqrt{5x-1} = \sqrt{5\cdot\frac{6}{7}-1} = \sqrt{\frac{30-7}{7}} = \sqrt{\frac{23}{7}} \neq 4\cdot\frac{6}{7}+1$~~

~~$x = \frac{2}{3}$~~

~~$\sqrt{5x-1} = \sqrt{\frac{10}{3}-\frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \neq 4\cdot\frac{2}{3}+1$~~

---

при $x = \frac{2}{7}$

$\sqrt{5x-1} = \sqrt{\frac{10-1}{7}} = \sqrt{\frac{9}{7}} \neq 4\cdot\frac{2}{7}+1$

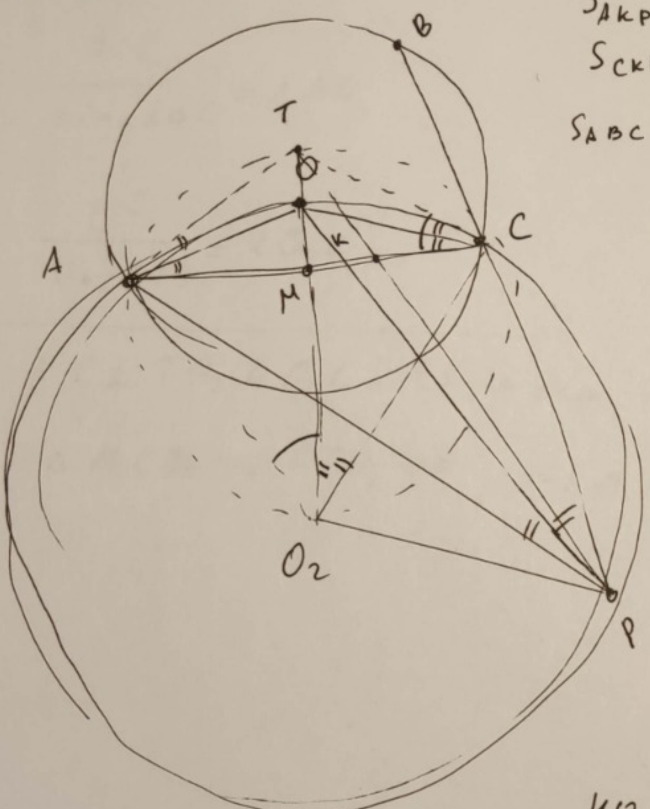
$x = -\frac{2}{3}$

$\sqrt{5x-1} = \sqrt{-\frac{10}{3}-1}$ ← не определён

Ответ: $x=2$

Чистовик

№ 6.




$S_{AKP} = 6$

$S_{CKP} = 4$

$S_{ABC} - ?$

$S_{AKP} : S_{CKP} = AK : KC = 6 : 4$

$O_2$ - центр $AOC$

$\cancel{O_2C \perp AP}$

~~если~~ $\cancel{\angle AOB}$

$\angle AOB = 2\angle ACB = (180^\circ - \angle ACP)\cdot 2 =$

$= \angle AO_2P$

$\angle O_2AT = \angle O_2CT = 90^\circ \Rightarrow$

$O_2ATC$ – окр.

$\angle OCA = \frac{1}{2}\angle OO_2A$ в окр. $AOCP$

$\angle TCA = \angle TO_2A$ в окр. $TACO_2$

Но из того, что $AC$ – общ. хорда окр.

$ABC$, $ATC$ и $AOC \Rightarrow T, O, O_2$ – ось симметрии

этих окружностей $\perp AC \Rightarrow \angle TO_2A = \angle OO_2A \Rightarrow$

$\angle OCA = \frac{1}{2}\angle TCA \Rightarrow O$ – т. ~~бс~~ перес. бисс. в $\triangle ATC$

($O$ – на бисс. $\angle C$ и аналог. $\angle A$).

и в $\triangle ATC$ $AT = TC \Rightarrow \angle TAO = \angle OAC = \angle TCO = \angle OCA$

$\Rightarrow$ ~~дуг~~ угол в окр. $AOC$ $\angle APC = 2\angle OCA$ обозн. $\angle OAC = \beta$

$S_{ACP} = 10 = AP\cdot CP\cdot \sin 2\beta\cdot\frac{1}{2}$

$\cancel{\angle ACO_2 = \angle TCO_2 - 2\beta}$ ~~и~~ $\cancel{\angle ACO_2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AO_2C}$

---

$S_{ABC} = S_{APC}\cdot\left(\frac{BC}{CP}\right)^2$ т.к. у них общ. основание $AC$

Чистовик

по th sin

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2AO$$

$$\frac{AC}{\sin\angle APC} = 2O_2C$$

---

$AC \perp TO_2$ и $O_2C \perp CT \Rightarrow$ если $TO_2 \perp AC = M$, то

$\triangle MCO_2 \sim \triangle CTO_2$ и $\sim \triangle MTC \Rightarrow \angle MO_2C = 2\beta$

Черновик

$$3+3(27\cdot 2+2+13\cdot 14)+3\cdot 13+3\cdot 14+6\cdot 13\cdot 14=$$

$$=3\left(\underbrace{1+13+14}_{28}+2\cdot 13\cdot 14+28\cdot 2+13\cdot 14\right)=$$

$$=9(28+13\cdot 14)=9\cdot 14(1\cdot 15)$$

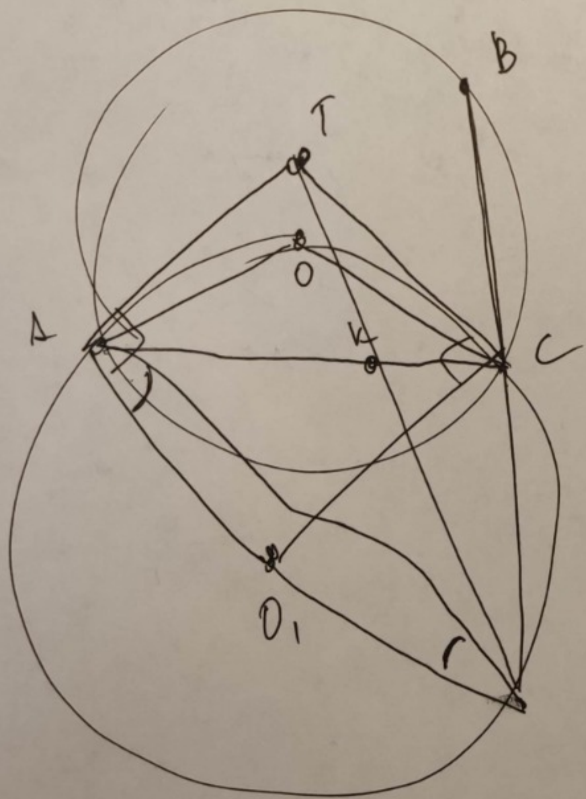
$14\cdot 15\cdot 9$

$9\cdot 14\cdot 15$

$9\cdot 7\cdot 30$

$90\cdot 3\cdot 7$

$21\cdot 90=1890$




$\Delta TB$ - прям ли?

Черновик

НОД $a, b, c$ 6 $6\alpha$ $6\beta$ $6\gamma$

$$\text{НОД}(\alpha, \beta, \gamma) = 2^{15} \cdot 3^{16}$$

$$2^{14} \cdot 3^{15}$$

$\alpha, \beta, \gamma$

11 от $\to$ $\boxed{3}$

1 т.у. т.у.

1 2

1 т.у т.у

$2^k$ $2 \cdot 3^k \cdot 2^k$

$k$ 13

1 $2^k$ $3^k$ — $\boxed{2}$

1 $2^k$ $6 \cdot m$ $\boxed{2 \cdot 13}$

$3^k$ $6 \cdot m$ $\boxed{2 \cdot 14}$

$\times \boxed{3}$

все 3 ⋮ 2

1 1

2 2 2

от. раздел

$6 \cdot m$ $6 \cdot n$

$13 \cdot 14$

3 3 3 от. раз

$2^k$ $2^l$ $3^m$

кри

$2 \cdot 3$ $2 \cdot 3$ $2 \cdot 3$

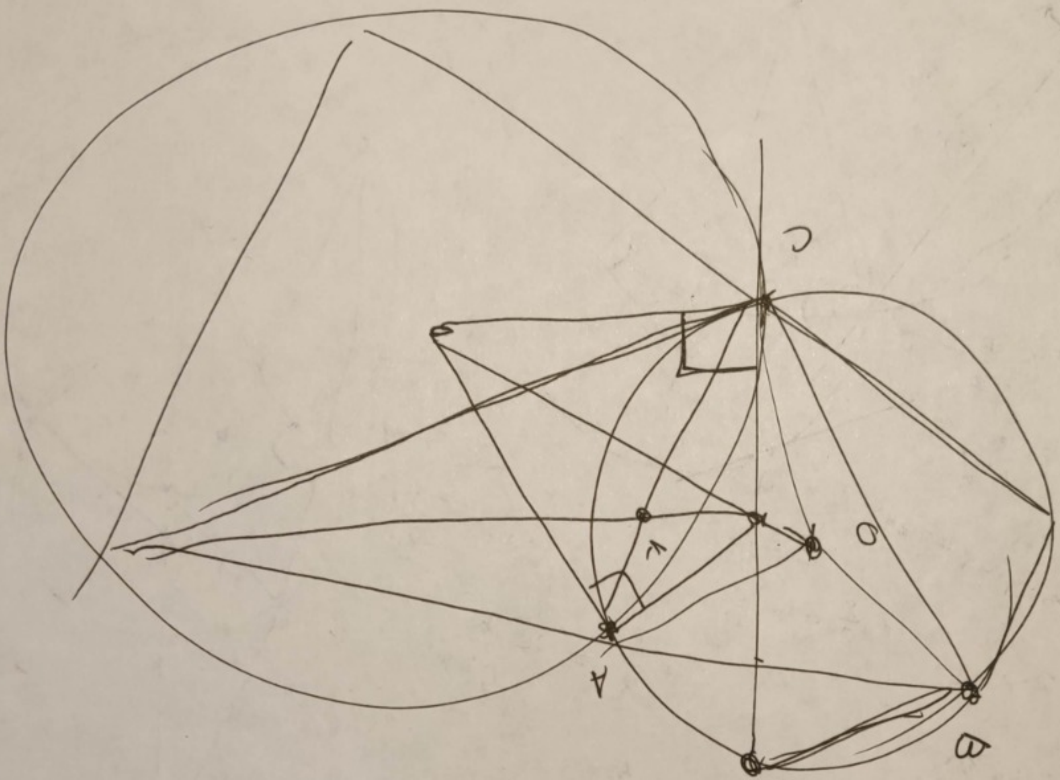
от раздел

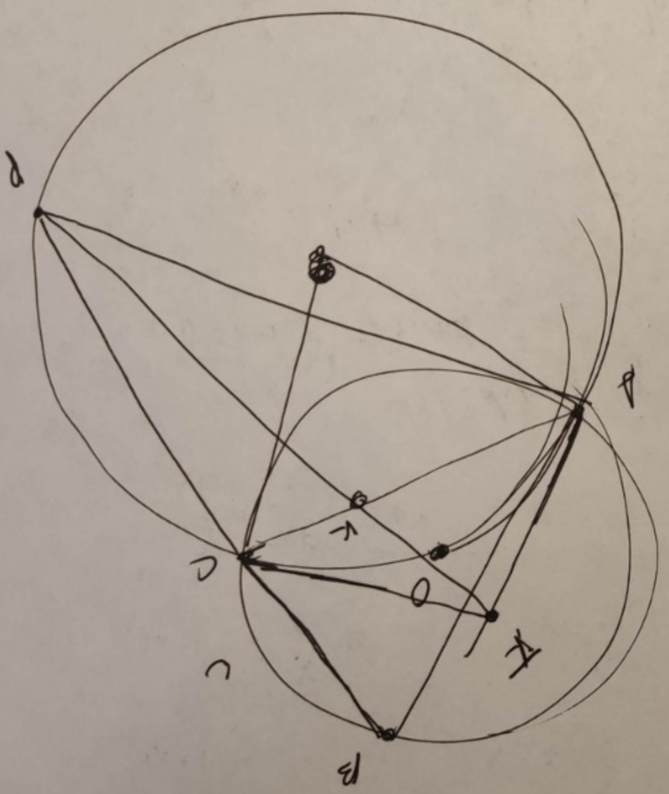
$\boxed{3 \cdot 13}$

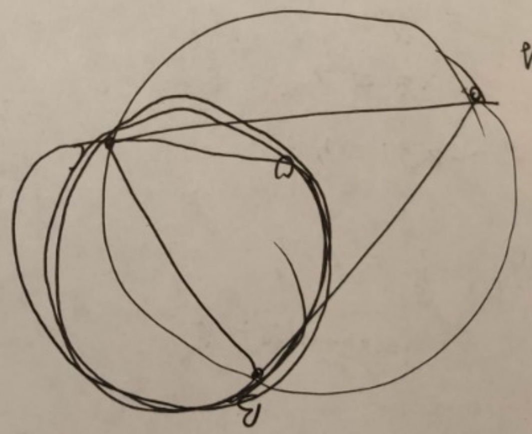
$\boxed{3 \cdot 14}$

$2^k$ $3^m$ $6 \cdot m$

$\boxed{3 \cdot 14}$ $\boxed{6}$







Черновик

$4x-1=\frac{x}{2}+2$

$3,5x=3$

$x=\frac{3\cdot 2}{7}$

$4,5x=3$

$1,5x=1 \quad x=\frac{2}{3}$

$4x+1$

$(4x+1)^{\alpha}=\frac{x}{2}+2$

$x=\log_{10}k$

$\frac{x}{2}$

$0,5x+2=5x-1$

$1=4,5x$

$x=\frac{2}{9}$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^{\beta}=\sqrt{5x-1}$

$10^{x}=k$

$2(\alpha+\beta+\gamma)-\gamma$

$\left(\sqrt{5x-1}\right)^{\gamma}=(4x+1)$

$\frac{x}{2}+2=5x-1$

$\frac{1}{9}+2=\frac{10}{9}-1=\frac{1}{9}$

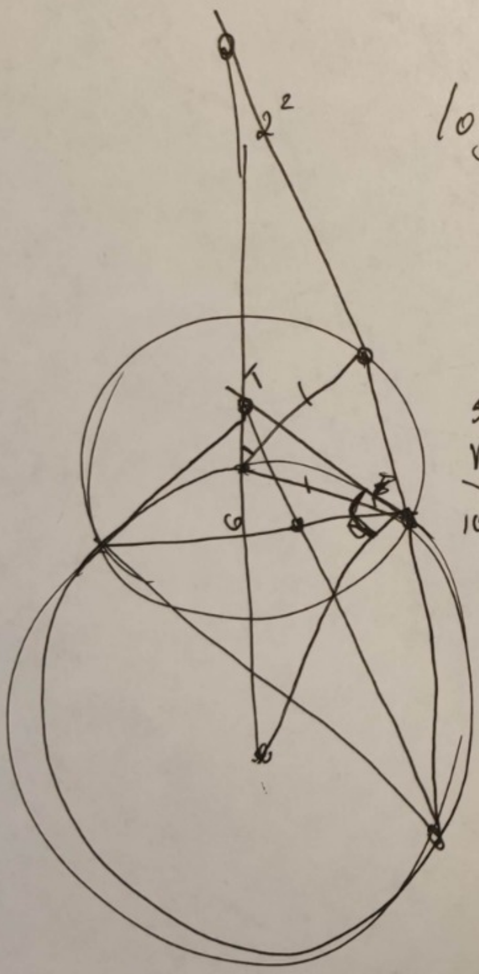
$\frac{1}{\gamma}\ (4x+1)^{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$

$\frac{1}{9}+2=$ ____

$x+4=10x-2$

$2=9x$

$x=\frac{2}{9}$



$\underbrace{\log_2 4}_{=2}\cdot\underbrace{\log_4 \cancel{16}\,\cancel{32}\,64}_{=3}$

$\log_2 64=6$

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$

$\frac{10}{9}-1=\frac{8}{9}+1$

$\frac{10}{3}-1=\frac{8}{3}+1$

$\frac{9}{3}=\frac{4}{3}$

$S_{ABC}=AB\cdot AC\cdot\sin\angle ABC$

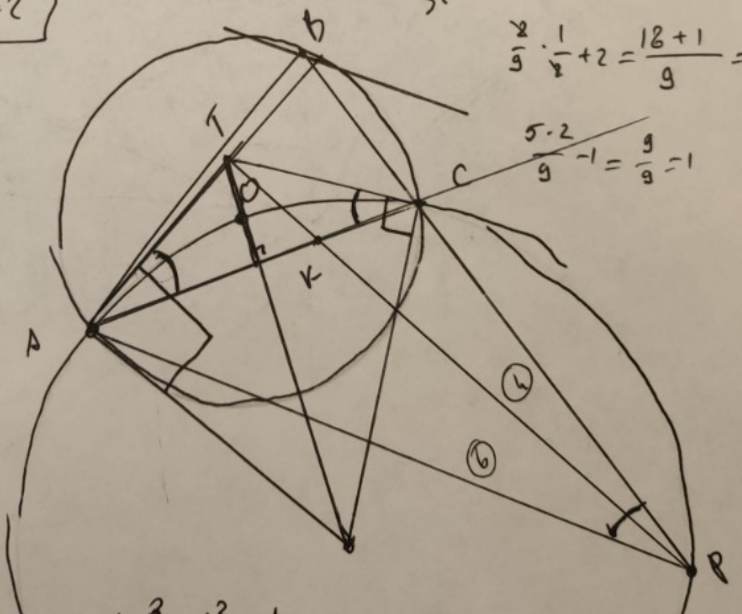
$5x-1=4x+1$

$\boxed{x=2}$

$10-1$

$\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}+2=\frac{18+1}{9}=\frac{19}{9}$

$\frac{5\cdot 2}{9}-1=\frac{9}{9}=1$



$\alpha^3-\alpha^2-4=0$

в целых?

$\alpha^2(\alpha-1)=4$

$\alpha=1$

$1-1-4$

$8-4-4$

$\alpha^3+\alpha^2+2\alpha=-2\alpha^2-2\alpha-4$

$\alpha^3-\alpha^2-4$

$2\cdot 2\cdot$

$\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2}}{2}$

21103606 (U53536 M1297012)

$5x-1=4x+1$ первый – 2 Черновик

$\boxed{x=2}$

$\log_3(9)=1$ $\log_3(9)=2$

первы – 1

$$\begin{cases} 5x-1=(4x+1)^2 \\ (4x+1)^2=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1 \end{cases}$$

$4x+1=\frac{x}{2}+2$

$4x+$

$4x+1=\frac{x}{2}+2$

$3,5x=1$

$\frac{7}{2}x=1$

4 $4x+1=-\frac{x}{2}-2$

$\frac{9}{2}x=-3$

$x=-\frac{2}{3}$

$4x+1=\frac{x}{2}+2$

$4x+1=-\frac{x}{2}-2$

$\frac{4\cdot 2}{7}+1=\frac{1+14}{7}$

$\frac{8+7}{7}=\frac{15}{7}$

$\frac{-8+3}{3}=+\frac{1-6}{3}$

$-\frac{5}{3}=-\frac{5}{3}$

1

2

3

a, b, c   $\alpha$ : 6

$\alpha\ \beta\ \gamma$

13   $6\cdot(12)-3$

$\beta$ и $\gamma$

1 3 1 0 $\alpha$ $\beta$

2 2

3 1 0 3 3 $\gamma$

$3\cdot 3=9$

0

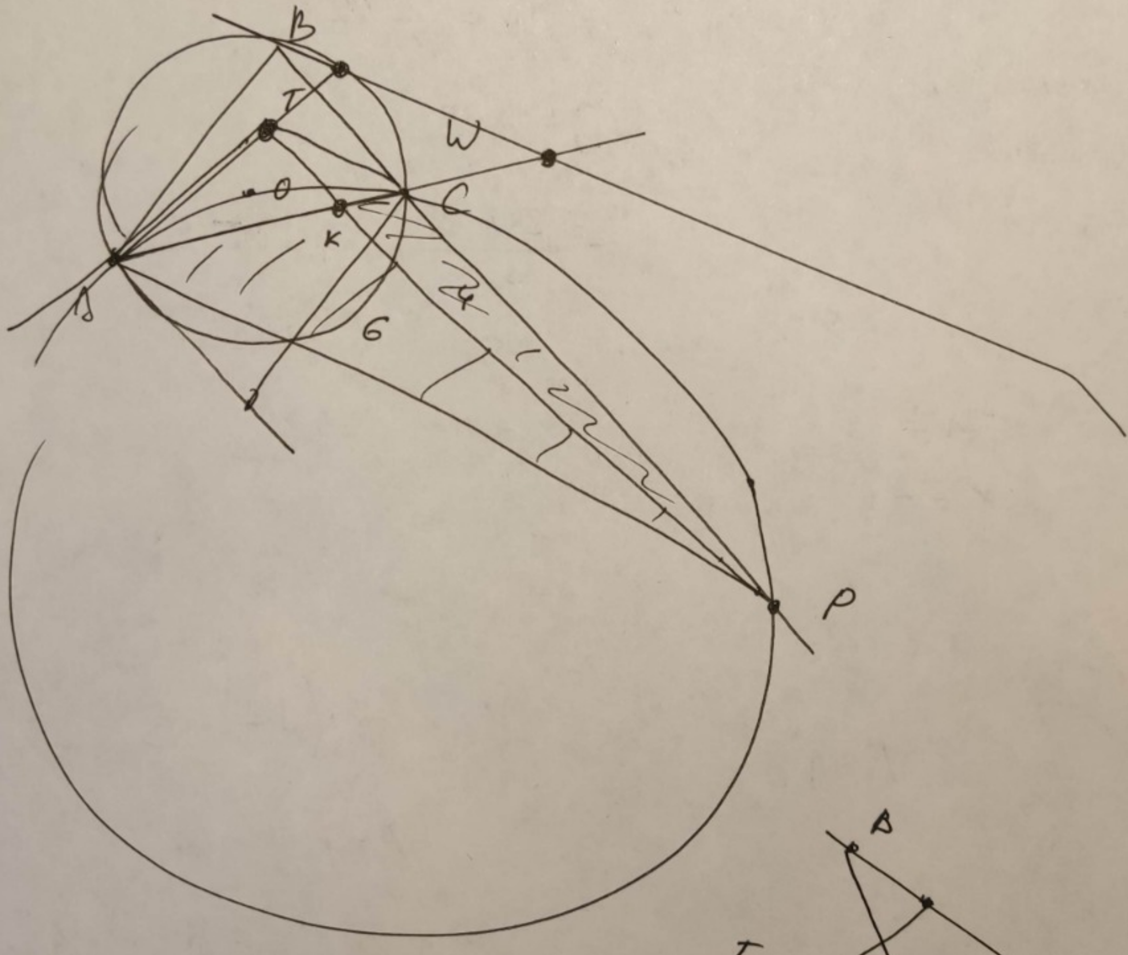
Черновик

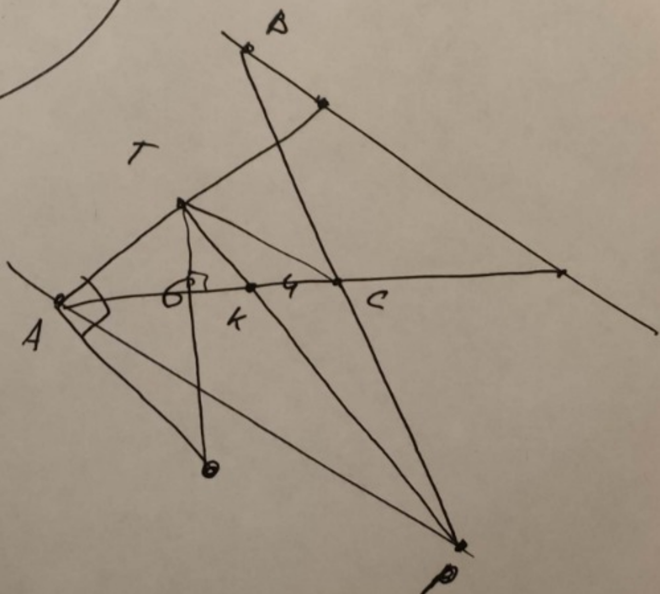
$a, b, c \in \mathbb{N}$

НОД $a, b, c = 6$ $\qquad$ $6\alpha \quad 6\beta \quad 6\gamma$

НОК $(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\quad \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \quad \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$




21103606 (U53536 M1297012)

Черновик

AK : KC

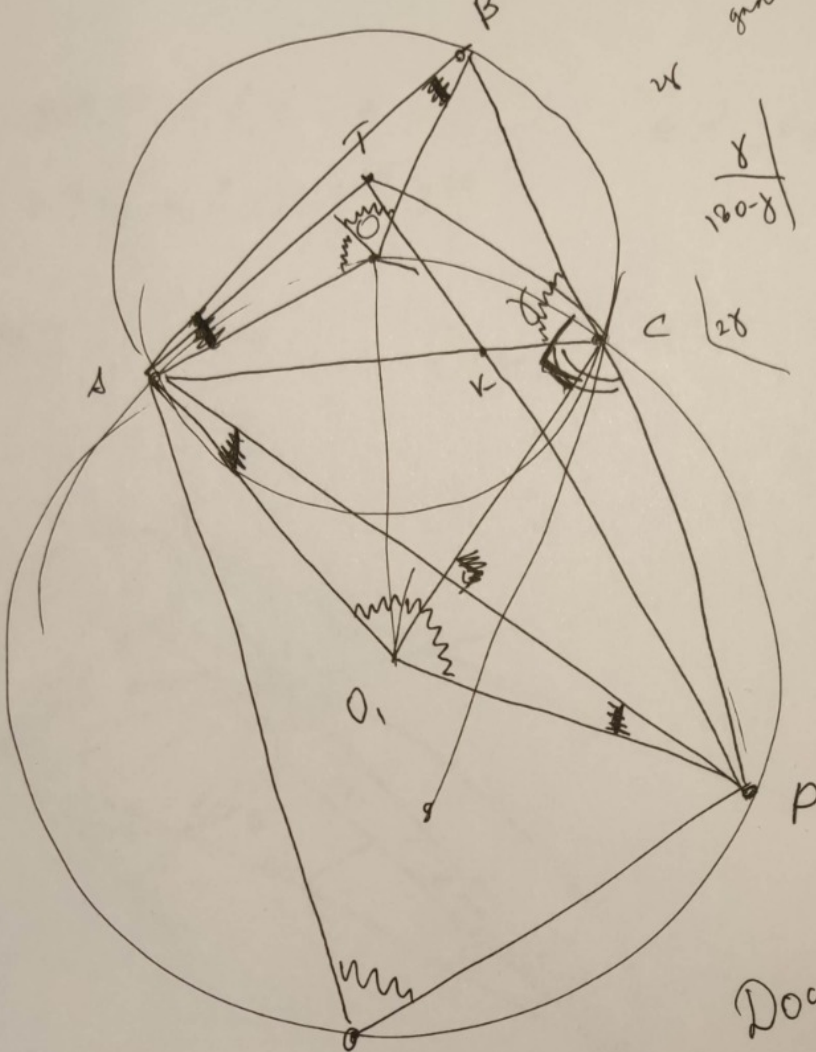
дано

2γ

$\frac{l}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{\gamma}{180-\gamma}$

2γ




Достр. ABPD до паралл.