

# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103569**

ID профиля: **380466**

Вариант 17

# Задача 1

1.  $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = S$

$a, d \in \mathbb{Z}, d > 0$

$a_6 a_{12} > S+1$  и  $a_7 a_{11} < S+17$

Указать все возможные  $a$ ,

Решение.

Пусть  $a_1 = a$ , разность прогрессии  $-d$ , тогда  $S = 10a + 45d$ ,

$a_6 a_{12} = (a+5d)(a+11d) = a^2 + 16ad + 55d^2 > S+1 = 10a + 45d + 1$  и

$a_7 a_{11} = (a+6d)(a+10d) = a^2 + 16ad + 60d^2 < S+17 = 10a + 45d + 17$

Среднее и решим систему:

$$+ \begin{cases} a^2 + 16ad + 55d^2 > 10a + 45d + 1 \\ 10a + 45d + 17 > a^2 + 16ad + 60d^2 \\ a, d \in \mathbb{Z}, d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 16ad + 55d^2 > 10a + 45d + 1 \\ 10a + 45d + 17 > a^2 + 16ad + 60d^2 \\ a^2 + 16ad + 55d^2 + 10a + 45d + 17 > a^2 + 16ad + 60d^2 + 10a + 45d + 1 \\ a, d \in \mathbb{Z}, d > 0 \end{cases} \quad \neq \emptyset$$

Из третьего неравенства найдем, что  $16 > 5d \Leftrightarrow 0 < d < \frac{16}{5}$ , т.к.

$d > 0 \Rightarrow d = 1$ , т.к.  $d \in \mathbb{Z}$

Перейдем к системе, где  $d = 1$ :

$$\begin{cases} a^2 + 6a + 9 > 0 \\ a^2 + 6a - 2 < 0 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ -3 - \sqrt{11} < a < -3 + \sqrt{11} \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 1 < \frac{4}{5} < 2 \\ \sqrt{5} < 4 < 2\sqrt{5} \\ 5 < 16 < 20 \\ -7 < -3 - \sqrt{11} < -6 \\ -4 < -\sqrt{11} < -3 \\ 3 < \sqrt{11} < 4 \\ 9 < \dots < 16 \\ 0 < -3 + \sqrt{11} < 1 \\ 3 < \sqrt{11} < 4 \\ 9 < \dots < 16 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ:  $\{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

## Задача 2

3. Найти площадь фигуры M:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2 & (1) \\ a^2 + b^2 \leq m; n(2a+2b), 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - \text{уравнение круга с } R = \sqrt{2} \text{ и центром в } Oxy \text{ в точке } O(a; b)$$

$O(a; b)$

$$(2): a^2 + b^2 \leq m; n(2a+2b); 2k=0$$

$$\begin{cases} 2(a+b) \leq 2 \\ a^2 + b^2 \leq 2a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -b + 1 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2 \end{cases} (3)$$

$$\begin{cases} 2(a+b) \geq 2 \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -b + 1 \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases} (4)$$

Построим (2) в  $Oab$ :

Если переписать данное множество точек

в  $Oxy$  ( $b \rightarrow x; a \rightarrow y$ ), то

оно будет содержать все

возможные центры (1). Окружность будет касаться прямой фигуры M, когда её центр будет принадлежать на прямой фигуры F. Фигура M - множество F с центром в точке  $(0,5; 0,5)$  и радиусом  $\sqrt{2}$ .  $M \cap F \Rightarrow \Rightarrow$  их площадь будет относиться как квадрат к окружности центра подобия. Т.к. центры (3) и (4) симметричны относительно  $a = -b + 1$ , то F симметрична относительно  $a = -b + 1$ , площади  $S_F$  равна  $S$  сегмента, отсеченного  $a = -b + 1$  от  $a^2 + b^2 \leq 2$ .

$$\begin{cases} a = -b + 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b + 1 \\ 2b^2 - 2b + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b + 1 \\ b = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ b = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Площадь хорды, стягивающей сегмент, равна  $2\sqrt{3}$ .

### Wieder 3

No 7. Kosinussatz:  $OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle O = AB^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \cos \angle O = 6 \Leftrightarrow \cos \angle O = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \angle O = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} \sin \angle O \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{\text{Kreis}} = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$S_{\text{Kreis}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, S_F = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

$k = \frac{(AB)^2}{(A, B)} = \frac{(\sqrt{6})^2}{(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3} + 2)} = \frac{S_F}{S_M} = \frac{\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}}{S_M} \Leftrightarrow S_M = \frac{(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2)^2}{\sqrt{3}^2}$

$= \frac{\cancel{4\pi} \cdot \sqrt{3} \cdot (\cancel{4\pi} - 3\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + 2)^2}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}\pi + 8\pi - 9 - 6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi(2 + \sqrt{3})}{3\sqrt{3}} - (2 + \sqrt{3})$

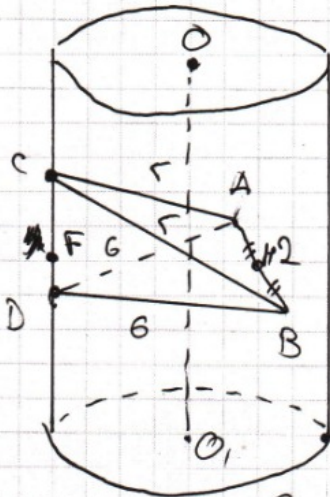
~~Ordnung:  $4\pi \frac{2 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} - (2 + \sqrt{3})$~~

$= \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{3} = \frac{4\pi(2 + \sqrt{3}) - 3\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{3} = \pi \frac{28 + 16\sqrt{3}}{9} - \frac{12 + 7\sqrt{3}}{3}$

Ordnung:  $\pi \frac{28 + 16\sqrt{3}}{9} - \frac{12 + 7\sqrt{3}}{3}$

# Задача 4

2.



1. Пусть  $K$  - середина  $AB$ , тогда  $KCD$  - плоскость симметрии (т.к.  $KC$  - ось симметрии  $\triangle ABC$  и  $KD$  для  $\triangle ABD$ ). Точки  $A$  и  $B$  тогда симметричны друг другу относительно  $KCD \Rightarrow CO_1$  и  $AB$  пересекаются под углом  $\frac{\pi}{2} \Rightarrow AB \parallel (CO_1O_2)$ .

2. Если наименьший радиусом тогда будет равен  $r=1$ , т.к. в окружность должна поместиться хорда  $AB=2$ .

3. Пусть  $F$  такая точка на  $CD$ , что  $(ABF) \parallel (CO_1O_2)$ , тогда  $AF=AB$  и  $R=1$ .  $2 \cdot 1 = \frac{2}{\sin F} \Leftrightarrow \sin F = 1 \Rightarrow F = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AF = \sqrt{2}$ .

4.  $CD = DF + FC$

$$DF^2 = KD^2 - KF^2 = 35 - 1 = 34, \quad DF = \sqrt{34}$$

$$FC^2 = KC^2 - KF^2 = 24 - 1 = 23, \quad FC = \sqrt{23}$$

$$CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$$

Ответ:  $\sqrt{34} + \sqrt{23}$

Методы

$$(B-1)^2 + B^2 = 2$$

$$2B^2 - 2B - 1 = 0$$

$$a = -B + 1$$

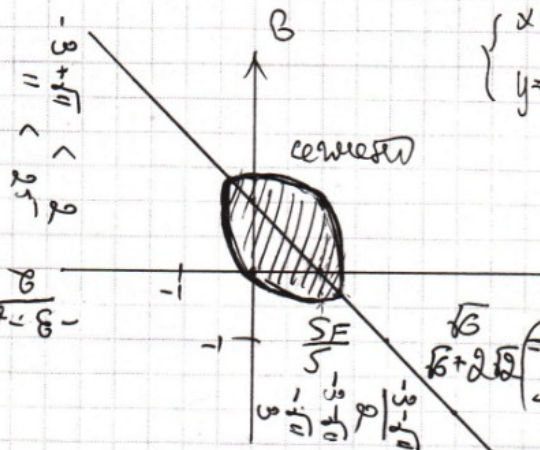
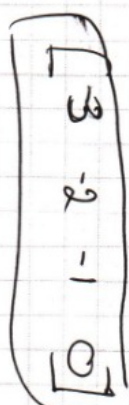
$$a^2 + B^2 = 2 \quad B = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} 2a + 2B \leq 2 \\ a^2 + B^2 \leq 2a + 2B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq 2a + 2B \\ a^2 + B^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + B \leq 1 \\ (a-1)^2 + (B-1)^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + B \geq 1 \\ a^2 + B^2 \leq 2 \end{cases}$$



$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

$$25 \cdot 3 = 3 + 4 + 25$$

$$B = -a + 1$$

$$a^2 + B^2 = 2$$

$$a^2 + a^2 + 2a + 1 = 2$$

$$2a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$L = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_1}{S} = \left( \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6+2\sqrt{6}}} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+2}} \right)^2 = \frac{3}{3+4+2\sqrt{3}}$$

$$|1 + p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b| < \epsilon + |p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b|$$

$$\begin{cases} |p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b| < \epsilon + |p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b| \\ |p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b| < \epsilon + |p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b| \end{cases}$$

$$|d| = p$$

$$a, d \in \mathbb{Z}, d > 0$$

$$p_1 a + b = p_2 a + b + p_3 a + b$$

$$\begin{cases} |p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b| < \epsilon + |p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b| \\ |p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b| < \epsilon + |p_1 a + b| + |p_2 a + b| + |p_3 a + b| \end{cases}$$

Проблема

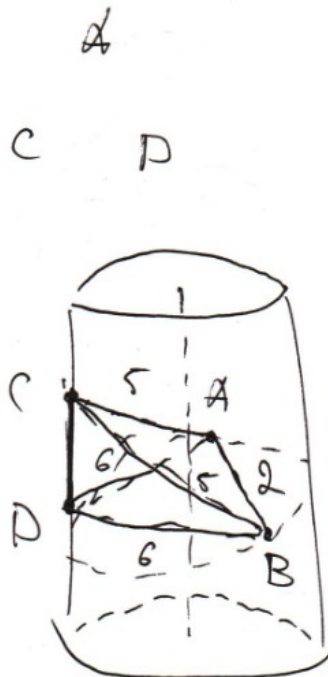
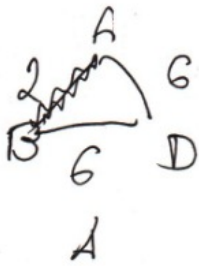
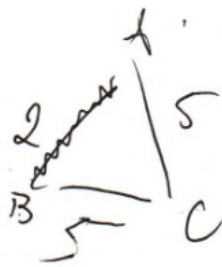
$$AB=2$$

$$AC=5$$

$$BC=5$$

$$AD=6$$

$$BD=6$$



$$2R = \frac{2}{-}$$

2-1



# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103569**

ID профиля: **380466**

Вариант 17



Условие 1

5. При каких  $x$  все числа равны, а третья меньше их на 1?  
Пусть  $a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \log_{5x-1}(4x+1)$

$$b = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 2 \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$$

ОДЗ:  $5x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5} \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}$   
 $5x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{2}{5}$   
 $4x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{4} \Rightarrow x > -\frac{1}{4}$   
 $4x+1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$   
 $\frac{x}{2}+2 > 0 \Rightarrow x > -4$   
 $\frac{x}{2}+2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -2$

Тогда  $abc = 4$

$$\begin{cases} abc = 4 \\ a = b \\ c = a - 1 \\ a = c \\ b = a - 1 \\ b = c \\ a = b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = a - 1 \\ a^2(a-1) = 4 \\ a = c \\ b = a - 1 \\ a^2(a-1) = 4 \\ b = c \\ a = b - 1 \\ b^2(b-1) = 4 \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t^2(t-1) &= 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^2(t-2) + (t-2)(t+2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (t^2+t+2)(t-2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t &= 2 \end{aligned}$$

Перейдем к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} \log_{5x-1}(4x+1) = 1 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 1 \end{cases} \begin{cases} 5x-1 = 4x+1 \Leftrightarrow x = 2 \\ 4x+1 = \frac{x}{2}+2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \quad \emptyset \\ \frac{x}{2}+2 = 5x-1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{5x-1}(4x+1) = 1 \\ 2 \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 1 \Leftrightarrow \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2 \end{cases} \begin{cases} 5x-1 = 4x+1 \Leftrightarrow x = 2 \\ (x+4)^2 = 16x+4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \\ (x+4)^2 = 20x-4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \log_{5x-1}(4x+1) = 1 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2 \end{cases} \begin{cases} (4x+1)^2 = 5x-1 \\ 2x+2 = x+4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \\ (x+4)^2 = 20x-4 \end{cases}$$

## Wurden 2

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ (2+4)^2 = 16 \cdot 2 + 4 \\ (2+4)^2 = 20 \cdot 2 - 4 \\ \left(\frac{8}{7}+1\right)^2 = \frac{10}{7}-1 \\ x = \frac{2}{7} \\ \left(\frac{2}{7}+1\right)^2 = 20 \cdot \frac{2}{7} - 4 \quad | :4 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ 36=36 \\ 36=36 \\ \frac{15^2}{7 \cdot 7} = \frac{3}{7} \quad \emptyset \text{ - keine Lösung} \\ x = \frac{2}{7} \\ \left(\frac{1}{7}+2\right)^2 = \frac{10}{7}-1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

Antwort: 2.

### Задача 3

4. Найти все-возможные натуральные тройки  $(a; b; c)$ :

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 6 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$$

Из условий следует, что

$$\begin{cases} a = 6 \cdot 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \\ b = 6 \cdot 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \\ c = 6 \cdot 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} (x_1 - 14)(x_2 - 14)(x_3 - 14) = 0 \\ (y_1 - 15)(y_2 - 15)(y_3 - 15) = 0 \\ \text{и } x_{1-3}, y_{1-3} \in \mathbb{N}_{\geq 0} \end{cases}$$

(1) Пусть одно из чисел содержит  $2^{15}$ , другое -  $3^{16}$ , тогда, чтобы НОД равнялся 6, третье число равно 6. Число, содержащее  $2^{15}$ , имеет вид  $t = 6 \cdot 2^{14} \cdot 3^q$ , где

$$\begin{cases} q \in \mathbb{N}_{\geq 0} \\ 0 \leq q \leq 15 \end{cases} \Rightarrow 16 \text{ вариантов}$$

Число, содержащее  $3^{16}$ , имеет вид  $t = 6 \cdot 2^q \cdot 3^{15}$ , где  $\begin{cases} q \in \mathbb{N}_{\geq 0} \\ 0 \leq q \leq 14 \end{cases} \Rightarrow 15 \text{ вариантов}$

Всего таких вариантов будет  $15 + 16 = 224 + 16 = 240$

(2) Также возможен вариант, когда только одно число содержит в себе  $2^{15}$  и  $3^{16}$ , тогда второе  $\#$  будет иметь вид  $t = 6 \cdot 2^q \cdot 3^r$ , где  $\begin{cases} q, r \text{ - целые неотриц.} \end{cases}$

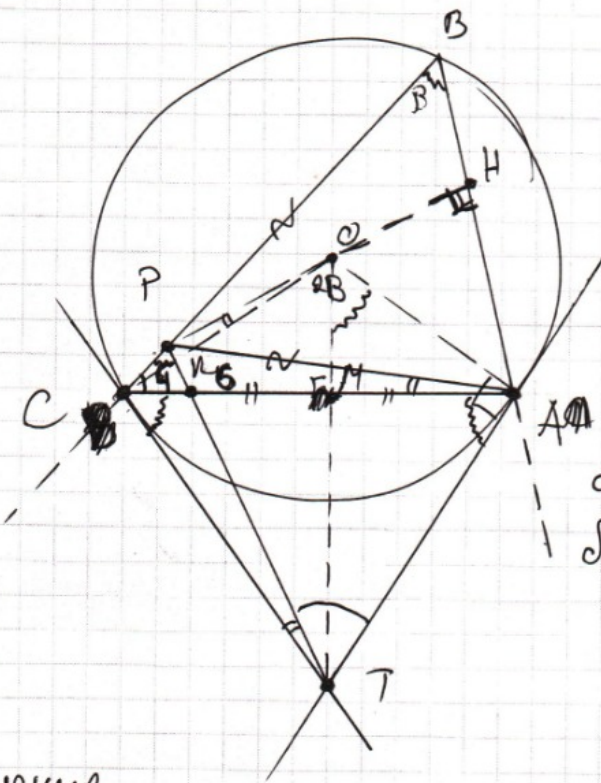
$$\begin{cases} q \leq 13 \\ r \leq 14 \end{cases} \Rightarrow 13 \cdot 14 \text{ вариантов}$$

На место первого числа можно выбрать  $a, b$  и  $c$ , со вторым и третьим ситуация аналогична  $\Rightarrow 3!$  перестановок для каждого варианта  $\Rightarrow 6(240 + 182) = 6 \cdot 422 = 2532$

Ответ: 2532

Задача 4

6.



$ABC$  - остроугольный  
 $\omega$  - опис. окр.  $\triangle ABC$   
 $\Omega$  - опис. окр.  $\triangle AOC$   
 $\Omega \cap AB = P$ ;  $AT$  и  $CT$  - касательные  
 $\kappa$  и  $\omega$   
 $TP \cap AC = K$   
 $S_{APK} = 6$ ,  $S_{CPK} = 4$   
 а) Найти  $S_{ABC}$   
 б) Найти  $AC$ , если  $\angle ABC = \arctg \frac{3}{5}$

Решение

1.  $OM$  - сепер. к  $AC$ ,  $TE \perp OM$ , т.к.  $A$  и  $C$  симметричны от  $M$ .
2.  $\angle C = 2\angle B$ , т.к. центральный,  $\angle A + \angle C = 180$ , т.к.  $APC$  - вписанный  $\Rightarrow \angle A + 2\angle B = 180 \Rightarrow \angle C = \angle B$  и  $AC = AB$
3.  $\angle C = 2\angle B$ ,  $\angle ATC = \frac{1}{2}((360 - 2\angle B) - 2\angle B) = 180 - 2\angle B \Rightarrow \triangle AOC$  - впис.
3. Из п.3 точки  $A, P, O, C$  и  $T$  лежат на одной окружности в силу единственности окружности  $(AOC) \Rightarrow \angle PCA = \angle PTA$ ,  $\angle CTP = \angle CAP \Rightarrow \angle APC = 2\angle B \Rightarrow \angle BPC = 180 - 2\angle B$ , тогда  $\angle PCB = B$  и  ~~$BP = AP$~~   $BP = AP$
4.  $PO \perp AB$ , т.к.  $O$  равноудалена от  $A$  и  $B$ , и  $P$  - середина  $AB$
5.  $\angle CPT = \angle CAT$  т.к. оба опираются на  $CT \Rightarrow PT \parallel AB$  и тогда  $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 = \left(\frac{S_{APC}}{S_{CPK}}\right)^2 = \left(\frac{10}{4}\right)^2 = \frac{25}{4}$ ,  $S_{ABC} = \frac{25}{4} \cdot 10 = \frac{125}{2}$

Условие 5

5.  $\arctg \frac{7}{5}$  — острый угол:  $\triangle \Rightarrow \arctg \frac{7}{5} = \sin^{-1} \frac{7}{\sqrt{49+25}} = \sin B$

$$PC : PB = S_{APC} : S_{APB} = 10 : \frac{105}{2} = PC : PA = \frac{20}{105} = \frac{4}{35}, \text{ тогда}$$

$$S_{APC} = 10 = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{37} \cdot PA \cdot \frac{4PA}{35} \quad PA^2 = 37 \cdot 5$$
$$PC^2 = \frac{4 \cdot 37}{7}$$

$\sin 2B$

т.к.  $\angle APC = 2B$ , то  $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{49+25}} \cdot \frac{5}{\sqrt{49+25}} = \frac{35}{37}$   
( $\cos B > 0$ , т.к.  $\triangle ABC$  — остроголанный)

$$\cos 2B = 1 - 2 \cdot \frac{49}{74} = 1 - \frac{49}{37} = \frac{37-49}{37} = -\frac{11}{37}$$

по теореме косинусов  $AC^2 = 37 \cdot 5 + \frac{4 \cdot 37}{7} + 2 \cdot \frac{11}{37} \cdot \frac{\sqrt{37 \cdot 5}}{\sqrt{7}} \cdot 2 \cdot \sqrt{37} =$

$$= 185 + \frac{148}{7} + 4 \cdot 11 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

Ответ: а) 62,5  
б)  $\sqrt{206 \frac{1}{7}} + 44 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$



Меркатор

$$\angle O = 2B$$

$$\angle A = A$$

$$A + 2B = 180$$

$$B = 90 - \frac{A}{2}$$

$$C = 10 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{34}} \cdot x^2 \cdot \frac{4}{85}$$

$$25\sqrt{34}$$

$$180 - 2B = B$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}$$

$$90 - B = A$$

$$PC = \frac{4}{85} PA \quad \frac{AK}{KC} = \frac{2}{3}$$

$$5 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{85} \cdot \frac{4}{85} \cdot x^2$$

52.

$$\frac{3}{37}$$

$$185$$

$$7402$$

206

$$4925$$

$$74$$

