Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

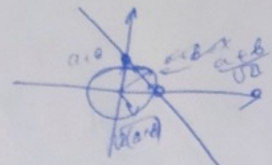
Шифр: **21103567**

ID профиля: **166174**

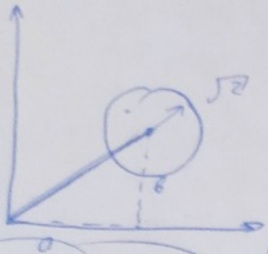
Вариант 17

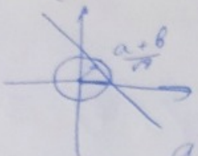
Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$



$a^2+b^2 \le 2(a+b)$





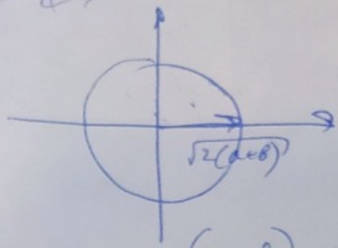
$a^2+b^2 \le 2$

$a+b < \sqrt{2(a+b)}$

$a^2+2ab+b^2 < 2a+2b$ или

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

$(a+b)(a+b-2)$



условие чтобы было решение

$\frac{a+b}{\sqrt{2}} < \sqrt{2(a+b)}$

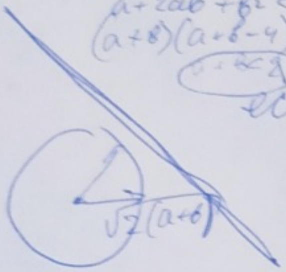
$(a+b)=x$

$a^2+b^2 \le 2(a+b)$

$a^2+b^2 \le 2$

$a^2+2ab+b^2 < 4a+4b$

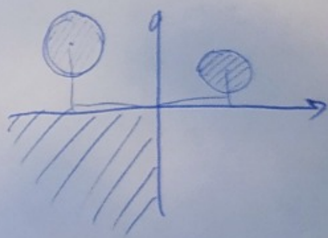
$(a+b)(a+b-4)<0$



если $a+b>1$ то $a^2+b^2 \le 2$

если $a+b \le 1$

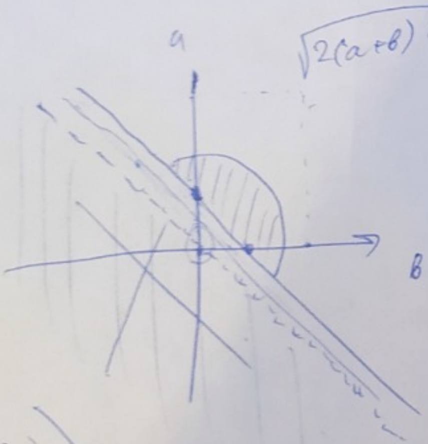
то $a^2+b^2 < 2(a+b)$

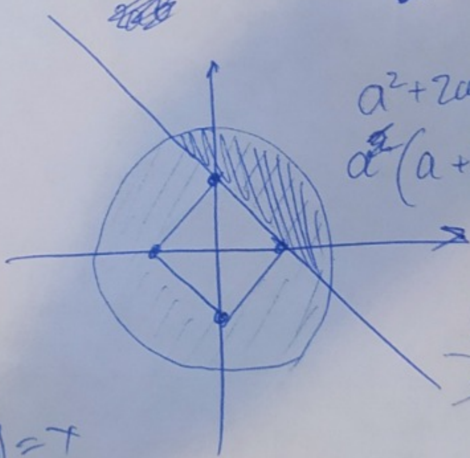


$a^2+b^2 \le$ ~~2a+2b~~ $< 2(a+b)$

$(a+b)^2-2ab < 2(a+b)$

$a+b-\frac{2ab}{a+b} < 2$





$a^2+2ab+b^2 < 4a+4b$

$a(a+b-4)+$

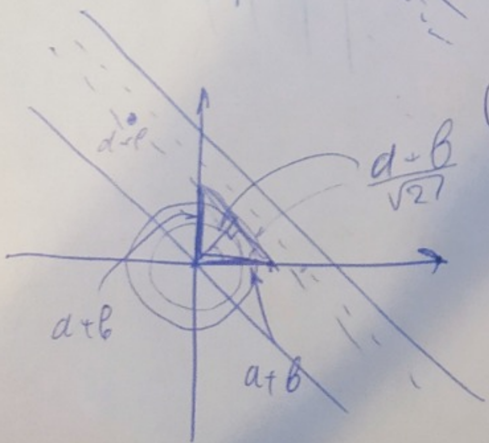
$+b(b+a-4)$

$(a+b)(a+b-4)<0$

~~$a+b<0$~~

$a+b-4<0$

$a+b<4$



$(a+b)=x$

$2(a+b)$

$2(a+b)>0$

$\frac{a+b}{\sqrt{2}} <$ $\sqrt{2(a+b)}$

$\frac{a^2+2ab+b^2}{2} < 2a+2b$

Вариант 17

Чистовик
Лист 1

Задача №1

1) Пусть a – первый член прогрессии, d – её шаг.
По условию последоват. возрастает $\Rightarrow d \geq 1$

$a_6 = a+5d$, $a_7 = a+6d$, $a_{11} = a+10d$, $a_{12} = a+11d$

$S = a+(a+d)+(a+2d)+\dots+(a+9d) = 10a+45d$

2) $a_6 a_{12} > S+1 \Rightarrow (a+5d)(a+11d) > 10a+45d+1$

$\underline{a^2+16ad+55d^2-10a-45d-1>0}$

Пусть $a^2+16ad+55d^2-10a-45d-1 = x \Rightarrow x>0$

3) $a_7 a_{11} < S+17 \Rightarrow (a+6d)(a+10d) < 10a+45d+17$

$a^2+16ad+60d^2-10a-45d-1-16<0$

$\underbrace{a^2+16ad+55d^2-10a-45d-1}_{x}-16+5d^2<0$

$x-16+5d^2<0$

4) Тогда получим следующие неравенства $x>0$, $x+5d^2-16<0$
Значит $5d^2-16<0$, иначе если $5d^2-16>0$, то можно сложить это с неравенством $x>0$ и получить противоречие $x+5d^2-16>0$

$5d^2-16<0 \Rightarrow 5d^2<16$; $d \geq 1$

При $d \geq 2$ неравенство не выполняется, а по условию $d \geq 1 \Rightarrow \boxed{d=1}$

5) $(a+5)(a+11) > 10a+46 \Rightarrow a^2+16a+55 > 10a+46$

$a^2+6a+9>0 \Rightarrow (a+3)^2>0 \Rightarrow$ ~~а любая~~ $a \neq -3$

$(a+6)(a+10) < 10a+62 \Rightarrow a^2+16a+60 \leq 10a+62$

$a^2+6a-2<0$ ← парабола ветвями вверх, отрицательна между корнями

корни: $a = \frac{-6 \pm \sqrt{36+4\cdot 2}}{2} = -3 \pm \sqrt{9+2} = -3 \pm \sqrt{11}$ $\quad 3<\sqrt{11}<4$ $(9<11<16)$

Значит подходят a ~~равные~~ ~~от~~ такие, что $-6 \leq a \leq 0$, причем не забываем про условие $a \neq -3$

Ответ: $a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

21103567 (U166174 M1302470)

Черновик.

$a_6 \cdot a_{12} > S+1$

$a_7 - d$ a_7 ... a_7+4d a_7+5d

$(a-d)(a+5d) > S+1$ $S=$

$a(a+4d) < S+17$

---

a_1 $a_n = a_1 + (n-1)d$

a

$a_6 = a+5d$
$a_7 = a+6d$
$a_{11} = a+10d$
$a_{12} = a+11d$

$(a+5d)(a+11d) > S+1$
$(a+6d)(a+10d) < S+17$

$S = 10a + (1+2+3+4 \ldots +9)d$

$9 \cdot \frac{9+1}{2}$

45

1) $a^2+16ad+55d^2 > 10a+45d+1$ $S = 10a + 45d$
$a^2+16ad+60d^2 < 10a+45d+17$

x

-6 -3 0 $-3+\sqrt{11}$ 1

$\cancel{x > 10a+45d+1}$
$\cancel{x+5d^2 <} 10a+45d+17$

$-3+5$

$(a^2+16ad+55d^2-10a-45d-1) > 0$ 2 8
$(a^2+16ad+55d^2-10a-45d-1) + 5d^2 - 16 < 0$

16

a^2 $5d^2-16<0$

$5d^2 < 16$

$d=1$

$(a+5)(a+11)$

Черновик

6	7	8	9	10	11	12
$a-3d$	$a-2d$		a		$a+2d$	$a+3d$

$(a-3d)(a+3d) > S+1$

$(a-2d)(a+2d) < S+17$

$a+d$ – 10, 9
a
$a-d$ – 8
$a-2d$ – 7
$a-3d$ – 6
$a-4d$ – 5
$-5d$ 4
$-6d$ 3
$-7d$ 2
$-8d$ 1

$a^2-9d^2 > S+1$

$a^2-4d^2 < S+17$

$a^2-9d^2 > 10a-35d+1$ $\qquad 10a - 35d$

$a^2-9d^2-10a+35d-1>0$

$a^2-10a-9d^2+35d-1>0$

$$a=\frac{10\pm\sqrt{100-4(-9d^2+35d-1)}}{2}=$$

$$=5\pm\sqrt{25-(-9d^2+35d-1)}=$$

$$=5\pm\sqrt{25+9d^2-35d+1}$$

$$5\pm\sqrt{9d^2-35d+26}$$

$\sqrt{4d^2-35d+42} > \sqrt{9d^2-35d+26}$

$4d^2-\cancel{35d}+42 > 9d^2-\cancel{35d}+26$

$16 > 5d^2 \qquad d=1$

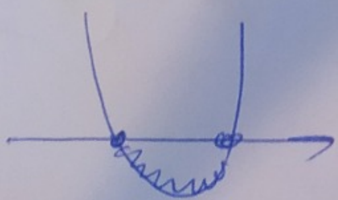
$a^2-4d^2-10a+35d-17<0$

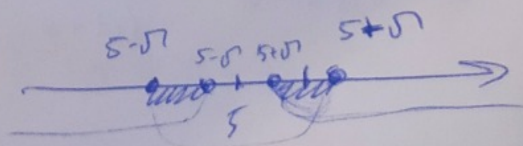
$a^2-10a+4d^2+35d-17<0$

$$a=\frac{10\pm\sqrt{100-4(-4d^2+35d-17)}}{2}=5\pm\sqrt{25+4d^2-35d+17}$$

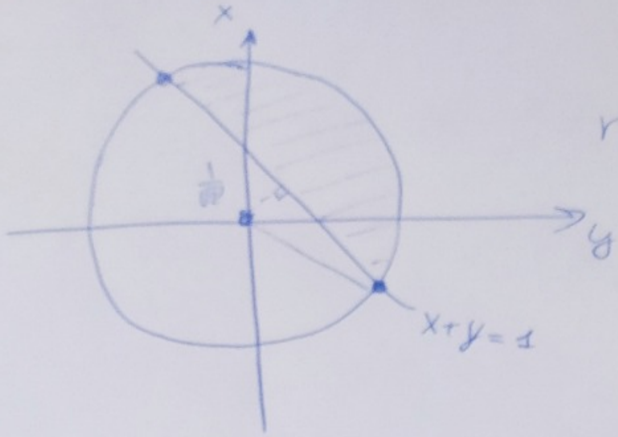
$$5\pm\sqrt{4d^2-35d+42}$$

7. 6.





Черновик



$r = 2\sqrt{2}$

$x^2+y^2=8$

a

$-\cos\alpha \mid R^2 \cdot 2$

$x^2+y^2=8$

$x+y=1$ (arccos) $\frac{1}{4}$

$x = 1-y$

$1-2y+y^2=8$

$y^2-2y-7=0$

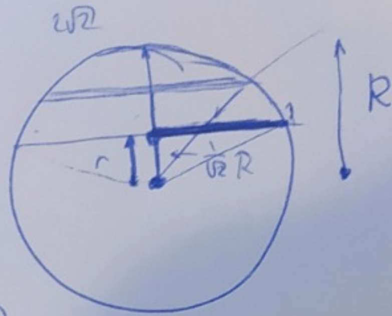
πr^2

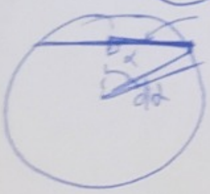
$\frac{\pi \cdot 8}{2}$

4π

~~2πr~~

πr^2



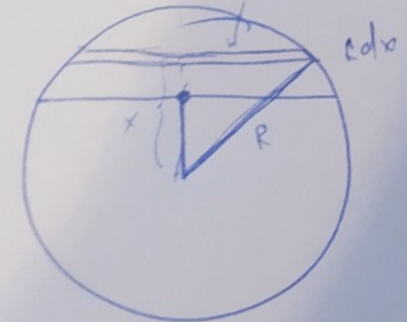


$R\sin\alpha$

$R\sin\alpha \cdot d\alpha \cdot R$

$\int 2\sqrt{(R^2-x^2)}dx$

$\int_r^R 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$



$4\sqrt{2} \vee \sqrt{30}$

32

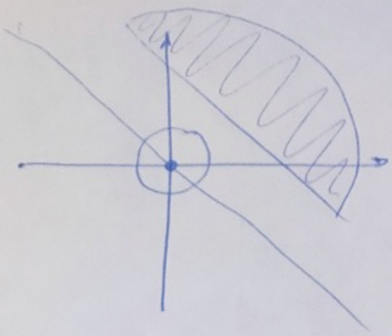
$\cos \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$

$\cos\alpha = \frac{1}{4}$ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos 2\alpha = \frac{1}{16} - \frac{15}{16}$

$\cos 2\alpha = \left(-\frac{7}{8}\right)$

Черновик



$a^2 + b^2 \le 2a + 2b$

$a(a-2) + b(b-2) \le 0$

$a =$

$(a+b) < 1$

$c = a - 1$

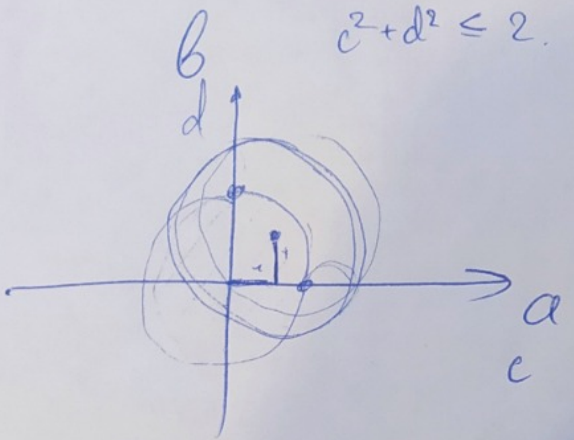
$d = b - 1$

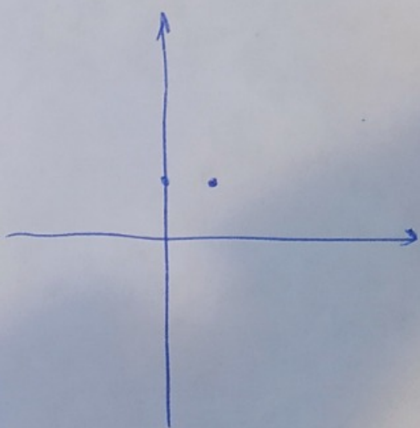
$a(a-2) + b(b-2) \le 0.$

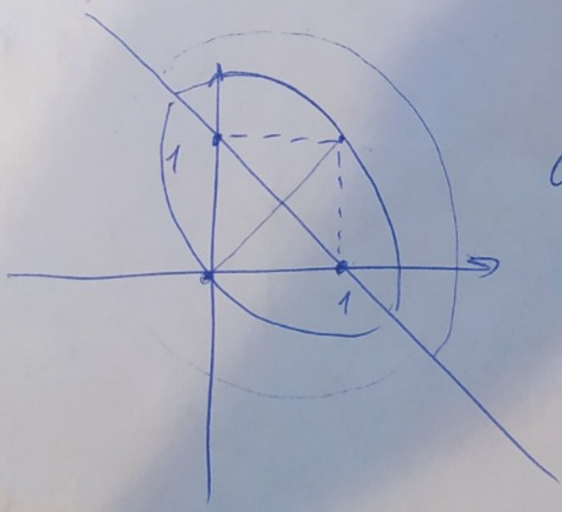
$(c+1)(c-1) + (d-1)(d+1) \le 0$

$c^2 - 1 + d^2 - 1 \le 0$

$c^2 + d^2 \le 2.$



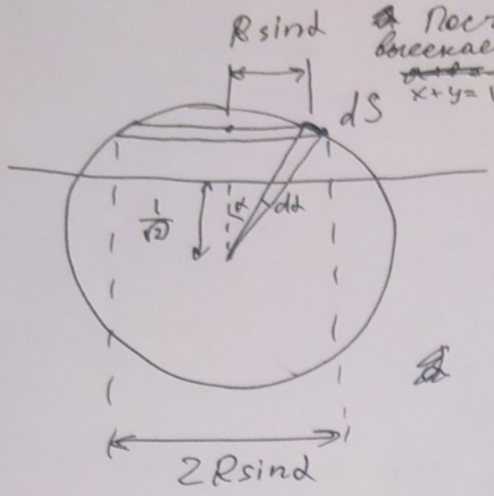




$a^2 + b^2 - 2a - 2b$

$(a-1)^2 + (b-1)^2$

Лист 4 Чистовик



Посчитаем площадь, высекаемую прямой ~~x+y=1~~ x+y=1 на окружности ~~$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2$~~ → $x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2$

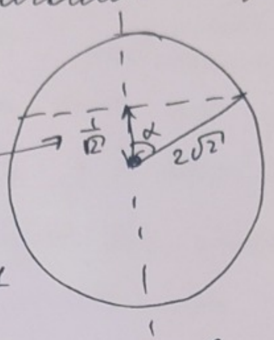
$$dS=(R\sin\alpha)\cdot R\,d\alpha\cdot 2$$

$$dS=R^2\sin\alpha\,d\alpha\cdot 2$$

$$\int dS=2R^2\int\sin\alpha\,d\alpha$$

$$S=-R^2\cdot\cos\alpha\cdot 2$$

Начальный угол α



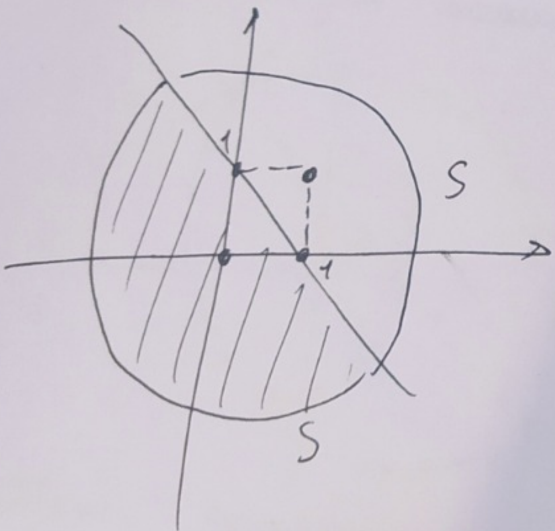
$$\cos\alpha_0=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$$

расстояние от ~~начала~~ точки (0,0) до прямой x+y=1

Конечный угол $\alpha=0 \Rightarrow S=2R^2\cdot\frac{3}{4}=(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{3}{4}\cdot 2=6\cdot 2=12$

~~Ответ: площадь фигуры равна 12~~

Это была площадь одной половины фигуры:



Площадь второй в силу симметрии равна площади первой

Итоговый ответ: площадь фигуры равна $12\cdot 2=24$

Задача №3 | Лист 2 Чистовик

Проанализируем уравнения по отдельности:

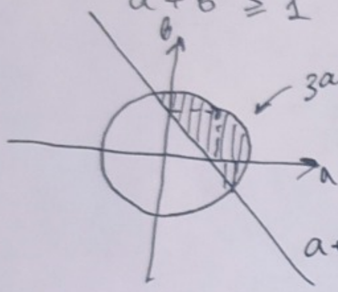
1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ — это уравнение окружности с центром в (a, b) и радиусом $\sqrt{2}$

Т.е. для заданных a и b нам подходят все x и y, что лежат в данной окружности

2) ~~Пусть~~ Найдем все a и b, когда второе ~~уравнение~~ неравенство выполняется. Рассмотрим два случая:

I случай: $\min(2(a+b), 2)=2 \Rightarrow 2(a+b) \ge 2$
$a+b \ge 1$

$a^2+b^2 \le 2 \Rightarrow a$ и b лежат в окружности радиуса $\sqrt{2}$ и центром в точке $(0,0)$, причем $a+b \ge 1$, что на графике выглядит так:



II случай: $\min(2(a+b), 2)=2(a+b)$

$2(a+b) \le 2$

$a+b \le 1$

это та-же прямая, только теперь подходят все точки снизу от нее.

$a^2+b^2 \le 2(a+b) \Rightarrow$ ~~$a(a-2)+b(b-2) \le 0$~~

~~Пусть $c=a-1$, $d=b-1$ $\Rightarrow a(a-2)=(c+1)(c-1)=c^2-1$~~

~~$b(b-2)=(d+1)(d-1)=d^2-1$~~

~~$a(a-2)+b(b-2)=c^2-1+d^2-1 \Rightarrow c^2+d^2-2 \le 0 \Rightarrow c^2+d^2 \le 2$~~

~~Это окружность с радиусом $\sqrt{2}$ и центром в точке O, (0 для c и d)~~

~~Теперь вспомним что $c=a-1$, $d=b-1 \Rightarrow c+1=a$, $d+1=b$~~

~~Т.е. получаем окружность с центром в точке 1, 1 и радиусом~~

$a^2-2a+b^2-2b \le 0 \Rightarrow a^2-2a+1+b^2-2b+1-2 \le 0$

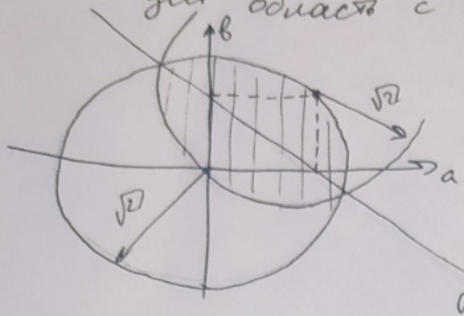
$(a-1)^2+(b-1)^2-2 \le 0 \Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

Это окружность с центром в точке $(1,1)$ и радиусом $\sqrt{2}$ (не забываем $a+b \le 1$)

21103567 (U166174 M1302470)

Лист 3 Чистовик

Теперь можно нарисовать, как на графике выглядит область с подходящими значениями ~~а и в~~ а и в

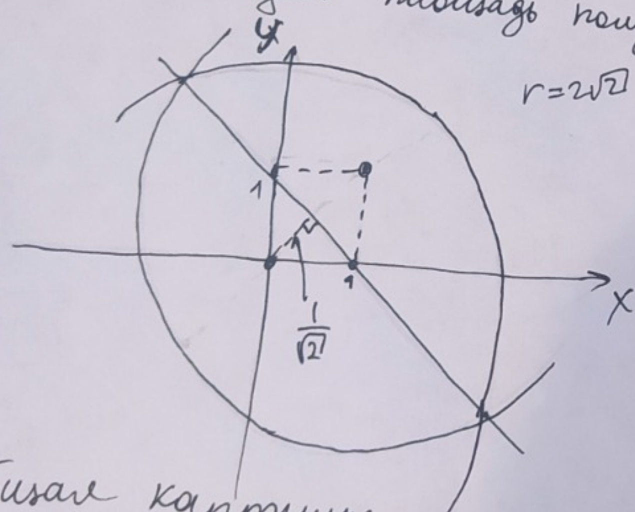


Заметим, что окружности $a^2+b^2\le 2$ из первого ~~пункта~~ случая и $(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$ из второго случая симметричны относительно прямой $a+b=1$, и расстояние между их центрами равно $\sqrt{2}$, то есть их радиусу.

3) Вернемся к поиску x и y. ~~Как~~ Как я писал в пункте №1, нам подходят все такие x и y, которые находятся на расстоянии не более $\sqrt{2}$ от какой-нибудь точки (a, b)

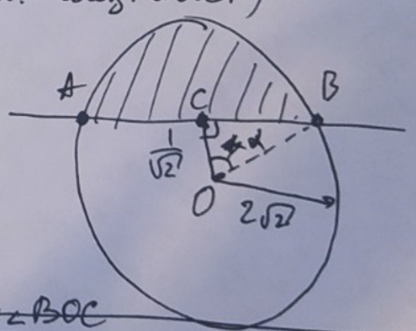
Т.к. подходящие (a, b) описываются уравнениями окружностей радиуса $\sqrt{2}$, то подходящие (x, y) — те же окружности, но „раздутые", с радиусом $\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Тогда найдем площадь получившейся фигуры:



Общая картинка:

Площадь одной половины (см. след. лист)



~~$\alpha = \angle BOC$~~

$AB = AC + CB = 2CB = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$

$= 2\sqrt{8-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{30} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{30}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

8. Площадь заштрихованная = ~~Площадь сегмента AOB − S_{AOB}~~

S

7. Площадь сегмента $= \pi r^2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} = r^2\alpha = r^2 \cdot \arccos\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\right) = r^2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

$2S = 2\left(r\arccos\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ — ответ к задаче, т.к. S — половина нужной площади, другая половина — симметрична

$2S = 2\left(2\sqrt{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{15}}{2}\right) = 4\sqrt{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right) - \sqrt{15}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103567**

ID профиля: **166174**

Вариант 17

$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ $\quad \frac{\log_a b \cdot \log_c a}{\log_c a} = \log$

$\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2 \\ 3^{15} \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2^{16} \\ 3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2^{16} \\ 3^{15} \end{matrix}$

$\log$

$a^x = b$

$\frac{\log_2 4}{}$

$c^y = a$ $\quad \log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$

$\sqrt{5x-1} = a$ $\quad \underline{c^{yx} = b}$

$\begin{matrix} 2^{15} \\ 3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2^{15} \\ 3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2 \\ 3^{16} \end{matrix}$

$\cancel{\log_{4x+1}} f^x$

$4x+1 = b$

$\frac{x}{2} + 2 = c$

$\underline{540 \cdot 16} - 36$

$5400 + \cancel{540} \quad 3240 - 34$

$8640 - 36$

$\frac{\log_a b}{\log_b c}$ $\quad \log_a b = 2\log_b c$

$\frac{\log_a b}{\log_b c}$ $\quad \cancel{\frac{\log_a b}{2\log_b c}}$

$\log_a b = 2\log_b c$ $\quad \frac{\log_a b}{\cancel{\log}} \cdot \log_c b$

$\log_a b \cdot \log_c b = 2$

$\boxed{8604}$

$\log_a a$

$\sqrt{5x-1}^{4x+1} = \frac{x}{2} + 2$

$\underline{\log_a b}$ $\quad \underline{2\log_b c}$ $\quad \underline{2\log_c a}$

$\cancel{a^b = c}$

Черновик $\quad \frac{2}{\log_c b} = 2\log_c a$

$1 = \log_c a^b \cdot \cancel{\log_c b}$

~~Черновик~~ Лист 2

~~Если $1<x<16$, а $1<y<15$, то все числа разные и упорядоченные тройки не повторяются~~

~~Если все числа~~

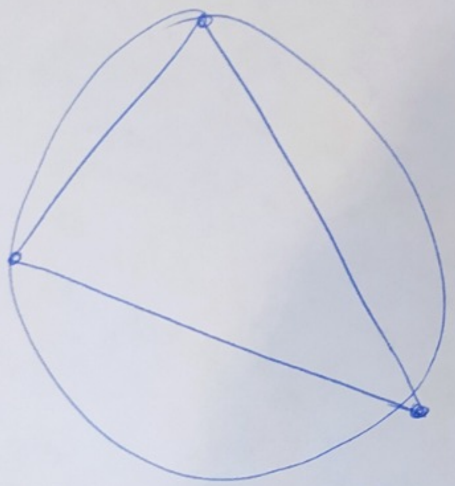
Если ~~все~~ $1<x<16$, $1<y<15$, то все числа разные и тройки не повторяются (упорядоченные)

Тогда есть 3 способа выбрать где будет 3^1, 3 способа выбрать 2^1, 2 способа выбрать 3^{15}, 2 способа выбрать 2^{15} и $14 \cdot 13$ способов выбрать x и y.

Итого $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 13$ способов.

Теперь пусть ~~сразу~~ степени троек такие $3^1, 3^{15}, 3^{15}$ тогда на оставшемся месте для двойки

3^1	3^{15}	3^{15}
2^{15}	2^1	



Черновик

8604

Чистовик Вариант 17 лист 1

Задача №4

1) Факт 1. В разложении a, b и c на простые множители есть только двойки и тройки. Иначе в $НОК(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$ были бы ещё другие простые множители

~~Факт 2. Где Среди a, b и c есть число, где в разложении которого 2 входит в первой степени. Иначе если~~

Факт 2. Т.к. $НОД(a,b,c) = 2 \cdot 3$, то $a \vdots 6$, $b \vdots 6$, $c \vdots 6$, иными словами двойки и тройки в разложениях a, b и c присутствуют хотя бы в первых степенях. (не нулевых)

2) ~~Теперь~~

Среди чисел a, b, c существует такое, что в его разложении на простые двойка входит в первой степени. Иначе, если во всех числах двойка во ~~второй~~ или более степени, то в НОД двойка тоже во второй или более степени, противоречие.

Аналогично для тройки в первой степени.

Среди чисел a, b, c есть такое, у которого в разложении 2 в 15 степени, а у других чисел двойка в меньшей степени. Иначе ~~НОК будет~~ если есть число, что $\vdots 2^{16}$, то $НОК \vdots 2^{16}$ – противоречие.

Аналогично для 3^{16}.

3) Тогда есть 3 числа – a, b, c. ~~Одного из них~~

$\underbrace{2\,3^{16}}_{a}$ $\underbrace{3}_{b}$ $\underbrace{2^{15}}_{c}$

Мы должны одному числу дать 2^1, одному 3^1, одному 2^{15}, одному 3^{16} (пример на картинке). ~~А другим двум~~ ~~Х~~ А на две оставшиеся позиции положить 3^x и 2^y.

Рассмотрим случай, когда $1 < x < 16$, $1 < y < 15$ (те степени не повторяются)

Тогда всего вариантов: 6 штук положить 2 и 3, 4 варианта доложить 2^{15} и 3^{16} и вариантов для x и y всего $14 \cdot 13$

Итого $6 \cdot 4 \cdot 14 \cdot 13 \Rightarrow$ ~~Числа a, b~~, c Тройку a, b, c мы посчитали $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ раз $\Rightarrow$ $4 \cdot 14 \cdot 13$ уникальных вариантов.

~~Черновик~~ Шаг 2

Тогда сначала положим 2 и 3, всего 6 способов
Далее положим 3^{16} и 2^{15}, причем 3^{16} нельзя положить к 3, а 2^{15} к 2, тогда всего 4 варианта
И выбираем $1 \le x \le 16$, $1 \le y \le 15$ всего $16 \cdot 15$ способов
~~Причем каждую тройку a, в, с мы посчитали~~
$6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ ~~раз (Причем даже если два числа равны, тройка была посчитана 6 раз)~~
~~Тогда всего вариантов $\frac{6 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 15}{6} = 60 \cdot 16 = 960$~~
~~Только эта прошлая комментарий~~
Был дан комментарий к задаче, что тройки упорядоченные, поэтому всего вариантов $6 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 15$

$3 \quad 3^{15} \quad 3^{15}$
$2^{15} \quad 2$

Задача N5

Черновик.

$\log_a b$ $\quad \log_a b$
$\log_b c^2 = 2\log_b c$
$\log_c a^2 = 2\log_c a = \frac{2}{\log_a c}$

~~$\log_b c \ne \log$~~

$\frac{2}{3^{15}}$ $\frac{2^{16}}{3}$

a a в
$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$

~~$\log_a b = \frac{2}{\log_a c}$~~

$\log_a b \cdot \log_a c = 2$

$3 \quad 3^{15} \quad 3^{15}$
$2^{15} \quad 2 \quad 2$

~~$\log_a b$~~ ~~$\log_b c$~~ $\ne 1 \ne$ ~~$\log_b c$~~

~~$\log_a b$~~

	2	2^x	2^x
	3	3^y	3^y

$3^x \quad 2 \quad 2^{15}$
$2 \quad 3 \quad 3^{16}$

$3^{16} \quad 2^{15} \quad 2^{15}$
$2 \quad 3 \quad \cancel{2^{16}} \quad 3$

	N1	N2	N3
$2^x \to$		2^1	2^{16}
$3^y \to$	3^1	3^{15}	

когда все разные
$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 1$

$3^{15} \quad 3^{15} \quad 3$
2^{16}
$3^{16} \quad 3^{16} \quad 3$

$\frac{x}{2}$ $5x-1$

$\sqrt{5x-1}$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

$\sqrt{5x-1}^{\,2}=4x+1$

$5x-1=4x+1$

$x=2$

1

$4x+1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$4x+1=\frac{x^2}{4}+2x+4$

$x^2+8x+16-\cancel{16}x-4=$

6

$\cancel{x^2+8x+15}$

$x^2-8x+12$

5 29

$\cancel{4-16+12}$

25

$x^2-8x+12$

$(x-2)(x-6)$

Черновик

Черновик

НОД $(a, b, c) = 6 = 2 \cdot 3$

НОК $(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$\vdots a \quad \vdots b \quad \vdots c$

$2^{15} \cdot 3^{16}$

$2 \quad 2^{15} \quad 2$

$3 \quad 3 \quad 3^{16}$

$2^{15} \cdot 3$; $2 \cdot 3^{16}$; $2^{10} \cdot 3^{9}$

$2 \quad 2 \quad 2^{15}$

$3^{16} \quad 3 \quad 3^{x}$

1) максимальная степень 2^{15}, 3^{16}

a b c

$\boxed{2^{n} \cdot 3^{m}}$

$2 \quad 2 \quad 2^{15}$ | $2 \quad 2^{15} \quad 2$

$3 \quad 3 \quad 3^{16}$ | $3 \quad 3 \quad 3^{16}$

2^{15} 3^{16}

1) есть число, где 3 в первой степени

2) есть число, где 2 в первой степени.

3) есть число, где 2^{15}

4) есть число, где 3^{16}

3^{16} 2 3 2^{15}

$3 \cdot 2$

$2 \quad 3$

$2 \quad 3 \quad 2^{15} \cdot 3^{16}$

3 2^{15} 2

2 3 3^{16}

$2 \cdot 3^{16}$, $2^{x} \cdot 3$, $2 \cdot 3^{3}$

14

2 ... 15

3 2 3^{16}

2 3 2^{15}

13

2 ... 14

2 3

$3 \quad 3^{16} \quad 2$ 3^{16} $14 - 2 + 1$

$2 \quad 2^{15} \quad 3$ $2^{15} \cdot 2 \cdot 3$ 13

$3 - 2 + 1$

$k = l \quad n$

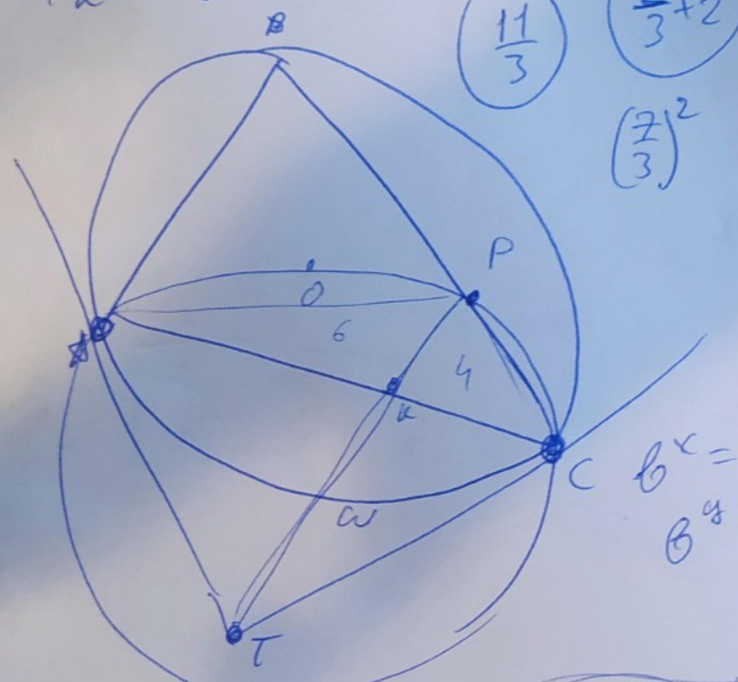
$n = \cancel{\ }$ $\quad \frac{4}{kl}$

$(k-1)(k^2+k$

$a = 5x - 1$ $\quad \frac{11}{3}$ $\quad \frac{10}{3} - 1$

$k^3 - k^2 + k^2 - 2k + 2$

$\frac{11}{3}$ $\quad \frac{1}{3} + 2$ $\quad \left(\frac{7}{3}\right)^2$



$\frac{4}{x^2} \cancel{\ } =$

$x - \frac{4}{x^2} = 1$

$x^3 - 4 = x^2$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

$a^{\frac{1}{x}} = b$

$b^x = a \quad a^{\frac{y}{x}} = c$

$b^y = c$

два равны, третье меньше на 1.

$\log_a b = 2\log_b c$

$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

$\frac{1}{\log_a b} \cdot \frac{\cancel{\ }}{\log_b c}$

$b = a^{2\log_b c}$

$\log_a b =$

$= 2\log_b c$

$2\log_c a$

$a^x = b$

$b^y = c$

$\cancel{x} = 2y$

$\frac{\log_a b}{\log_b c} \ne x$

$= y$

$\frac{\log_a b}{\log_c a}$

$a^{xy} = b^y = c \quad b^y = c$

$\frac{\log_a b \cdot \log_b c}{(\log_b c)^2} = \frac{c}{(\log_b c)^2} = 2$

$\log_a b \cdot \log_a c$

Черновик

2^{15} ② ③

3^{16} ③ ②

Чистовик лист 3

Пусть $a=\sqrt{5x-1}$, $b=4x+1$, $c=\frac{x}{2}+2$

Тогда есть 3 логарифма:

$\log_a b$; $\log_b c^2 = 2\log_b c$; $\log_c a^2 = 2\log_c a$

$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c} = \frac{1}{\log_b c \cdot \log_a b}$

$2\log_c a = \frac{\cancel{\log_b a}}{\cancel{\log_b c}}$ $\frac{4}{2(\log_b c)\cdot\log_a b}$

$\log_a b = \frac{4}{(2\log_c a)\cdot(2\log_b c)}$

$2\log_b c = \frac{4}{\log_a b \cdot (2\log_c a)}$

Пусть $k=\log_a b$; $l = 2\log_b c$, $n = 2\log_c a$

$n = \frac{4}{kl}$

Предположим $k=l$, тогда $n=\frac{4}{k^2}$ (равны 1 и 2)

Разность равна 1: $k-\frac{4}{k^2}=1$

$k^3-4=k^2 \Rightarrow k^3-k^2-4=0$

$(k-2)\underbrace{(k^2+k+2)}_{\text{корней нет}}=0$ $D=1-4\cdot 2<0$

$k=2$

I случай: $\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = 2$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$,

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1$

$\frac{x}{2}+2=5x-1$

$4{,}5x=3$ $x=\frac{2}{3}$, но если подставить $x=\frac{2}{3}$ в другие логарифмы, то ничего не сойдется, например $\log_{4\cdot\frac{2}{3}+1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}+2\right)^2=\log_{\frac{11}{3}}\left(\frac{7}{3}\right)^2\neq 2$

~~Предположим $k=\frac{4}{kl}$~~

Предположим, что равны 2 и 3 логарифм

Тогда

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\log_c a\cdot\log_b c} = \frac{4}{(2\log_c a)\cdot(2\log_b c)} = \frac{4}{ln}$

Тогда $l = n \Rightarrow k = \frac{4}{l^2}$

$l - \frac{4}{l^2} = 1$

Аналогичное уравнение $\Rightarrow l = 2,\ k = 1$

Тогда

$\sqrt{5x-1} = 4x+1$ (т.к. $\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = 1$)

$5x-1 = 16x^2 + 8x + 1$

$16x^2 + 3x + 2 = 0$ $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 < 0$

корней нет!

Последний случай, предположим равны 1 и 3 логарифмы $k = n$

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b \cdot \log_c a}$

$2\log_b c = \frac{4}{\log_a b \cdot 2(\log_c a)} \Rightarrow l = \frac{4}{kn} = \frac{4}{k^2}$

Аналогично $k - \frac{4}{k^2} = 1 \Rightarrow k = 2$

~~Тогда~~

$\cancel{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1 \Rightarrow 4x+1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2}$

$\cancel{4x+1 = \frac{x^2}{4} + x + 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 16 - 16x - 4 = 0}$

$\cancel{x^2 - 12x + 12 = 0}$

$\cancel{x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 12}}{2} = 6 \pm \sqrt{36-12} = 6 \pm \sqrt{24}}$

~~Проверим оба значения:~~

$\cancel{\log\ 4x+1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \Rightarrow 4x+1 = \frac{x^2}{4} + x + 4 \Rightarrow}$

$\cancel{x^2 + 4x + 16 - 16x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 12}}{2} = 6 \pm \sqrt{24}}$

1 и 3 логарифм $= 2$, 2ой — равен 1. не забываем $5x-1 \geq 0$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \Rightarrow \sqrt{5x-1}^2 = 4x+1 \Rightarrow 5x-1 = 4x+1$

$x = 2 \Rightarrow$ этот вариант подходит во все логарифмы

$l = \log_9 3^2 = 1$ $n = \log_3 9 = 2$; других вариантов равенства логарифмов нет (только $k = l$, $l = n$, $k = n$) и других случаев тоже.

Ответ: $x = 2$

Чистовик

Лист 2

Тогда выберем место для 3^1 3 способами, место для 2^1 3 способами, место для 3^{16} двумя способами, и место для 2^{15} 3 способами.

Выберем $1 \le x \le 16$; $1 \le y \le 15$ $16 \cdot 15$ способами.

Всего чисел получилось $15 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 15 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4$

Но заметим, что если в тройке два числа равны ($a = b$ например), то такой случай мы посчитали несколько раз, т.к.

Если два числа равны, то это могут быть только

$2 \cdot 3$, $2 \cdot 3^{16}$, $2^{15} \cdot 3$, $2^{15} \cdot 3^{16}$

(иначе пусть $2^x \cdot 3^y$ повторяется, где $x \ne 1$, $x \ne 15$, $y \ne 1$, $y \ne 16$, то не зависимо от третьего числа либо НОД $> 2 \cdot 3$, либо НОК $< 2^{15} \cdot 3^{16}$)

Третье число в такой тройке восстанавливается однозначно, например

$2^{15} \cdot 3$; $2^{15} \cdot 3$, $\underline{2 \cdot 3^{16}}$

Тогда такую тройку мы посчитали 4 раза, на 3 больше чем надо

значит всего лишних троек $4 \cdot 3 \cdot 3$ (с учетом упорядоченности)

Всего вариантов тогда $15 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot 3 =$
$= 60 \cdot 9 \cdot 16 - 36 = 8640 - 36 = \underline{8604}$ <u>варианта</u>