Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103539**

ID профиля: **331497**

Вариант 17

№1

Пусть d – разность арифметической прогрессии a_n. Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{Z}$, ..., то $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots$ – тоже целое. Т.к. a_n – возрастающая арифметическая прогрессия, то $d > 0$, т.е. $d \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$$

Т.к. $a_7 = a_6 + d$ и $a_{11} = a_{12} - d$, то:

$$S+17 > a_7 a_{11} = (a_6+d)(a_{12}-d) = a_6 a_{12} + (a_{12}-a_6)d - d^2 =$$

$$= a_6 a_{12} + (a_1 + 11d - (a_1+5d))d - d^2 =$$

$$= a_6 a_{12} + 6d^2 - d^2 = a_6 a_{12} + 5d^2 > S + 1 + 5d^2$$

$$S+17 > S+1+5d^2$$

$$5d^2 < 16 \Rightarrow d^2 < \frac{16}{5} = 3{,}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \in (-\sqrt{3{,}2}; \sqrt{3{,}2}), \text{ т.к. } d \in \mathbb{N}, \text{ то}$$

в силу $1 < \sqrt{3{,}2} < \sqrt{4} = 2$, $d \in (0; 1] \Rightarrow d = 1$.

$$\begin{cases} 1+S < a_6 a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = (a_1+5)(a_1+11) \\ S+17 > a_7 a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = (a_1+6)(a_1+10) \end{cases}$$

Т.к. S – сумма первых 10 членов арифм. прогрессии, то

$$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9d) = 10a_1 + 45$$

Вариант 17 Чистовик Математика, 11 кл

$$\begin{cases}(a_1+5)(a_1+11) > 10a_1+46\\(a_1+6)(a_1+10) < 10a_1+62\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+16a_1+55-10a_1-46>0\\a_1^2+16a_1+60-10a_1-62<0\end{cases}$$

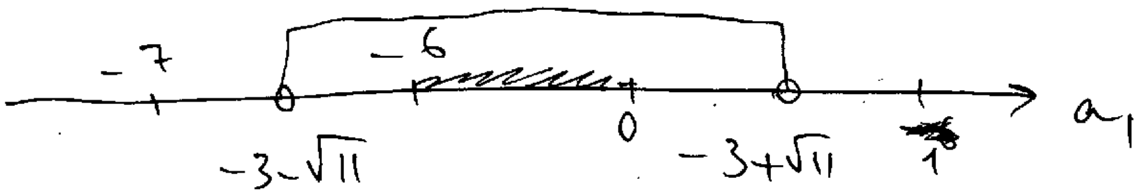
$$\begin{cases}a_1^2+6a_1+9>0\\a_1^2+6a_1-2<0\end{cases} \Rightarrow \qquad \cancel{a \in \mathbb{R} \setminus \{}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3\}\\a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})\end{cases}$$

Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то т.к.:

$3=\sqrt{9}<\sqrt{11}<\sqrt{16}=4 \qquad -4<-\sqrt{11}<-3$

$0<\sqrt{11}-3<1 \qquad -7<-3-\sqrt{11}<-6$



$$\begin{cases}a_1 \in [-6;0]\\a_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3\}\end{cases} \Rightarrow a_1 \in [-6;0] \setminus \{-3\}$$

Проверим, подходят ли все указанные значения a_1

1) $a_1 = 0$

$a_6 = 5 \qquad a_7 = 6 \qquad S = \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 5 = 45$

$a_{12} = 11 \qquad a_{11} = 10 \qquad a_6 a_{12} = 55 > 45+1$ – выполнено

$a_7 a_{11} = 60 < 45+17 = 62$ – выполнено (2)

Варіант 17 Чистовик Математичка, 11 кл

2) $a_1=-1$

$a_6=4$ $a_{10}=8$ $a_6a_{12}=40>36=S+1$

$a_{12}=10$ $a_7a_{11}=45<52=S+17$

$a_7=5$ виконано

$a_{11}=9$

$S=\frac{-1+8}{2}\cdot 10=35$

3) $a_1=-2$

$a_6=3$ $a_7=4$ $a_{10}=7$

$a_{12}=9$ $a_{11}=8$ $S=\frac{7-2}{2}\cdot 10=25$

$a_6a_{12}=27>S+1=25+1=26$

$a_7a_{11}=32<25+17=42=S+17$ виконано

4) $a_1=-4$

$a_6=1$ $a_7=2$ $a_{10}=5$

$a_{12}=7$ $a_{11}=6$ $S=\frac{5-4}{2}\cdot 10=5$

$a_6a_{12}=7>5+1=S+1$

$a_7a_{11}=12<5+17=S+17$ виконано

5) $a_1=-5$

$a_6=0$ $a_7=1$ $a_{10}=4$

$a_{12}=6$ $a_{11}=5$ $S=\frac{4-5}{2}\cdot 10=-5$

$a_6a_{12}=0>-5+1=-4=S+1$

$a_7a_{11}=5<-5+17=12=S+17$ виконано

6) $a_1=-6$

$a_6=-1$ $a_{12}=5$ $a_7=0$ $a_{11}=4$ $a_{10}=3$; $S=-15$

$a_6a_{12}=-5>\cancel{-16}-15+1=S+1$

Вариант 17 Чистовик Математика, 11кл

$a_7 a_{11} = 0 < 17 - 15 = 2 = S + 17$ выполнено

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$

4

Вариант 17 Чистовик Математика, 11кл

№3

Рассмотрим множество всех точек $(a;b)$, которые удовлетворяют $a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)$

$$a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a+2b \geq 2 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a+2b \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2a+2b \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

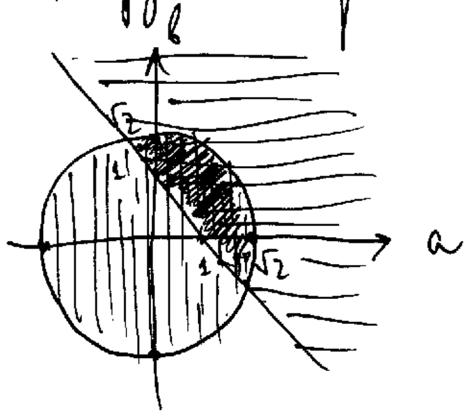
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b \geq 1 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b \le 1 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $a^2+b^2 \le 2$ — круг с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$. Проходит через точку $(1;1)$.

2) $(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$ — круг с центром в точке $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$. Проходит через точку $(0;0)$

Изобразим мн-во точек, удовлетворяющих системе неравенств

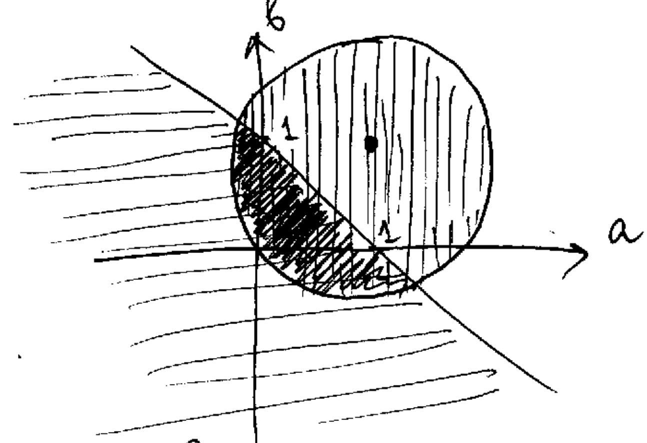
$$\begin{cases} a+b \geq 1 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases}$$



Закрашенный сегмент круга — искомое мн-во точек

Изобразим мн-во точек, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} a+b\le 1 \\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2 \end{cases}$$



Заштрихованная область является искомым мн-вом точек.

Линия центров (проходящая через точки $(0;0)$ и $(1;1)$) задается уравнением $a=b$. Тогда прямая $b=1-a$ перпендикулярна ей, причем точкой пересечения этих прямых — $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ — отрезок, соединяющий центры, делится пополам $\Rightarrow$ $b=1-a$ — ГМТ, равноудаленных от центров двух кругов $\Rightarrow$ $b=1-a$ — радикальная ось двух окружностей $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ точки их пересечения лежат на прямой $a+b=1$

Изобразим совокупность полученных мн-в точек

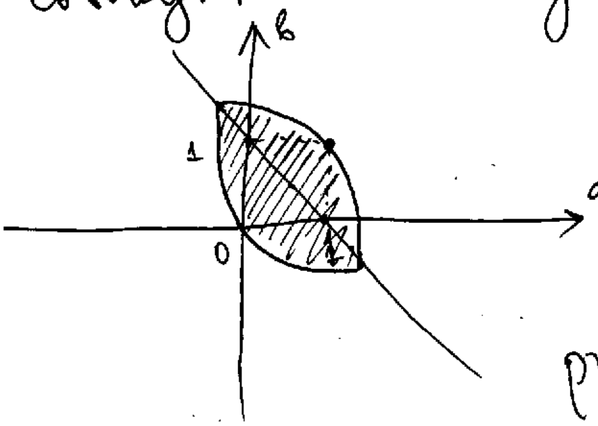
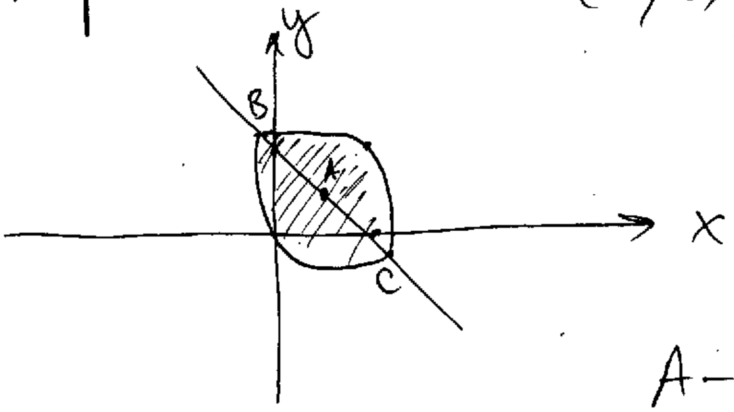


рис. 1

Вариант 17 Чистовик Математика, 11

Рассмотрим $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$. Это неравенство задает круг с центром в точке $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

Мн-во точек на рис. 1 задает всевозможные варианты расположения центра этого круга (с центром в точке $(a;b)$).



Пусть B и C – точки пересечения окружностей $x^2+y^2=2$ и $(x-1)^2+(y-1)^2=2$; A – середина BC.

Ясно, что A имеет координаты $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Рассмотрим часть мн-ва точек на рис. 1 под прямой $b=-a+1$. В силу симметрии, все рассуждения верны и для второй части.

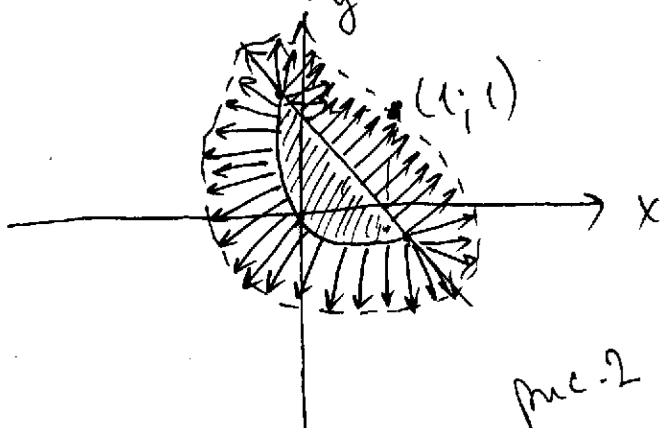


рис. 2

Будем откладывать от точек этого множества круги с радиусом $\sqrt{2}$. Под прямой $y=1-x$ получаем новый сегмент (т.к. в каждой точке на границе

7

мн-ва точек (исходного) можно поставить в соответствие радиус круга с центром в этой точке, перпендикулярной касательной к данному мн-ву в данной точке). Тогда проводя радиусы к сегменту (как на рис. 3), и т.к. они перпендикулярны касательным в этой точке, то радиусы нового сегмента будут продолжениями проведенных радиусов.

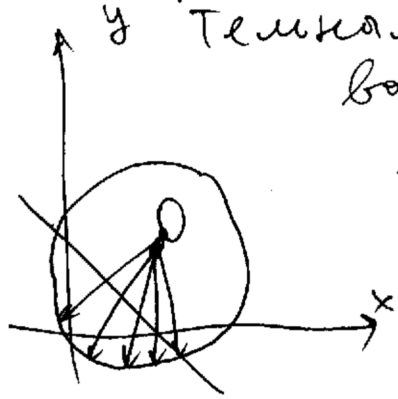
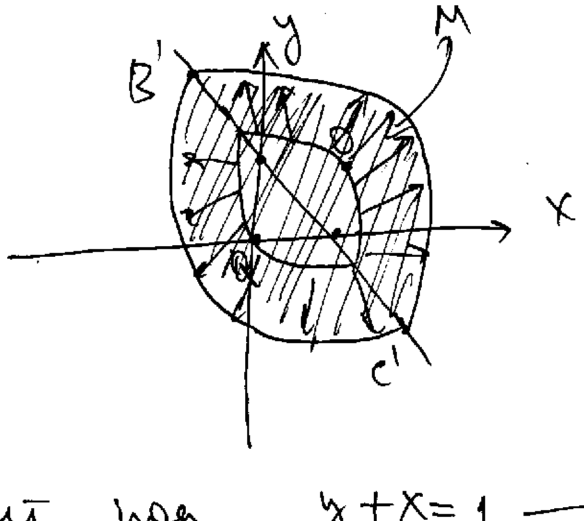


рис. 3

Получаем, что новый сегмент – сегмент круга с центром в точке $(1;1)$ и радиусом $R=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (т.к. радиус исходной окружности равен $\sqrt{2}$, все радиусы, проведенные на рис. 2 равны $\sqrt{2}$).

Фигура M на плоскости XoY:



Сегмент под $y+x=1$ — часть окружности $(x-1)^2+(y-1)^2=8$, над $y+x=1$ — окружность $x^2+y^2=8$. Точки пересечения лежат на $y=1-x$

$$x^2+(1-x)^2=8$$

$$2x^2-2x-7=0 \qquad D=4\cdot 15$$

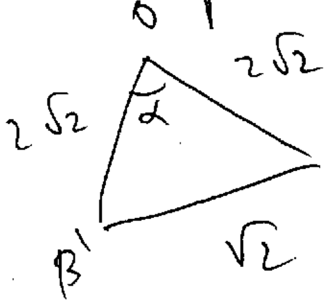
$$x=\frac{2\pm 2\sqrt{15}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}$$

$$B'\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2};\frac{1+\sqrt{15}}{2}\right) \qquad C'\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2};\frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$B'C'=\sqrt{2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2}-\frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$

Пусть O — точка с координатами $(1;1)$

Рассмотрим $\triangle B'OC'$



$B'O=OC'=2\sqrt{2}$

Пусть $\alpha=\angle B'OC'$

По т. косинусов

$$8+8-2\cdot 8\cdot\cos\alpha=2$$

$$1-\cos\alpha=\frac{2}{16} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{7}{8}$$

Т.к $\alpha\in(0;\pi)$, то $\sin\alpha>0$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

Вариант 17 Чистовик Математика 11

$$S_{B'OC'} = \frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Площадь ~~сегмента~~ сектора равна:

$$S = \frac{\pi\cdot(2\sqrt{2})^2}{2\pi}\cdot\arccos\frac{7}{8} = 4\arccos\frac{7}{8}$$

Площадь сегмента:

$$S_1 = S - S_{B'OC'} = 4\arccos\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{15}}{2}$$

M состоит из 2 одинаковых сегментов, т.е.

$$S_M = 2S_1 = 8\arccos\frac{7}{8} - \sqrt{15}$$

Ответ: $8\arccos\frac{7}{8} - \sqrt{15}$

~~Ответ б) $a_1 = x$~~

Черновик

$d = 1$

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9) = 10a_1 + 45$

$a_6 = a_1 + 5 \qquad a_{12} = a_1 + 11$

$a_7 = a_1 + 6 \qquad a_{11} = a_1 + 10$

$55 - 45 - 1$

$60 - 45 - 17 =$
$= 15 - 17$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1 + 46 \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases}$$

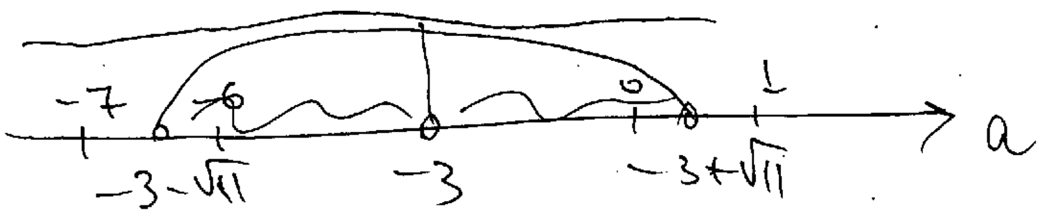
$\frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$$

$D = 36 - 36 = 0 \qquad a_1 \neq -3$

$D = 36 + 8 = 44 = 2^2 \cdot 11$

$a \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11})$



~~$a \in (-3; -\sqrt{11})$~~ $\qquad a \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}) \setminus \{-3\}$

т.к. a_1 целые, то:

~~$\sqrt{3} =$~~ $3 < \sqrt{11} < 4 \qquad 3 < \sqrt{11} < 4$

$-4 < -\sqrt{11} < -3 \qquad 0 < -3 + \sqrt{11} < 1$

$-7 < -3 - \sqrt{11} < -6$

$-6; -5; -4; -2; -1; 0$

$\cancel{a_7 + a_{11} = 0 < -15+17=2 = S+17}$ ~~выполнено~~

~~Ответ:~~ $\cancel{-6; -5; -4; -2; -1; 0}$

мн-ва точек (исходного) можно поставить в соответствие
радиус круга с центром в этой точке и перпенд

$a_6 a_{12} > S_{10}+1$ $\quad a_1 - ?$ $\quad \{a_n\} - АП,\ a_i \in \mathbb{Z}$

$a_7 a_{11} < S+17$ $\quad a_1 \in \mathbb{Z},\ d \in \mathbb{Z}$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{2a_1+9d}{2} \cdot 10 + 1 =$

$= 10a_1 + 45d + 1$

$\parallel$

$a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2$

$a_{12} = a_1 + 11d \qquad a_{12} - a_6 = 6d$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_1^2 +$

$(a_6+d)(a_{12}-d) = a_6 a_{12} + (a_{12}-a_6)d - d^2 >$

$a_7 a_{11}$

$\wedge$

$S+17$ $\quad > S_{10} + 1 + 6d - d^2$

$D = 36 - 4 \cdot 16$

$16 > 6d - d^2$

$d^2 - 6d + 16 > 0$

$S+17 > a_7 a_{11} = (a_6+d)(a_{11}-d) = a_6 a_{11} - a_6 d + a_{11} d - d^2 =$

$= a_6 a_{11} + d(a_1 + 10d - a_1 - 5d) - d^2 =$

$= a_6 a_{11} + 4d^2 > S + 1 + 4d^2$

$16 > 4d^2$

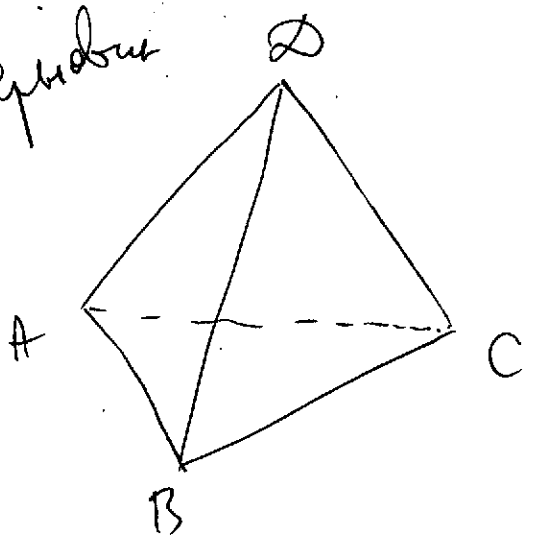
$d^2 < 4$ $\quad d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = \{-1; 0; 1\}$

$|d| < 2$ $\quad d > 0$ (т.к. $\{a_n\}$ возрастает)

$\boxed{d=1}$

Черновик

черновик



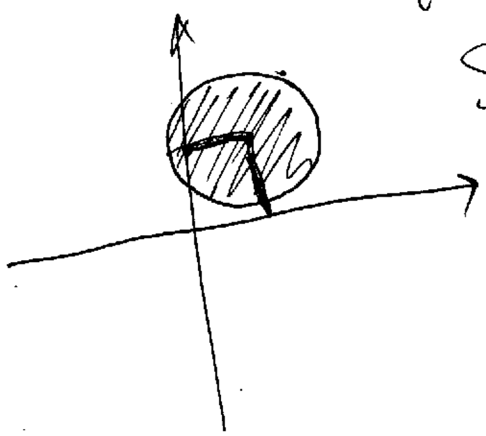
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b; 2)$

круг с центром в $(a;b)$,

$R=\sqrt{2}$

$S=\pi R^2=2\pi$



1) $2a+2b \le 2$

$\boxed{a+b \le 1}$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

$\boxed{(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2}$

$a(a-2)+b(b-2) \le 0$

$a \le 1-b$

$\cancel{a(a-2)}$

$a=0$
$b=\frac{3}{2}$

$(a+b)^2 \le 4$

$1 \le a+b \le 2$

2) $2a+2b \ge 2$

$\boxed{a+b \ge 1}$

$\boxed{a^2+b^2 \le 2}$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$

$2 \ge a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$

$\frac{(a+b)^2}{2} \le a^2+b^2 \le 2(a+b)$

$(a+b)^2 \le 4(a+b)$

$(a+b)(a+b-4) \le 0$

$0 \le a+b \le 4$

$$\begin{cases}(a_1+5)(a_1+11) > a_1\cdot 10+45+1\\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1+45+17\end{cases}$$

Черновик

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55-10a_1-45-1>0\\ a_1^2+16a_1+60-10a_1-45-17<0\end{cases}$$

$$1+S < a_6 a_{12} = (a_7 - d)(a_{11}+d) = a_7 a_{11} - 4d^2 - d^2$$

$36+8=$

$=44$

$\frac{-6\pm 2\sqrt{11}}{2}=$

$=-3\pm\sqrt{11}$

$a_1 = 0$

$d = 1$

$S = \frac{0+9}{2}\cdot 10 =$

$= 45$

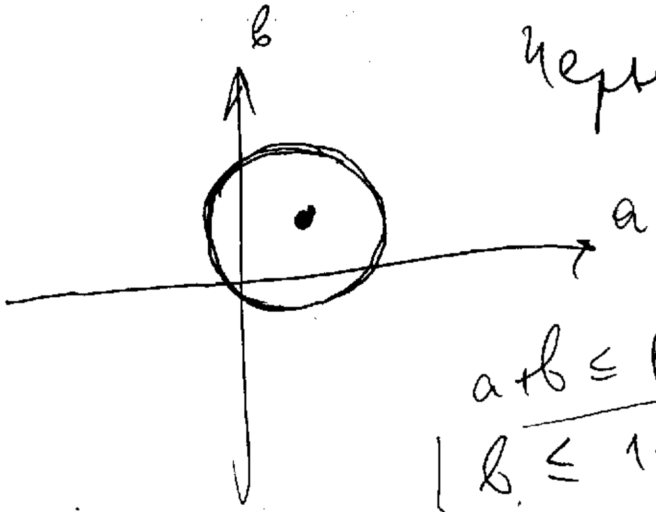
$a_6 = 5$

$a_{12} = 11$

$55 > 46$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a+b \le 1 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b \ge 1 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases}\end{array}\right.$$

черновик



$a+b \le 1$

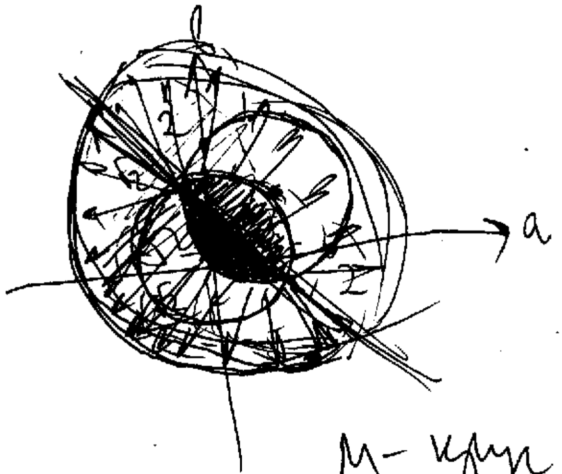
$\boxed{b \le 1-a}$

$(b-1)^2 = 2$

$b = 1+\sqrt{2}$

$(b-1)^2 = 1$

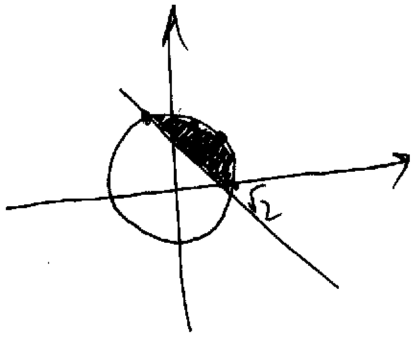
$b-1 = 1$



M - круг

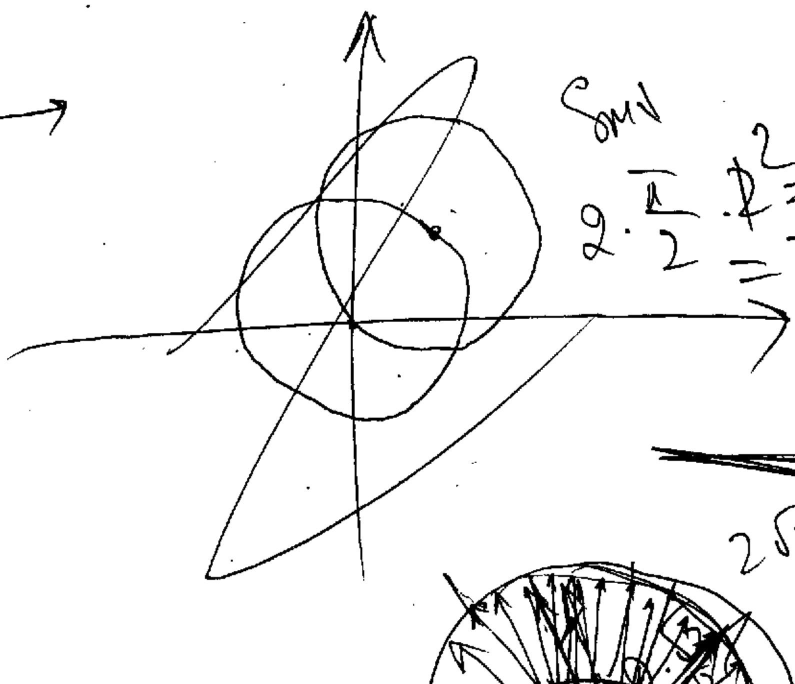
$S_M = (\sqrt{2})^2\pi = 2\pi$

8π

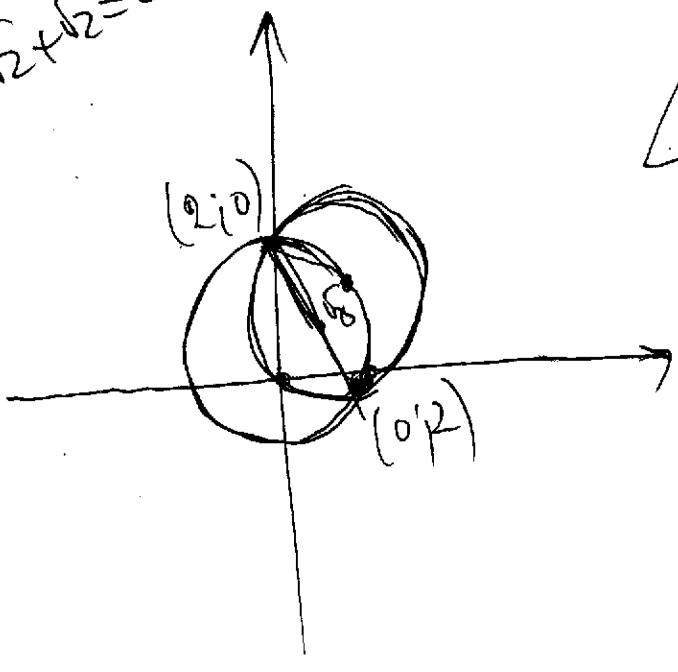


S_{MN}

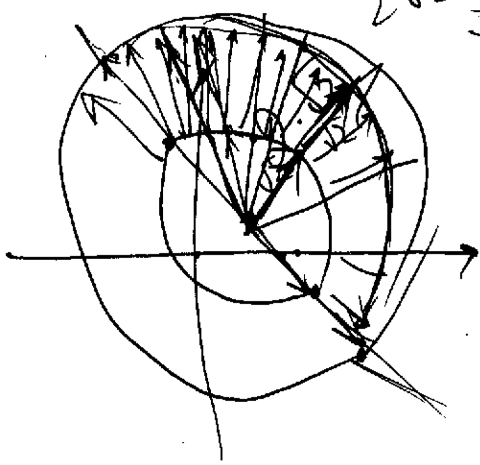
$2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R^2 = \pi(2\sqrt{2})^2 = 8\pi$



$\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$



$2\sqrt{2}$



Вариант 17 ~~Чистовик~~ Черновик Математика, 11

$x^2+(1-x)^2=8$

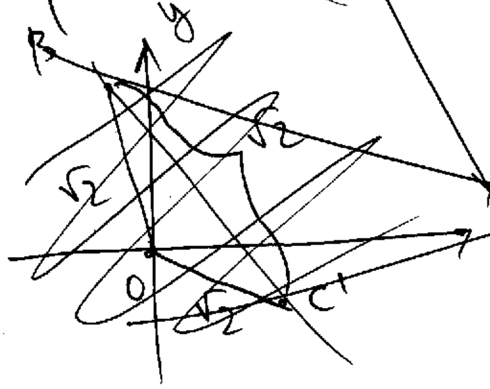
$2x^2-2x-7=0$

$D=4+4\cdot 14=4\cdot 15$

$x=\frac{2\pm 2\sqrt{15}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}$

$B'\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2};\ \frac{1+\sqrt{15}}{2}\right)$ $\quad C'\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2};\ \frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)$

$B'C'=\sqrt{2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{15}-(1-\sqrt{15})}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$

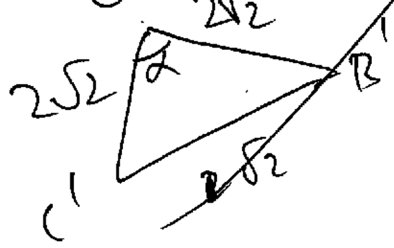


~~$\Rightarrow \angle BOC=60^\circ$ (т.к. $B'C'=$ $=OB'=OC'=R=2\sqrt2$~~

O — точка (1;1)

В треугольнике $B'OC'$:

Пусть $\alpha=\angle B'OC'$



По т. косинусов:

~~$2+2-2\cdot(\sqrt2)^2\cdot\cos\alpha=8$~~

~~$\cos\alpha=\frac{-4}{4}=-1$~~

$8+8-2\cdot 8\cos\alpha=2$

$\cos\alpha=\frac{14}{8\cdot 2}=\frac{7}{8}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}$

$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2$ Черновик

$-2a-2b+2=0$

$a+b=1$

$a^2+(1-a)^2=2$

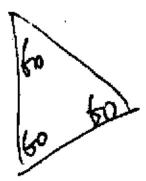
$2a^2-2a-1=0$

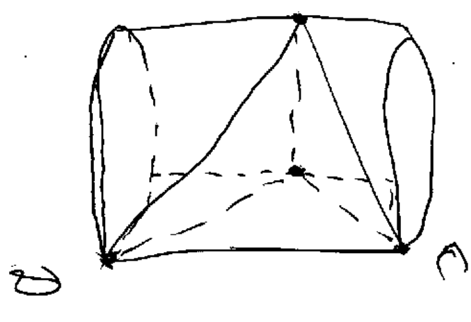
$D=4+4\cdot 2=12$

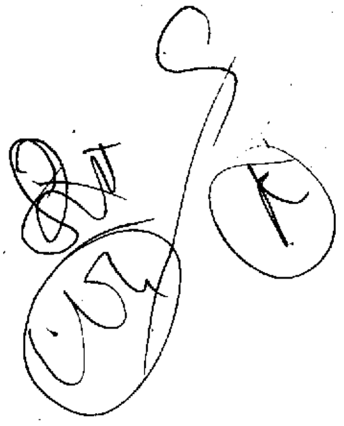
$\frac{2\pm 2\sqrt{3}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ $\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot 2}=\sqrt{6}$

$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$







Вариант 17 ~~Чистовик~~ Математика, 11 кл

Черновик

№3

1) Пусть $\min(2a+2b; 2) = 2a+2b$, т.е.

$2a+2b \le 2 \Rightarrow a+b \le 1$, тогда

$a^2+b^2 \le 2a+2b \Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

2) Пусть $\min(2a+2b; 2) = 2 \Rightarrow 2a+2b \geq 2$, т.е.

$a+b \geq 1$, тогда $a^2+b^2 \le 2$

~~Изобразим мн-во всех точек $(a; b)$, которое удовлетворяет неравенству $a^2+b^2 \le \min(2a+2b; 2)$ или~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b \geq 1 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b \le 1 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

~~$a^2+b^2 \le 2$~~

~~$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$~~

~~a^2+b^2~~

Исп.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103539**

ID профиля: **331497**

Вариант 17

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=6 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

. Ясно, что числа a, b, c не содержат простых чисел в разложении, кроме 2 и 3.

Пусть $\begin{cases} a=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1} \\ b=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2} \\ c=2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3} \end{cases}$

Все числа α_i и β_i — целые неотрицательные, причем

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=2^{\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\cdot 3^{\min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}=6 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\cdot 3^{\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1 \\ \max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=15 \\ \min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=1 \\ \max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=16 \end{cases}$$

Ясно, что упорядоченная шестерка чисел $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ определяет упорядоченную тройку (a,b,c) и наоборот. Найдем кол-во упорядоченных шестерок.

Рассмотрим тройку $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Одно из них равно 1, другое — 15, а третье не меньше 1 и

Вариант 17 Чистовик Математика, 11кл

не больше 15.

$\overline{\alpha_1}\,\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_3}$ Способов поставить единицу — 3, число 15 — на одно из 2 оставшихся, на последнее оставшееся место можно поставить одно из 1, 2, …, 15.

Итого способов $3\cdot2\cdot15=90$. Однако были дважды посчитаны способы (1, 1, 15); (1, 15, 1); (15, 1, 1); (15, 15, 1); (15, 1, 15); (1; 15; 15).

Итого способов $90-6=84$.

$\overline{\beta_1}\,\overline{\beta_2}\,\overline{\beta_3}$ Аналогично, одно из чисел равно 1, другое — 16, третье лежит на [1; 16] — целое.

Способов $3\cdot2\cdot16=96$, но также дважды были посчитано:

(1, 1, 16) (16, 16, 1)
(1, 16, 1) (16, 1, 16)
(16, 1, 1) (1, 16, 16)

Итого способов $96-6=90$

$\underset{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{\underline{84}}\cdot\underset{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\underline{90}}$ Итого способов составить шестерку чисел $84\cdot90=7560$, столько же троек (a, b, c) (упорядоченных).

Ответ: 7560

2

№5

Пусть $\alpha=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\beta=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\gamma=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq1 \\ 4x+1\neq0 \\ 5x-1\neq1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x>-4 \\ x\neq-2 \\ x\neq0 \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{5};+\infty\right)\setminus\left\{\frac{2}{5}\right\}$

Учитывая ОДЗ:

$\alpha=2\log_{5x-1}(4x+1)$

$\beta=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\gamma=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\alpha\beta\gamma=4\cdot\log_{5x-1}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$

$=4\cdot\log_{5x-1}(4x+1)\cdot\frac{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\log_{5x-1}(4x+1)}\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$

$=4\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=4.$

Вариант 17 Чистовик Математика, 11 кл

Если при некотором X одно из чисел α, β, γ равно другому и больше третьего на 1, то пусть наименьшее из них равно t. Тогда другие два равны $t+1$. Тогда

$$\alpha\beta\gamma = t(t+1)^2 = t^3+2t^2+t=4$$

Заметим, что $t=1$ является решением этого уравнения.

$$(t-1)(t^2+3t+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t^2+3t+4=0 \end{array}\right.$$

Уравнение $t^2+3t+4=0$ не имеет решений, т.к. $D=9-16<0$.

Получаем, что если какое-то из чисел α, β, γ равно 1, а другие два равны 2, то условие задачи выполняется, других случаев нет.

1) $\alpha=1$; учитывая ОДЗ:

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=1 \Rightarrow 4x+1=\sqrt{5x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2+8x+1=5x-1$$

$$16x^2+3x+2=0$$

$$D=9-4\cdot 2\cdot 16<0$$

корней нет

2) $\beta=1$.

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1 \quad ; \quad \frac{x^2}{4}+2x+4=4x+1$$

$\frac{x^2}{4}-2x+3=0$

$x^2-8x+12=0$ $\qquad x=\frac{8\pm4}{2}=4\pm2=\left\{\begin{matrix}6\\2\end{matrix}\right.$

$D=64-48=16$

$\left[\begin{matrix}x=6\\x=2\end{matrix}\right.$ удовлетворяют ОДЗ. Проверим, при каком из них $\alpha=\gamma=2$

Если $x=6$:

$\alpha=\log_{\sqrt{29}}25\neq2$

$\gamma=\log_5 29\neq2$

не подходит

Если $x=2$

$\alpha=\log_{\sqrt{9}}9=2$

$\gamma=\log_3 9=2$

подходит

3) $\gamma=1$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1$

$5x-1=\frac{x}{2}+2 \quad |\cdot2$

$9x=6 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ - удовл. ОДЗ.

$\alpha=\log_{\sqrt{\frac{10}{3}-1}}\left(\frac{8}{3}+1\right)=\log_{\sqrt{\frac{7}{3}}}\left(\frac{11}{3}\right)\neq2$

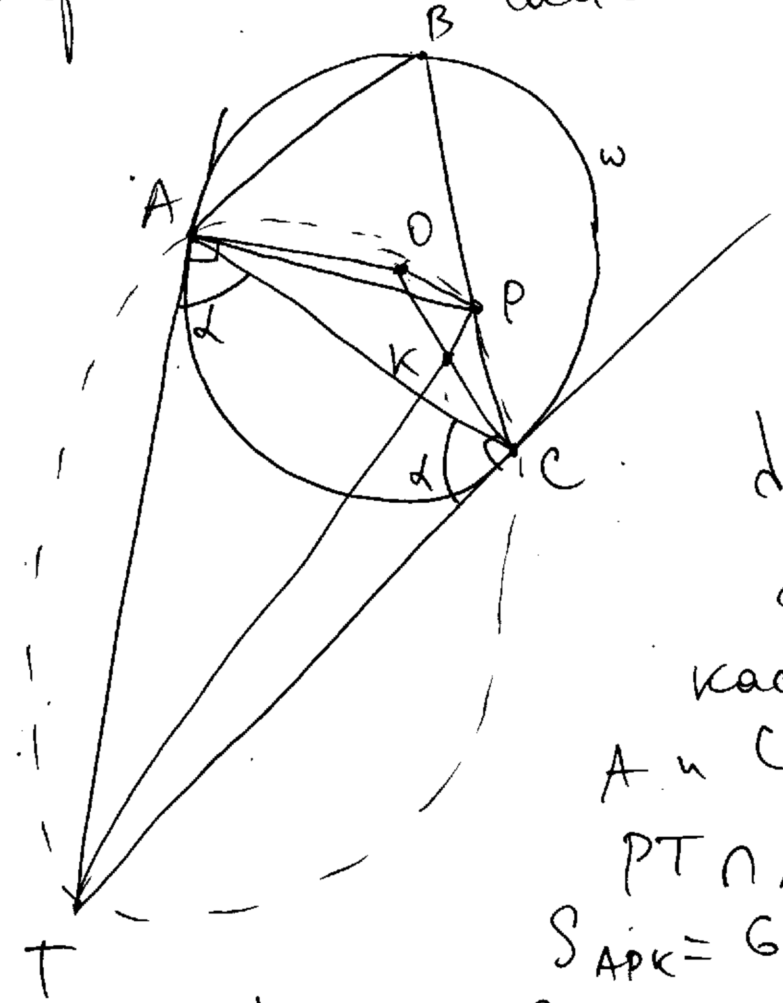
$\gamma=\log_{\frac{7}{3}}\frac{7}{3}=1$

$\beta=\log_{\frac{11}{3}}\left(\frac{7}{3}\right)^2\neq2$

Ответ: $x=2$

Вариант 17 Чистовик Математика, 11кл

N6



Дано: треуг. ABC

ω — опис. окр-ть ABC

O — центр ω

λ — опис. окр-ть AOC

$\lambda \cap BC = \{C, P\}$

касательные к ω в точках A и C пересекаются в T.

$PT \cap AC = K$

$S_{APK} = 6 \quad S_{CPK} = 4$

Найти: S_{ABC}

Решение

$CT = AT \Rightarrow \angle CAT = \angle ACT$

Пусть $\angle CAT = \angle ACT = \alpha$. Тогда т.к.

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, $\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ$, то

AOCT — вписанный в λ, то $\angle AOC =$

$= \angle AOT + \angle TOC = \angle TAC + \angle ACT = 2\alpha$;

$\angle CPT = \angle TAC = \angle TCA = \angle TPA = \alpha$.

$S_{CPK} = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot CP \cdot \sin\alpha$

$S_{PKA} = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot PA \cdot \sin\alpha$

$$\frac{S_{CPK}}{S_{PKA}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{2} PK \cdot PC \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot PK \cdot PA \cdot \sin\alpha} = \frac{PC}{PA}$$

По теореме об угле между касательной и хордой: $\angle CBA = \angle TAC = \alpha$.

$\angle APB = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle PAB = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \alpha =$

$= \alpha \Rightarrow AP = PB$

$$\frac{2}{3} = \frac{PC}{PA} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow \cancel{2PB + 2PC = 2BC}$$

$$\Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{PC}{BC} = \frac{PC}{PC+PB} = \frac{1}{1+\frac{PB}{PC}} = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$S_{ACP} = 4 + 6 = 10$$

$$\frac{S_{ACP}}{S_{ABC}} = \frac{PC}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{5 S_{APC}}{2} = \frac{5}{2} \cdot 10 = 25$$

Ответ: $S_{ABC} = 25$

б) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{7}{5} \Rightarrow \sin(\operatorname{arctg}\frac{7}{5}) = \frac{7}{\sqrt{74}} = \sin\alpha$

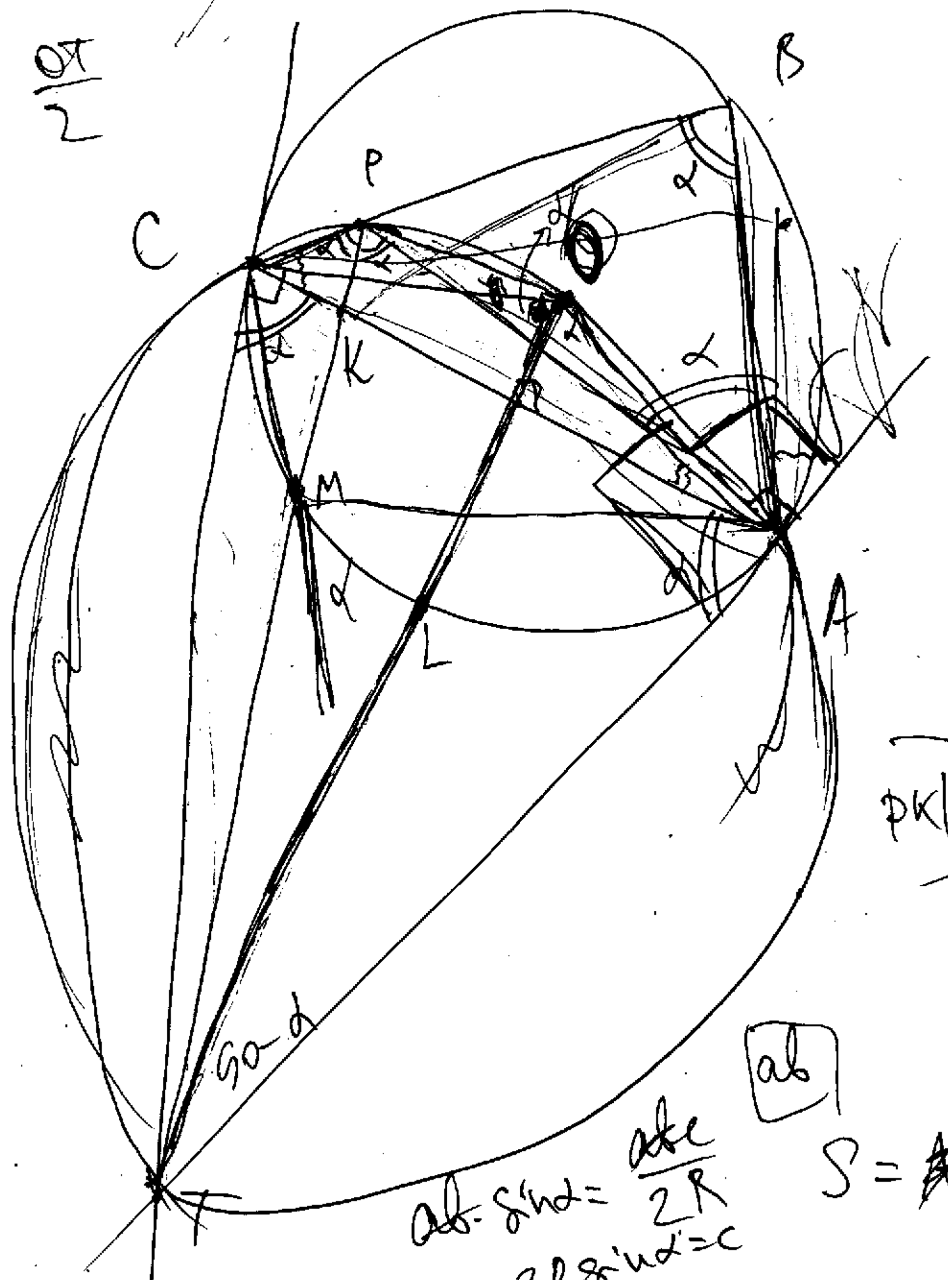
$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R(\omega)$ — по теореме синусов

$AC = \frac{14}{\sqrt{74}} R(\omega)$; т.к. $\angle CPK = \angle CBA = \alpha$, то

$PK \parallel AB$

arctg → sin → AC из S

$\frac{OT}{2}$



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

$\triangle CPK \sim \triangle TAK$

$\triangle APK \sim \triangle TCK$

$S_{CPK} = \frac{1}{2} CP \cdot PK \cdot \sin\alpha$

$S_{PKA} = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot PA \cdot \sin\alpha$

$\frac{S_{CPK}}{S_{PKA}} = \frac{CP}{PA} = \frac{2}{3} =$

PK∥AB $= \cancel{\frac{CK}{AK}} = \frac{CK}{AK}$

$\cancel{\frac{CP}{CK} = \frac{PA}{AK}}$

$\boxed{ab}$

$ab \cdot \sin\alpha = \frac{abc}{2R}$ $\quad S = \frac{abc}{4R}$

$2R\sin\alpha = c$

$PC = \frac{2}{3} AP$

$R = \frac{abc}{4S}$

$\boxed{\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R} = \frac{abc}{2S}$

$BC = 2R\sin\alpha$

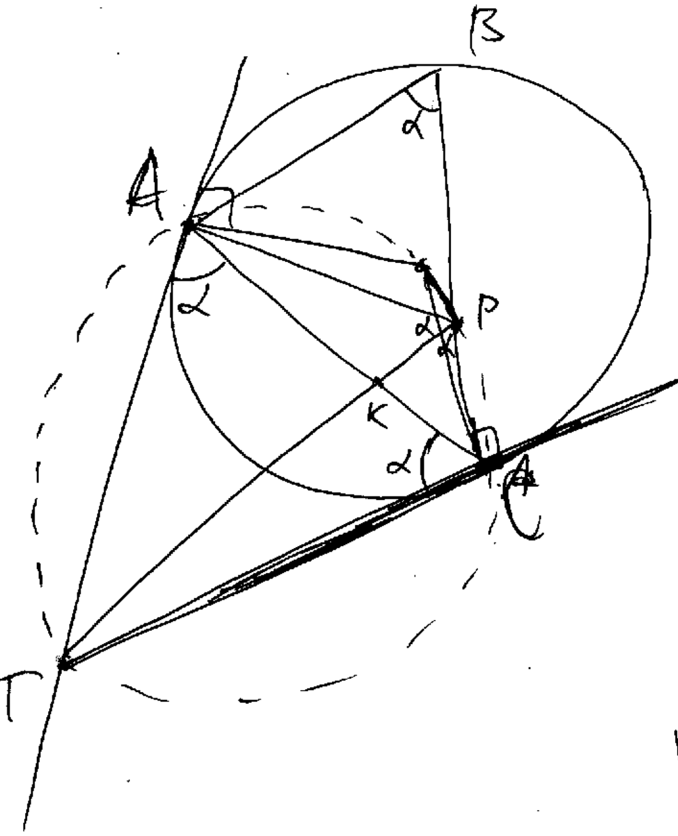
$S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot BP \cdot AB$

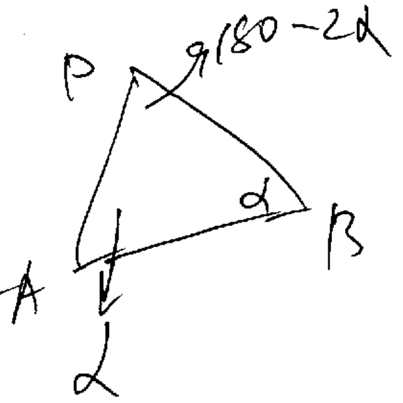
$$\frac{S_{APC}}{S_{ABP}} = \frac{PC}{PB} = \frac{10}{S_{ABP}} = \frac{2AP}{3PB} = \frac{10}{S_{ABP}}$$

$$S_{ABP} = \begin{cases} 15 \cdot \frac{BP}{AP} = BP \cdot AP \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

$2R \cdot \frac{7}{\sqrt{74}}$

$$\frac{30}{\sin 2\alpha} = AP^2$$





$S_{APB} = \frac{1}{2}$.

$\boxed{AP = PB}$

$\cancel{\frac{BP}{BC}}$

$\frac{3}{2} = \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{CK}$.

$\frac{BP}{PC} = \frac{3}{2}$

$PC = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3}\cdot BP$

$BP = \frac{3}{5}BC$

$PC = \frac{2}{5}BC$

$BC = PC + BP = \frac{5}{3}BP$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BC}{PC} = \frac{PC+BP}{PC} = 1 + \frac{BP}{PC} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$S_{ABC} = \frac{5}{2}\cdot 10 = 25$

$y^3 + y^2 - 4 = 0$

$y^2(y+1) = 4$ $\qquad \cancel{y = x}$

$\cancel{y^3 + py + q = 0}$

$$\left(y+\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(y+\frac{1}{3}\right) - \frac{106}{27} = 0$$

$\cancel{x = y}$

$$\left(y+\frac{1}{3}\right)^3 = y^3 + y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{27}$$

$\times \begin{array}{r} 27 \\ 4 \\ \hline 108 \end{array}$

$108 \mid \frac{27}{4}$

$$-\frac{1}{3}y - \frac{1}{27} - 4$$

$$\frac{2}{27} - 4 = -\frac{106}{27}$$

$$-\frac{1}{27} + \frac{3}{27} = \frac{2}{27}$$

$$\frac{1}{27} - \frac{3}{27} - \frac{106}{27}$$

$$y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{106}{27} = 0$$

$$(\alpha+1)^2 \cdot \alpha = 4 \qquad \alpha = 1$$

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha - 4 = 0$$

	1	2	1	-4
1	1	3	4	0

$\alpha = 1$

$\alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$

$\Delta < 0$

$$t^3 + 2t^2 + t - 4 \mid t - 1$$
$$= t^2 + 3t + 4$$

$t^3 - t^2$

$3t^2 + t$

$3t^2 - 3t$

$4t - 4$

$$\frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$5 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{7}{3} = 4$$

$\frac{10}{3} - 1$

$$\frac{2}{3 \cdot 2} + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}}$

~~$\sin\alpha =$~~ $\qquad$ $50+24$

$\cos\alpha = \frac{5}{7}\sin\alpha$

$\sin^2\alpha\left(1+\frac{25}{49}\right) = 1$

---

a, b, c

$a = 2 \cdot 3^k$ $\qquad$ $b = 2^m \cdot 3$ $\qquad$ $c = 2^n \cdot 3^l$ $\qquad$ $n \geq 1$, $l \geq 1$

$\#(k>1, m>1, n>1, l>1)$

$k \leq 15$

$l \leq 15$

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1}$ $\qquad$ $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2}$ $\qquad$ $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3}$

$\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 1$ $\qquad$ $\min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 1$

$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 15$ $\qquad$ $\max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 16$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ задают a, b, c $(\leftrightarrow)$

$\#(\ ) = \#((a,b,c))$ $\qquad$ 84 $\qquad$ 90 $\qquad$ 7560

$\alpha_1 = 1$ $\qquad$ $1 \ 1 \ 15$

$\alpha_2 = 15$ $\qquad$ ~~$1 \ 1 \ 15$~~ $\qquad$ $\_ \ \_ \ \_$

α_3 $\qquad$ $96\,(3 \cdot 2 \cdot 15 - 2)(3 \cdot 2 \cdot 16 - 2)$

$5x-1=\alpha$ $\qquad\qquad$ $a=b=c-1$

$4x+1=\beta$

$\frac{x}{2}+2=\gamma$

$2\log_\alpha\beta\ ;\ 2\log_\beta\gamma\ ;\ \log_\gamma\alpha$

1) $\log_\alpha\beta=\log_\beta\gamma=\log_\gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$

$\log_\alpha\beta=\log_\beta\gamma$ $\qquad$ $\gamma^{\log_\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$

$\beta^{\log_\alpha\beta}=\gamma$ $\qquad$ $\beta^{\log_\alpha\beta\log_\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$

$\log_\alpha\beta=\frac{\cancel{\log}\ 1}{\log_\beta\alpha}$

$\beta=\boxed{\alpha^{\log_\beta\gamma}=\beta^{\log_\gamma\alpha}}$?

$\log_\alpha\beta\cdot\log_\gamma\alpha=\log_\beta\gamma$

$\log_\beta\alpha=\frac{\log_\beta\gamma}{\log_\alpha\gamma}=\frac{\log_\gamma\alpha}{\log_\gamma\beta}=\log_\beta\alpha$

$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ $\qquad$ $\log_a b\cdot\log_c a=\log_b c$

$\cancel{a=\log}$

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$\cancel{\log}$

$\log_b c=\log_a c\cdot\log_a b$

$\alpha = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\beta = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\gamma = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$3)\ \alpha - 1 = \beta = \gamma$

ОДЗ: $x > \frac{1}{5}$ $x > -4$

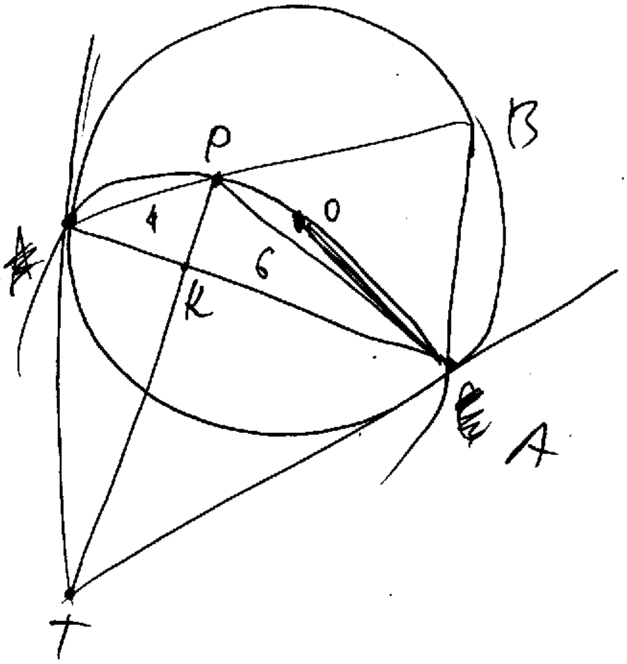
$x > -\frac{1}{4}$

$1)\ \alpha = \beta = \gamma - 1$

$2)\ \alpha = \beta - 1 = \gamma$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{5x-1}(4x+1) = \dfrac{\log_{5x-1}\left(\frac{x+4}{2}\right)}{\log_{5x-1}(4x+1)}$



$\cancel{\log_{5x-1}(4x+1)} = \dfrac{\log_{\frac{x+4}{2}}(4x+1)}{}$

$\sin\alpha = \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{\sqrt{74}}$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R(\omega)$ $AC = 2R(\omega)\,\frac{7}{\sqrt{74}}$

$\sin\alpha = \frac{AC}{2R}$

$(a, b, c) = 6$

$[a, b, c] = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$a = 2 \cdot 3^{\cdot\cdot}$

$b = 2^{\cdot\cdot} \cdot 3$

$c = 2^{\cdot\cdot} \cdot 3$

Одна из 2|3 входит в каждое из чисел a, b, c 1 раз, второе ≥ 1 раза.

Пусть $a = 2 \cdot 3^k$ $\quad k \geq 1$

$b = 2^m \cdot 3$ $\quad m \geq 1$

$c = 2^x \cdot 3^y$ $\quad x = 1$ или $y = 1$

~~1) $\cancel{m+x+y}$ $y = 1$~~

~~$x \geq 1$~~

~~$\begin{cases} 1 + m + x = 15 \\ k + 2 = 16 \end{cases}$~~

~~$k = \underline{\underline{15}}$~~

~~2) $x = 1$~~

~~$y \geq 1$~~

~~$\begin{cases} 1 + m + 1 = 15 \\ k + 1 + y = 16 \end{cases}$~~

~~$m + x = 14$~~

$\max\{1, m, x\} = \max\{m, x\} = 15$

$\max\{1, k, y\} = \max\{k, y\} = 16$

1) $x = 15 \Rightarrow y = 1;$

$1 \leq k \leq 16$

$1 \leq m \leq 16$

a

b

c

$2\log_a b \,;\, 2\log_b c \,;\, \log_c \cancel{b}\, a$

$$\frac{\log_b a}{\log_b c} = \frac{1}{\log_a b \log_b c} = \frac{4}{\alpha\beta} \qquad \cancel{\frac{\log_a b}{\log_a c}}$$

$\boxed{\alpha\beta\gamma = 4}$

$4 \cdot \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a =$

$= 4 \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \log_c a = 4$

$\alpha = \beta = \gamma - 1$

$\alpha \cdot \alpha \cdot (\alpha + 1) = 4$

$\alpha^3 + \alpha^2 - 4 = 0 \qquad -4$

$5+5+7$

	1	1	0	-4
4	1	-3	12	70
-2	1	-1	2	-8
2	1	3	6	8
-2	1	-1	2	-8

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\cancel{\gamma = \beta^{\log_\alpha \beta} =}$

$\alpha^{\log_\beta \gamma} = \beta$

$\gamma^{\log_\beta \alpha} = \beta$

$\log_\gamma \gamma^{\log_\beta \alpha} = 1$

$\log_\alpha \beta = \log_\beta \gamma = \log_\gamma \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$

$\gamma^{\log_\alpha \beta} = \gamma^{\log_\beta \gamma}$

$a^{\log_c b} = b^{\boxed{\log_c a}}$

$\log_c a = \log_b a \cdot \log_c b$

$$\frac{\log_b a}{\log_b c}$$