Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103508**

ID профиля: **343921**

Вариант 17

Чистовик

1\. 1) Пусть d – разность прогрессии, тогда $d \in Z$, т.к. все члены целые, и $d > 0$, т.к. прогрессия возрастающая

2) $$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_{10}) = 5(2a_1 + 9d)$$

3) $$a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > S + 1$$
$$a_7 \cdot a_{11} = (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < S + 17$$

4) $$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > S + 1 \\ -a_1^2 - 16a_1d - 60d^2 > -S - 17 \end{cases}$$

сложим 2 неравенства:

$$-5d^2 > -16 \Rightarrow d^2 < \frac{16}{5}$$
$$-\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$$
$$\begin{cases} -0{,}8\sqrt{5} < d < 0{,}8\sqrt{5} \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow d \in (0; 0{,}8\sqrt{5})$$

5) $0{,}8\sqrt{5} \approx 1{,}8$; $d \in Z \Rightarrow d = 1$

6) $S = 5(2a_1 + 9) = 10a_1 + 45$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \end{cases}$$

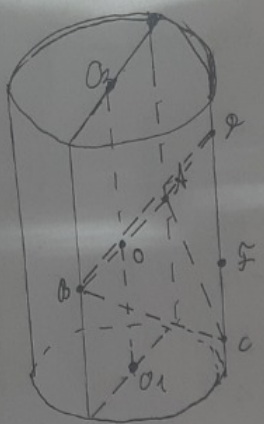
$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \Rightarrow (a_1 + 3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \Rightarrow D' = 9 + 2 = 11 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}) \setminus \{-3\}$

7) $\sqrt{11} \approx 3{,}3 \Rightarrow a_1 = -6$; $a_1 = -5$; $a_1 = -4$; $a_1 = -2$; $a_1 = -1$; $a_1 = 0$

Ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

Чистовик



1) Пусть O – середина AB, тогда

$\begin{cases} DO \perp AB \text{ (т.к. } BD = DA \Rightarrow \Delta \text{ равноб.)} \\ OC \perp AB \text{ (т.к. } AC = BC \Rightarrow \Delta \text{ равноб.)} \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (DOC) \Rightarrow AB \perp DC$

2) $DC \parallel O_2O_1$ (ось цилиндра) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp O_2O_1 \Rightarrow AB$ находится в плоскости параллельной основанию цилиндра

3) AB – хорда окр-ти $\Rightarrow$ чтоб радиус был наименьшим AB – должен быть диаметром $\Rightarrow R = \frac{AB}{2} = 1 \Rightarrow AO = OB = 1$

4) Пусть F – точка пересечения DC и плоскости параллельной основанию, которой принадлежит AB $\Rightarrow OF = 1$

5) $\Delta BDC = \Delta ADC$ (по 3-ём сторонам) $\Rightarrow BF = AF \Rightarrow \Delta AFB$ равноб. $\Rightarrow$

$\Rightarrow OF$ – высота (т.к. $AO = OB$)

6) $AF = BF = \sqrt{OF^2 + OB^2} = \sqrt{2}$

7) $DC \perp$ Основанию (т.к. DC лежит на образующей) $\Rightarrow$

$\Rightarrow DC \perp (ABF) \Rightarrow DC \perp BF$

8) $DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{36 - 2} = \sqrt{34}$

9) $FC = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{23}$

10) $DC = DF + FC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

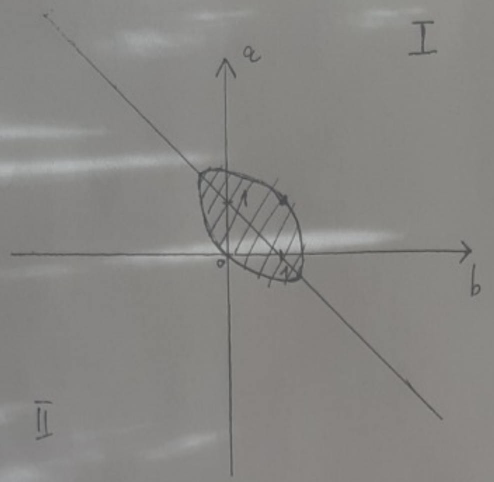
Ответ: $DC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Чистовик

3. 1) Решим 2-ое неравенство в системе координат a,b

а) $2a+2b=2$

$a=1-b$



2 сектора: в I-ом $2<2a+2b$; во 2-ом $2a+2b<2$

I : $a^2+b^2 \leq 2$

II : $a^2+b^2 \leq 2a+2b \Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2$

Решением неравенства будет заштрихованная фигура

2) Фигура M будет представлять "набор" ~~окружностей~~ кругов в плоскости x,y с центром в точке (b, a) и радиусом $\sqrt{2}$

Черновик

1\. $\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10 = 5(a_1+a_{10}) = S$

$a_{10} = a_1 + 9d \qquad 5(2a_1+9d) = S$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2 + 16a_1d + 55d^2$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > S+1$

$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < S+17$

$-a_1^2 - 16a_1d - 60d^2 > -S - 17$

$-5d^2 > -16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$6{,}5^2 = 42{,}25$

$-1{,}76 = -0{,}8\sqrt{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{5} = -\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0{,}8\sqrt{5} \approx 0{,}8\cdot 2{,}2\ldots$

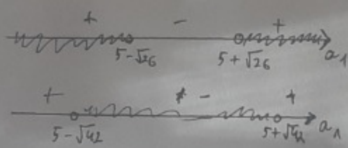
$\Downarrow$

$d = \pm 1;\ d = 0$

1) $d = 0 \Rightarrow 5(2a_1+9d) = 10a_1 = S$

$a_1^2 > S+1 = 10a_1+1 \Rightarrow a_1^2 - 10a_1 - 1 > 0 \quad D' = 25+1 = 26 \Rightarrow a_1 = 5 \pm \sqrt{26}$

$a_1^2 < S+17 = 10a_1+17 \Rightarrow a_1^2 - 10a_1 - 17 < 0 \quad D' = 25+17 = 42 \Rightarrow a_1 = 5 \pm \sqrt{42}$



$a_1 \in (5-\sqrt{42};\ 5-\sqrt{26}) \cup (5+\sqrt{26};\ 5+\sqrt{42})$

$\sqrt{42} \approx 6{,}5 \qquad \sqrt{26} \approx 5{,}1$

$\Downarrow$

$a_1 = -1 \qquad a_1 = 11$

2) $d = 1 \Rightarrow 5(2a_1+9d) = 10a_1 + 45 = S$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$

$(a_1+3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3$

$D' = 9+2 = 11 \Rightarrow a_1 = -3 \pm \sqrt{11}$

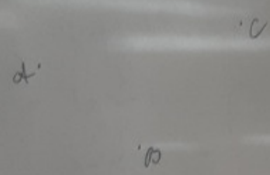
$\sqrt{11} \approx 3{,}3$

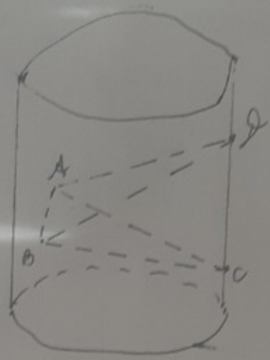
$a_1 \in (-3-\sqrt{11};\ -3+\sqrt{11}) \Rightarrow \cancel{a_1 = 0,\ a_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6}\ a_1 \in [-6;\ 0];\ a_1 \in \mathbb{Z}$

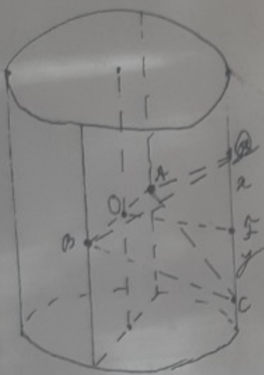
Чистовик

2. Черновик

N1 – 5
N2 – 5
N3 – 7







$AO = OB = OF = 1$

$AD = BD = 6;\ AC = BC = 5$

$OF \perp AB;\ OF \perp DC$

$BF = AF = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} DC \perp OF \\ DC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow DC \perp (AFB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DC \perp BF$$
$$DC \perp AF$$

$x^2 + 2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{34}$

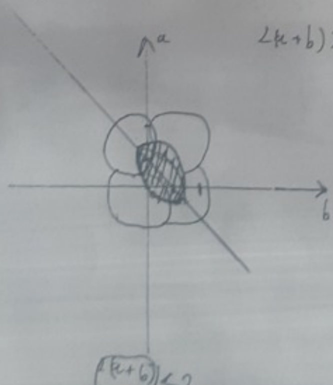
$y^2 + 2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{23}$

$DC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

3. $2(a+b) = 2$

$a + b = 1$

$a = 1 - b$



$2(a+b) > 2$

$2(a+b) < 2$

$a^2 + b^2 \leq 2$

$a^2 + b^2 \leq 2(a+b)$

$a^2 - 2a + b^2 - 2b \leq 0$

$(a^2 - 1)^2 + (b-1)^2 \leq 2$

$b^2 + b^2 - 2b + 1 \leq 2$

$2b^2 - 2b = 1$

$2b^2 - 2b - 1 = 0$

$D = 1 + 2 = 3$

$b = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103508**

ID профиля: **343921**

Вариант 17

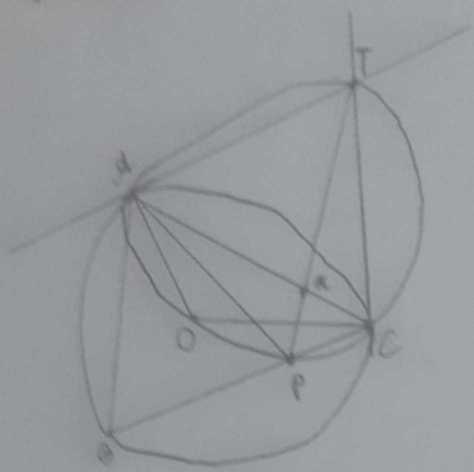
Чистовик

4. 1) Т.к. НОК состоит только из 2-ек и 3-ек, то и сами числа состоят делятся только на двойки и тройки

2) Т.к. НОД = 6 => все числа делятся на 2 и на 3

3) Все 3 числа не могут быть одинаковыми, т.к. их НОД был бы равен НОК

Чистовик



1) $\angle ATC = 360° - \angle TAO - \angle TCO - \angle AOC =$

$= 180° - \angle AOC \Rightarrow$

$\Rightarrow A, T, C, O$ — лежат на одной окр-ти

2) A, C, O, P лежат на одной окр-ти $\Rightarrow A, O, P, C, T$ лежат на одной окр-ти

3) $\angle AOC = \angle APC$ (т.к. они опир. на одну дугу)

4) $\angle TAP + \angle TCP = \angle TAO + \angle TCO$ (следует из пункта 3)

$\angle TAP + \angle TCO + \angle OCP = \angle TAP + \angle AOP + \angle TCO$

$\angle OCP = \angle AOP$

5) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$, т.к. он центральный и опирается на туже дугу, тогда $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APB = 180° - \angle APC = 180° - 2\alpha$

6) $\angle BAP = 180° - \angle ABP - \angle APB = 180° - \alpha - 180° - 2\alpha = \alpha$

7) $\angle ABP = \angle BAP \Rightarrow AP = BP$

8) $AT = TC$ (т.к. это кас. к окр-ти из одной точки)

9) AT и TC стягивают одинаковые дуги окр-ти $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT = \angle TPC \Rightarrow PK$ – биссектр. $\Rightarrow \dfrac{PC}{AP} = \dfrac{KC}{AK}$

10) $\dfrac{S_{AKP}}{S_{PKC}} = \dfrac{AK \cdot KP \cdot \sin\angle AKP}{KC \cdot PK \cdot \sin(180 - \angle AKP)} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{BP}{CP} \Rightarrow$

$\boxed{\begin{array}{l} AC = x \Rightarrow \\ KC = \frac{2x}{5} \\ BC = y \Rightarrow \\ CP = \frac{2y}{5} \end{array}}$

11) $S_{ABC} = S_{CKP} \cdot \dfrac{AC \cdot BC}{KC \cdot CP} = 4 \cdot \dfrac{x \cdot y}{\frac{2x}{5} \cdot \frac{2y}{5}} = 4 \cdot \dfrac{25}{4} = 25$

2

Ответ: $S_{ABC} = 25$

21103508 (U343921 M1302407)

черновик

$\frac{\log_a b}{2}$; $2\log_b c$; $\log_c a$

$1\begin{cases} 2\log_b c = \log_b a \\ \frac{\log_a b}{2} = \log_c a + 1 \end{cases}$

$xy = 1$

$x = \frac{1}{y}$

$\frac{x}{y} = \frac{1}{y^2}$

$2\log_b c = \frac{\log_b a}{\log_b c} \Rightarrow \frac{2\log_b^2 c - \log_b a}{\log_b c} = 0 \Rightarrow 2\log_b^2 c = \log_b a$

$2\log_b^2 c = \frac{\log_c a}{\log_c b} \Rightarrow \frac{2\log_b^2 c \cdot \log_c b - \log_c a}{\log_c b} = \frac{2\log_b c - \log_c a}{\log_c b} = \frac{2\log_b c}{\log_c b} - \log_b a$

НОД$(12; 6; 9) = 1$

НОК$(12; 8; 9) = 72$

12 | 2
6 | 2
3 | 3
1

8 | 2
4 | 2
2 | 2
1

9 | 3
3 | 3
1

2 2 2
3 3 3
3 3 2
2 3 2
2 2 3
2 3 3

2 2 2
3 3 3
3 3 2

2 — 2 2

НОД$(a; b) = 6$

НОК$(a; b) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$a = 6 \cdot 3^n$

$b = 6 \cdot 2^m$

НОК = [illegible]

= [illegible] $a \cdot 2^m = 6 \cdot 3^n \cdot 2^m =$

$= 3^{n+1} \cdot 2^{m+1} = 2^{15} \cdot 3^{16}$

a 2 3 b 2 3

1 2
3 2
3 2
1 2
3 2
  2

$m + 1 = 15$

$m = 14$

$n + 1 = 16$

$n = 15$

$a = 6 \cdot 3^{15} = 2 \cdot 3^{16}$

$b = 6 \cdot 2^{14} = 3 \cdot 2^{15}$

$(2 \cdot 3^{16}; 3 \cdot 2^{15}; 2 \cdot 3^{16})$; $(2 \cdot 3^{16}; 2 \cdot 3^{16}; 3 \cdot 2^{15})$

$(2 \cdot 3^{16}; 3 \cdot 2^{15}; 3 \cdot 2^{15})$; $(3 \cdot 2^{15}; 3 \cdot 2^{15}; 2 \cdot 3^{16})$

2 2 2
3 3 3
2 2 3
3 3 3
2 2 3
3 3 3

$a = 6 \cdot 3^{m} \cdot 2^{n}$

$b = 6 \cdot 3^{p} \cdot 2^{q}$

$c = 6 \cdot 3^{p} \cdot 2^{q}$

6 6 6
2 3
2 3
2 3
2 3
2 3

черновик

НОД $(a, b, c) = 6 \Rightarrow$ $a \vdots 6$ $b \vdots 6$ $c \vdots 6$

НОК $(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$ $\Rightarrow 2^{15} \cdot 3^{16} = 6^{15} \cdot 3 \vdots a, b, c$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ $\quad 5x-1>0 \quad 5x-1 \neq 1 \quad 4x+1>0 \quad 4x+1 \neq 1$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $\quad x > \frac{1}{5} \quad x \neq \frac{2}{5} \quad x > -\frac{1}{4} \quad x \neq 0$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$ $\quad \frac{x}{2}+2>0 \Rightarrow x>-4 \quad \frac{x}{2}+2 \neq 1 ; x \neq -2$

$x \in \left(\frac{1}{5} ; \frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5} ; +\infty\right)$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \Rightarrow \log_{5x-1}(4x+1) = 4\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{5x-1} \frac{\cancel{(4x+1)}}{2} = 2l$

~~$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)+1 =$~~

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}\left((5x-1)\left(\frac{x}{2}+2\right)\right)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}\left((5x-1)\left(\frac{x}{2}+2\right)\right)$

$\log_{5x-1}(4x+1) = \frac{4}{\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)}$ $\quad \log_{5x-1}(4x+1)$

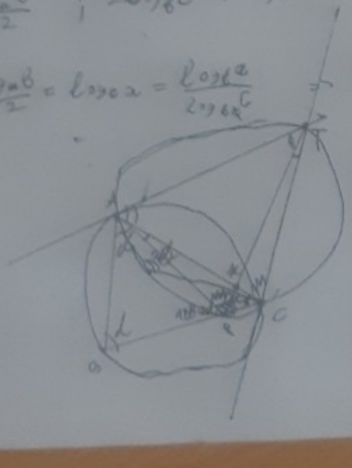
$a = 5x-1 ; c = \frac{x}{2}+2 ; b = 4x+1$

$\log_{\sqrt{a}} b ; \log_b c^2 ; \log_c a$

$\frac{\log_a b}{2} ; 2\log_b c ; \log_c a$

$\frac{\log_a b}{2} = \log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$ $\Rightarrow \frac{\log_a b}{2} - \frac{\log_b a}{\log_b c} = 0 \Rightarrow \frac{\log_a c - 2\log_b a}{2\log_b c} = 0$

6.



$\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$

$\angle ATC = 180° - \angle AOC$

$\angle AOC = \angle APC \Rightarrow$

$\angle ATC + \angle APC = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow A, T, C, P$ - лежат на 1 окр

$\triangle AKT \sim \triangle KPC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AK}{KP} = \frac{KT}{KC}$