Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103488**

ID профиля: **847558**

Вариант 17

Вариант 17

Чистовик

Стр. 1

№1

Пусть разность этой прогрессии — p, тогда т.к. прогрессия содержит только целые числа, $a_1 \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$, а т.к. прогрессия возрастающая, $p > 0$.

$$S = \frac{(2a_1 + 9p)\cdot 10}{2} = 10a_1 + 45p$$

Из условия:

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5p)(a_1 + 11p) > 10a_1 + 45p + 1 \\ 10a_1 + 45p + 17 > (a_1 + 6p)(a_1 + 10p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1^2 + 16p\cdot a_1 + 55p^2) > 10a_1 + 45p + 1 \\ 10a_1 + 45p + 17 - 5p^2 > (a_1^2 + 16p\cdot a_1 + 55p^2) \end{cases} \quad +$$

$$\cancel{10a_1} + \cancel{45p} + 17 - 5p^2 > \cancel{10a_1} + \cancel{45p} + 1$$

$$16 > 5p^2$$

$$\underset{4}{\underset{\wedge}{\frac{16}{5}}} > p^2$$

Заметим, что т.к. $p > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, то единственное p, удовлетворяющее данному нер-ву: $p = 1$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1 \\ 10a_1 + 45 + 17 - 5 > a_1^2 + 16a_1 + 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ (a_1 + 3 + \sqrt{11})(a_1 + 3 - \sqrt{11}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases}$$

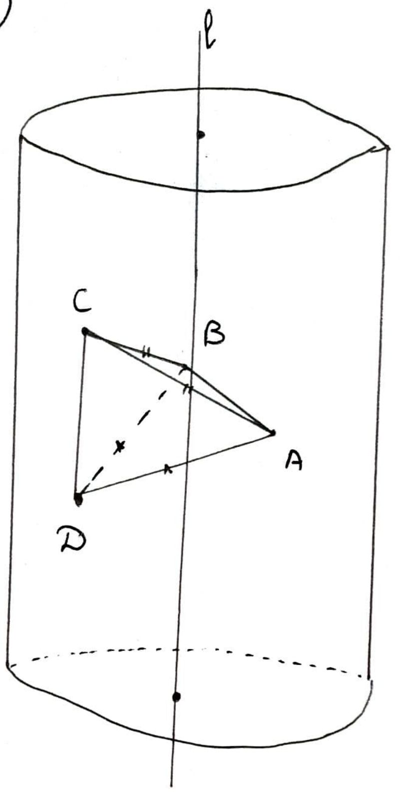
$+ \quad - \quad +$

$-3-\sqrt{11}$

Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то

Ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

№2



Дано:

ABCD — тетраэдр.

$AB = 2$

$AC = CB = 5$

$AD = DB = 6$

Вершины тетраэдра лежат на боковой поверхности цилиндра.

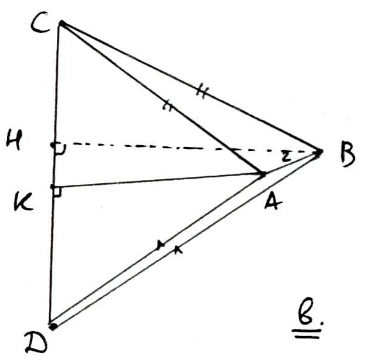
$CD \parallel$ оси цилиндра

$r_{цил} \to \min$

Найти: CD.

Решение: 0) Пусть ось цилиндра — прямая l

1) Рассмотрим ABCD:



а. Заметим, что $\triangle CAD = \triangle CBD$ по 3 сторонам.

б. Проведем высоты в этих треугольниках (AK и BH), тогда из а. $AK = BH$

в. По т. Пифагора

$$\underset{\triangle CBH}{CH} = \sqrt{CB^2 - BH^2} \underset{\text{из б.}}{=} \sqrt{CA^2 - AK^2} = CK \Rightarrow$$

$\Rightarrow CK = CH \Rightarrow H \equiv K$.

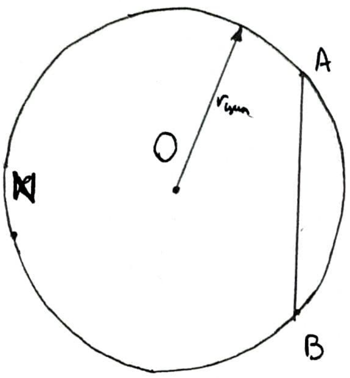
г. из в. $\Rightarrow$ что $CD \perp (HAB)$ по признаку, поэтому $CD \perp AB$.

2) т.к. $\left.\begin{array}{l} CD \perp AB \\ CD \parallel l \end{array}\right\} \Rightarrow l \perp AB$

3) Рассмотрим плоскость α, такую, что $AB \subset \alpha$; $l \perp \alpha$:

№2 Продолжение:

Плоскость α:



а. Заметим, что пересечение α с боковой поверхностью конуса - окружность с центром в точке пер-ния l и α (назовём эту точку O). и радиусом $r_{цил.}$

б. Пусть $CD \cap \alpha = N$

в. радиус цилиндра минимален тогда и только тогда, когда AB - диаметр этой окружности, то есть $\min(r_{цил}) = \frac{AB}{2} = 1$.

г. $N = Пр_{\alpha}^{\perp} C$, поэтому т.к. $CA = CB$, получим что $NA = NB$.

д. из в. г. $\Rightarrow$ что $NA = NB = \sqrt{2}$

е. из д. по т Пифагора:

$$\left.\begin{aligned} CN &= \sqrt{CA^2 - NA^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23} \\ DN &= \sqrt{DA^2 - NA^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34} \end{aligned}\right\} \Rightarrow DC = \sqrt{23} + \sqrt{34}$$

Ответ: $CD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$.

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;\ 2) & (2)\end{cases}$$

Рассмотрим (2):

$$a^2+b^2\le \min(2a+2b;\ 2)$$

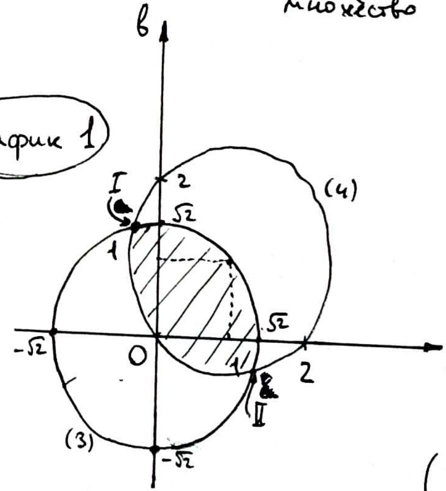
$$\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a^2+b^2\le 2a+2b\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ (a^2-2a+1)-1+(b^2-2b+1)-1\le 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 2 & (3)\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2 & (4)\end{cases}$$

Изобразим множество решений этой системы на Oab:

График 1



[штриховка] – множество решений ~~системы~~ нер-ва (2)

~~Точки a, b имеют координаты~~

Точки I и II имеют координаты $\left(\frac{1-\sqrt3}{2};\ \frac{1+\sqrt3}{2}\right)$ и $\left(\frac{1+\sqrt3}{2};\ \frac{1-\sqrt3}{2}\right)$ соответственно

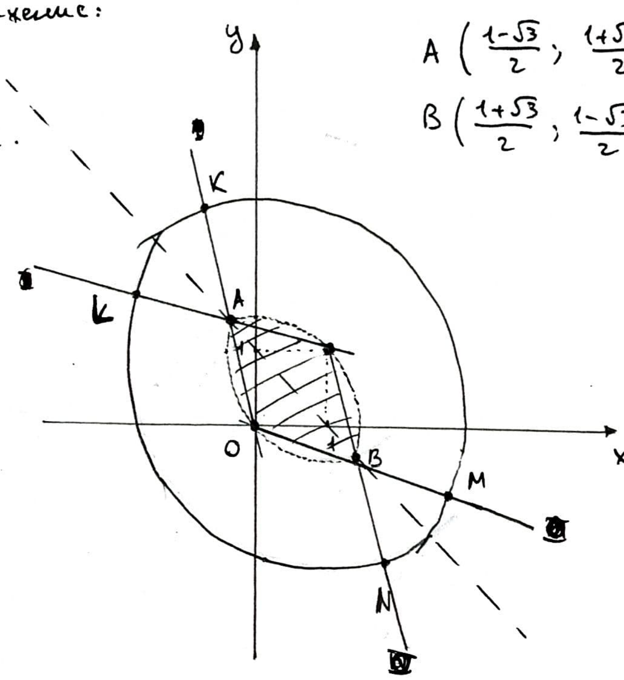
Рассмотрим (1):

Графики этого неравенства – круг с центров в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt2$.

Заметим, что область, где может находиться центр этого круга – [штриховка] область графика 1.

№3 Продолжение:

График 2.



$A\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

Заметим, что точки границы множества M лежат на окружностях, центры которых лежат на границе ▨ области

(Здесь область ▨ – множество точек, в которых находятся центры окружностей вида (1))

Построим окружности с центрами в (0;0) (1;1) и радиусами $2\sqrt{2}$; с центрами A, B, радиусами $\sqrt{2}$.

~~Пересечём их с прямыми I, II, III, IV~~
~~Точки пер-ния: K, L, M, N.~~

Отметим точки пер-ния меньших окружностей с большими как K, L, M, N (см график 2)

Граница M:

$\smile KL$ окр $(A; \sqrt{2})$

$\smile LN$ окр $((1;1); 2\sqrt{2})$

$\smile NM$ окр $(B; \sqrt{2})$

$\smile KM$ окр $((0;0); 2\sqrt{2})$

Черновик

№1

Пусть ~~a_1 — первый~~ p — разность прогрессии, тогда:

$p \in \mathbb{Z}$.

$$S = \frac{(2a_1 + 9p)10}{2} = (2a_1 + 9p) \cdot 5$$

$$\begin{cases} (a_1+5p)(a_1+11p) > (2a_1+9p)5+1 \\ (a_1+6p)(a_1+10p) < (2a_1+9p)5+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16p \cdot a_1 + 55p^2 > 10a_1+45p+1 \\ a^2 + 16p \cdot a_1 + 60p^2 < 10a_1+45p+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16p \cdot a_1 + 55p^2 > 10a_1+45p+1 \\ 10a_1 + 45p + 17 - 5p^2 > a_1^2 + 16 \cdot p \cdot a_1 + 55p^2 \end{cases} \begin{vmatrix} + \\ + \end{vmatrix}$$

$$10a_1 + 45p + 17 - 5p^2 > 10a_1 + 45p + 1$$

$$16 > 5p^2$$

$$\frac{16}{5} > p^2$$

, поэтому $p = 1$

прогрессия возрастающая, $p \in \mathbb{Z}$

Вернёмся к системе:

$$-3 \pm \sqrt{9+2} = -3 \pm \sqrt{11}$$

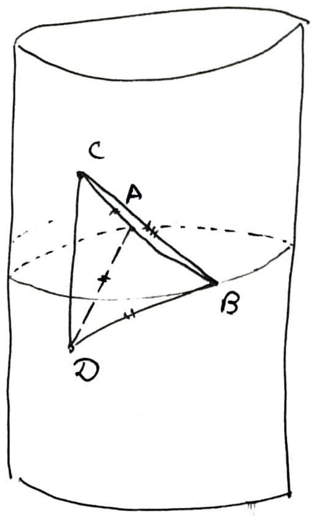
$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 55 > 10a + 45 + 1 \\ 10a_1 + 45 + 17 - 5 > a_1^2 + \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 55 \\ -45 \\ \hline 10 \\ -17 \\ \hline -7 \\ +5 \\ \hline -2 \end{array}$$

$-6 \quad -5 \quad -4$

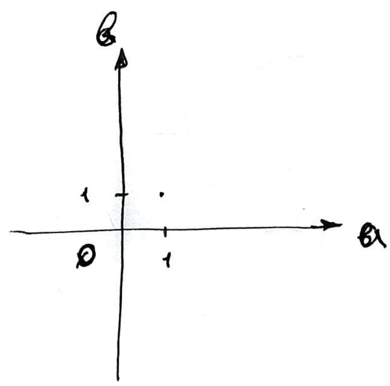
$-2 \quad -1 \quad 0$

Черновик.



№3

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le +2a+2b \end{cases}$$



$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \end{cases}$$

$$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2$$

$$\begin{cases} -2a+1-2b+1=0 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$$

$$a=\frac{2-2b}{2}=1-b$$

$$(1-b)^2+b^2=2$$

$$2b^2-2b+1=2$$

$$\cancel{2b^2\ 2}$$

$$2b^2-2b-1=0$$

$$b=\frac{1\pm\sqrt{1+2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$a=\cancel{\ }\ \frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103488**

ID профиля: **847558**

Вариант 17

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 6 & (1) \\ \text{НОК}(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16} & (2) \end{cases}$$

1) Заметим, что из ур-ние (2) ⇒ что числа a, b, c имеют вид $2^{\alpha_n} 3^{\beta_n}$, где $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n \in [0; 15]$

$\beta_n \in \mathbb{Z}$, $\beta_n \in [0; 16]$,

2) Из ур-ния (1) и пункта 1) ⇒ что

$\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Z}$

$\alpha_n \in [1; 15]$ причём одно из α_n и одно

$\beta_n \in [1; 16]$, из β_n должно быть равно 1.
(иначе НОД был бы больше 6)

3) Пусть ~~числа имеют вид~~:

$a = 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a}$

$b = 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_a}$ (без можно так сказать ограничения общности, т.к. см. пункт 1)).

$c = 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\alpha_c}$

4) ~~Из ур-ния~~

из ур-ния (2) и пункта 1) ⇒

⇒ что одно из чисел $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)$ равно 15,

одно из $(\beta_a, \beta_b, \beta_c)$ равно 16 (иначе НОК был бы меньше).

5) из пунктов 2), 4) можно утверждать, что количество упорядоченных троек $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)$ равно $3! \cdot 15$ (15 - кол-во неупорядоченных, т.к. два числа из тройки фиксированы: 1 и 15)

кол-во упорядоченных троек $(\beta_a, \beta_b, \beta_c)$ равно $3! \cdot 16$ (т.к. два из них фиксированы: 1 и 16).

~~β~~

№4 Продолжение:

6) Вернёмся к (a, b, c):
количество упорядоченных троек (a, b, c) равно произведению количеств троек $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)$ и $(\beta_a, \beta_b, \beta_c)$:

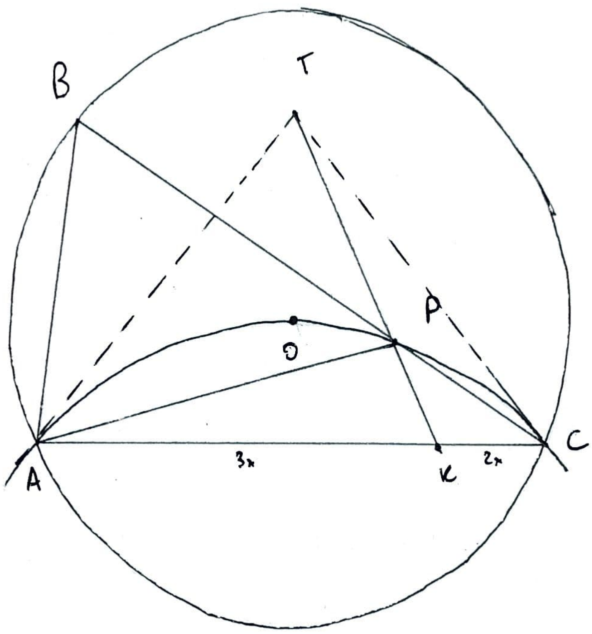
$$(3! \cdot 15) \cdot (3! \cdot 16) = 36 \cdot 15 \cdot 16 = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 = 34560$$

Ответ: 34560 ₽.

Чистовик

№6

а)



$S(APK) = 6$

$S(CPK) = 4$

1) Заметим, что $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту, (из P)

поэтому

$$\frac{S(APK)}{S(CPK)} = \frac{AK}{CK}$$

$$\frac{AK}{CK} = \frac{3}{2}$$

Черновик

① $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$x \neq \frac{2}{5}$ $\quad$ $x > -\frac{1}{4}$

② $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$x \neq 0$ $\quad$ $x > -4$

③ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$x \neq -2$ $\quad$ $x > \frac{1}{5}$

При $x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$

① < 0

② $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 - (4x+1) \vee 0$

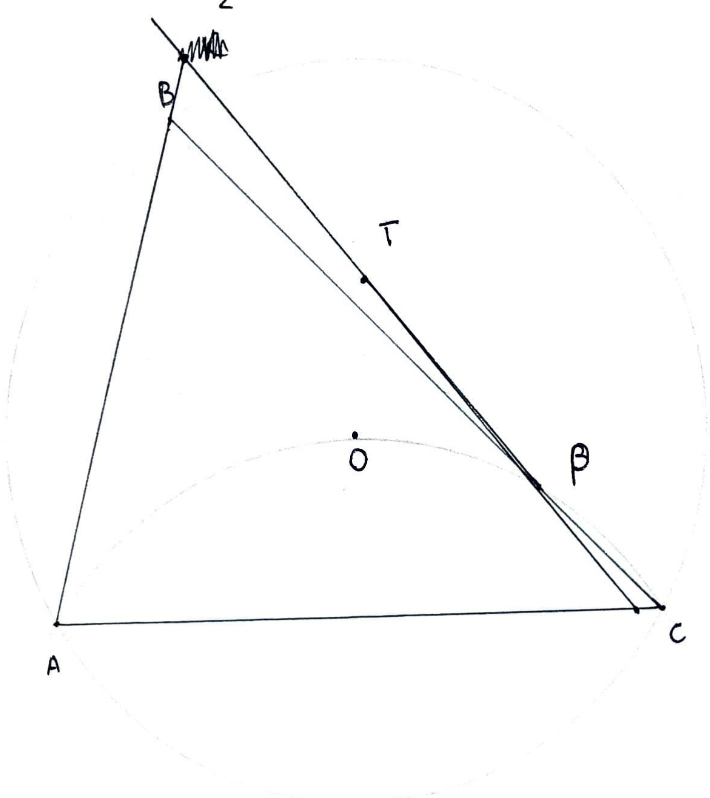
$\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2x + 4\right) - (4x+1) \vee 0$

$\left(\left(\frac{x}{2}\right) - 2x + 4\right) \vee 1$

$\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 \leq 1$

③ $5x - 1 - \left(\frac{x}{2} + 2\right) \vee 0$

$\frac{9x}{2} \leq 3$



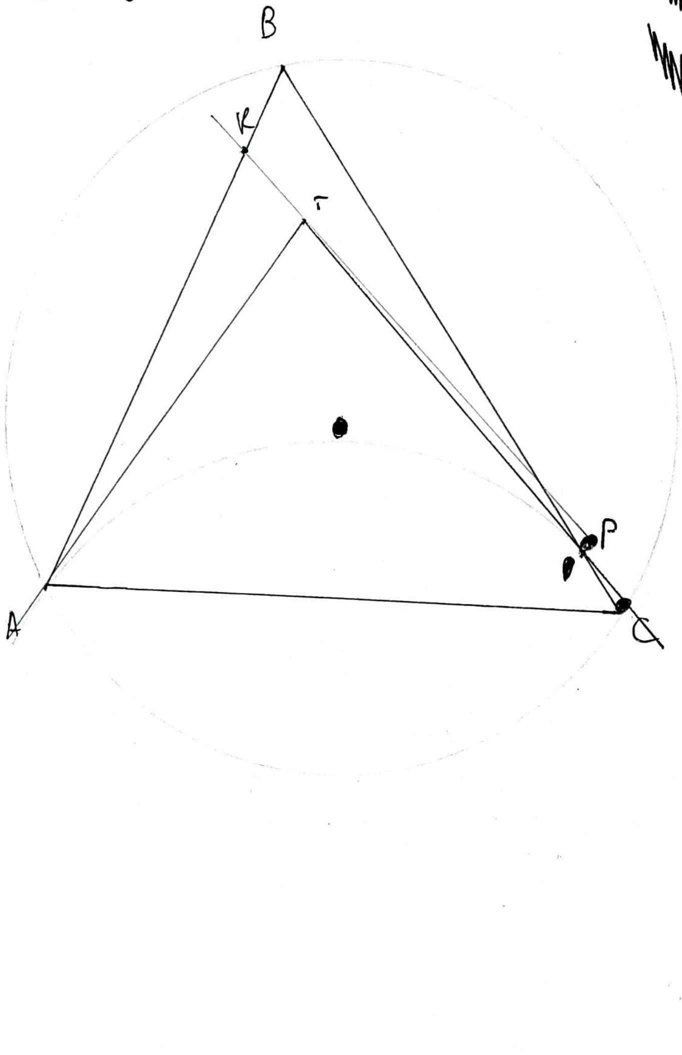
$\boxed{\text{Черновик}}$

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 6 & (1) \\ \text{НОК}(a,b,c) = 2^{15}\cdot 3^{16} & (2) \end{cases}$$

$2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^4 = 2^8\cdot 3^3\cdot 5 =$

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 5 \\ \times\ 128 \\ 27 \\ \hline 896 \\ 256 \\ \hline 3456 \end{array}$$



Черновик