# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103466**

ID профиля: **813835**

Вариант 17

Чистовик.

① Условие: $S$ - сумма 10 членов арифм. прогр.

$a_6 a_{12} > S+1$ ; $a_7 a_{11} < S+17$.

$a_1$ - ? (все знач.).

Решение:

$$S = a_1 + \ldots + a_{10} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d =$$

$$= 10a_1 + \frac{10\cdot 9}{2}d = 10a_1 + 45d. \quad (1)$$

$$a_n = a_1 + n(n-1)d.$$

Тогда мы имеем:

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > S+1 = 10a_1 + 45d + 1. \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17 = 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

Затем мы можем раскрыть скобки и привести подобные в ур. этой системы

! Важно учесть, что эти уравнения мы должны рассматривать как квадратные трехчлены относительно $a_1$:

$$\begin{cases} a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 55d^2 > 45d+1 \quad (2) \\ a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 60d^2 < 45d+17 \quad (3) \end{cases}$$

$$-a_1^2 - 2a_1(8d-5) - 55d^2 < -45d - 1.$$

Сложим с (3), получаем: $5d^2 < 16$

$$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$$

21103466 (U813835 M1297787)

② 

Чистовик

Т.к у нас по услов все $a_n$ являются целыми $\Rightarrow$ $d$ - целое.

А мы видим, что прогрессия возрастающ $\Rightarrow$ $\Rightarrow d > 0$. Тогда получаем, что $d = 1$.

Тогда у нас в уравн (2); (3):

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (a_1+3)^2 > 0 \quad (*) \\ a_1 \in (-3-\sqrt{11}; \sqrt{11}-3) \quad (**) \end{matrix}$$

Из (**) следует, что целые значения

$a_1 = -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0$

Но из (*) следует, что $a_1 \neq -3$

$\Rightarrow a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0.$

Ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0.$

21103466 (U813835 M1297787)

③

Чистовик

Условие: $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)\end{cases}$

$S$ фигуры $M$ – ?

Решение: Обозначу первое ур-ние системы за (1); второе – (2).

Тогда из (2) имеем:

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 2 & (3) \\ a^2+b^2 \le 2a+2b & (4).\end{cases}$$

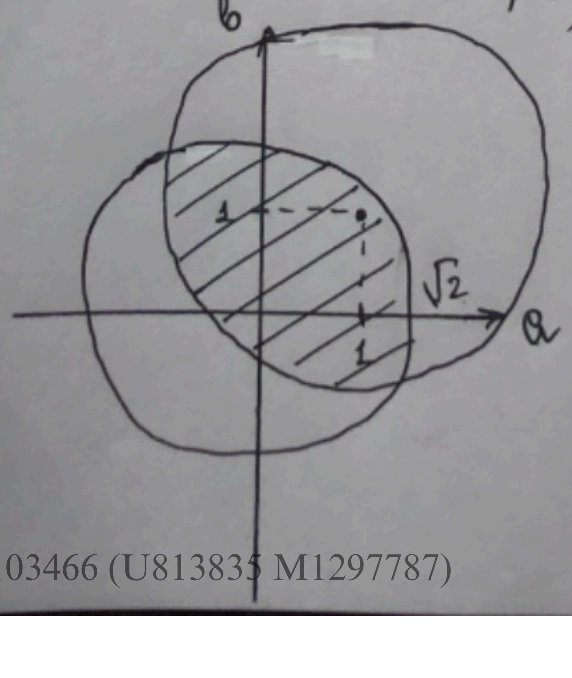
Затем получаем:

$a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ На пл-ти у нас должен быть изображен круг с центром $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

Из (3): $a^2+b^2 \le 2 \Rightarrow$ на пл-ти круг с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$




(Закраш $\equiv$ область – – $S$ фигуры).

④

# Пояснение

Мы имеем, что у нас на пл-ти $Oxy$ множество, заданное (1):

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2$ - это круг, с центром в $(a;b)$ $\Rightarrow$

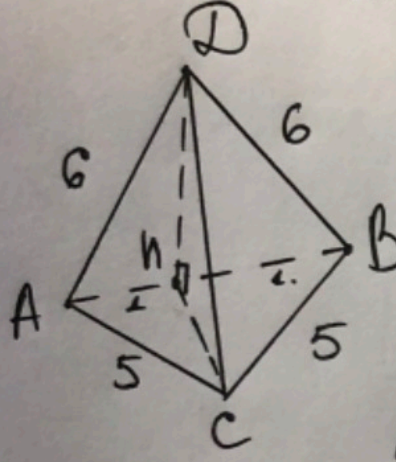
$\Rightarrow$ $M$ - это целое множество объединений таких кругов, в которых центр $(a;b)$ лежит в зоне пересечения, отмеченной пунктиром.

5

# Чистовик.

**Условие:** $ABCD$ – тетраэдр; $AB = 2$;
$AC = CB = 5$; $AD = DB = 6$;
$CD \parallel$ оси цилиндра.
$CD$ при $r_{min}$ – ?

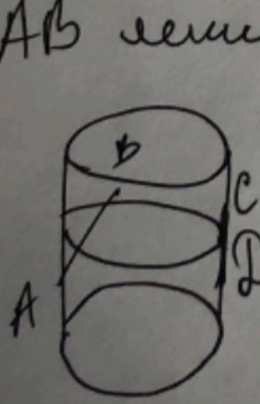
**Решение:**




1) У нас в р/б $\triangle ADB$:
$DH$ явл медианой.
Аналогично, в равноб $\triangle ABC$
$CH$ – явл. медианой.
Следовательно имеем, что
$AH = HB = \frac{1}{2} AB = 1$.

Можно заметить, что $AB$ явл $\perp$ к
пл-ти $(DHC)$. Т.к $HC \perp AB$; $AB \perp DH$.

2) Далее, т.к точки $C, D$ у нас лежат на
боковой пов-ти цилиндра и $CD \parallel$ оси цил. (по усл)
$\Longrightarrow$ $CD$ – лежит на образующей относ. пов-ти.
Т.к $AB \perp CDH$, то $AB \perp CD$, т.е
$AB$ лежит в пл-ти, перпенд. оси цилиндра.




Если мы проведем сечение цилиндр.
то увидим, что это круг, явл парал.
основанию цилиндра.

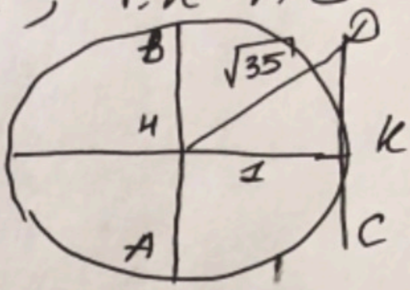
(6)

Чистовик

AB явл. хордой в данном круге.

Т.к. $AB = 2$; то $r_{основ} \geq \frac{AB}{2}$; т.к. AB — хорда с меньшим $d$.

=> Наименьший $r = 1$.




Далее

3) CD у нас либо пересекает пл-ть S в точке K, либо нет => C ближе к D.

2 случай) D не может быть ближе к S, т.к. $AD > AC$.

Тогда в 1 случае: (когда CD пересек с $\alpha$):

В прямоуг $\triangle ADH$: $DH = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$

У нас $HK = 1 = r$ (т.к. $DC \perp \alpha \Rightarrow DC \perp HK$).

=> из прямоуг $\triangle DHK$: $DK = \sqrt{\sqrt{35}^2 - 1} = \sqrt{34}$

Аналогично, $KC = 5 \Rightarrow CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$,

где $KC = \sqrt{34^2 - 1} = \sqrt{23}$

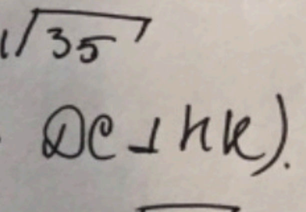
Во 2-ом случае: DC не пересекает S, => C ближе к S.

Пусть K — т. перес. DC с пл-тью S.

=> $\triangle HCK_2$: $CK_2 = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

=> $\triangle HCK_2$

$DK_2 = \sqrt{35-1} = \sqrt{34} \Rightarrow DC = \sqrt{34} - \sqrt{23}$




Ответ: $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$ или $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

①

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2).\end{cases}$$

$(x;y)$ S – ?

$(x-a)(x-a)+(y-b)(y-b)\le 2.$

$x^2-xa-xa+a^2+y^2-2yb+b^2\le 2.$

$x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2\le 2.$

$a^2+b^2\le 2+2xa+2yb-x^2-y^2.$

$a^2+b^2\le 2(1+xa+yb)-x^2-y^2.$

$\min(2a+2b,2)=2(1+xa+yb)-x^2-y^2$

---

$x^2-2xa+y^2-2yb+a^2+b^2\le 2.$

$x^2-2xa+y^2-2yb+\min(2a+2b,2)\le 2.$

---

$$\begin{cases}x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2).\end{cases}$$

$a^2\le 2+2xa+2yb-x^2-y^2-b^2.$

$2+2xa+2yb-x^2-y^2\cancel{-b^2+b^2}\le \min(2a+2b,2).$

$2(1+xa+yb)-(x^2+y^2)\le \min(2a+2b,2)$

21103466 (U813835 M1297787)

② Черновик

ABCD – тетраэдр $AB=2$; $AC=CB=5$;
✓ $AD=DB=6$.

CD ‖ оси цил. Для r – min → CD – ?

---

$a_1$; $a_2$, $a_3$... $a_6 a_{12} > S+1$,

Все знач $a_1$ – ? $a_7 a_{11} < S+17$.

---

✓ Тетраэдр впис в цил. так, что все вершины оказываются на бок повти; CD ‖ оси у.

---

Фигура M, состоящ. из всех т. (x, y) таких, что сущ. пара вещ. чис систем

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2).\end{cases}$$ S(M) – ?

---

Арифм. прогресс, ц. числа.

10 членов арифм. прогрессии, целые числа,

Условие: $a_6 a_{12} > S+1$.

$a_7 a_{11} < S+17$.

21103466 (U813835 M1297787)

③

Черновик.

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d.$$

$$S = 10a_1 + \frac{10(\cdot 9)}{2} d. = 10a_1 + 45d.$$

$$\boxed{S = 10a_1 + 45d}$$

$a_6 \cdot a_{12} - ?$ $\qquad d = \dfrac{2\frac{S_n}{2} - 2a_1}{n-1}.$

$$a_6 - a_1 = d(6-1) = 5d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_6 = a_1 + 5d.$$

$$\Rightarrow a_{12} = a_1 + 11d.$$

$$\Rightarrow a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) =$$

$$= a_1^2 + 5da_1 + 11da_1 + 55d^2 =$$

$$= a_1^2 + 16da_1 + 55d^2$$

$$a_7 \cdot a_{11} = (a_6 + d)(a_{12} - d) = a_6 a_{12} - d(a_{12} - a_6) + d^2$$

Поправка: $(a_{12} - a_6) = 6d.$

$$a_7 \cdot a_{11} = a_6 a_{12} + 6d^2 + d^2 = a_6 a_{12} + 7d^2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_6 \cdot a_{12} = a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 & > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} = a_6 a_{12} + 7d^2 & < S+17. \end{cases}$$

(4)

Черновик.

Разделим второе ур. на части:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2(a+b). \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 0$

$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \le 0.$

$\Rightarrow$ Круг $(1;1)$ $R=\sqrt{2}$

Из $a^2+b^2 \le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Круг $(0;0)$ $R=\sqrt{2}$

Рис

(5) Черновик

$S+1 < a_6 + a_{12} + 7d^2 < S+17.$

$10a_1 + 45d < a_6 + a_{12} + 7d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103466**

ID профиля: **813835**

Вариант 17

① Чистовик.

Условие: $НОД(a;b;c) = 6$

$НОК(a;b;c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$.

Найти: кол-во троек нат. чисел $(a;b;c)$

Решение: 1) По условию имеем, что:

$a = 2^{k_1} \cdot 3^{m_1}$; $b = 2^{k_2} \cdot 3^{m_2}$;

$c = 2^{k_3} \cdot 3^{m_3}$ соответсвенно.

Важно заметить! Должна быть хотя бы одна $k_i = 1$ и хотя бы одна $m_i = 1$, а иначе у нас бы $НОД(a;b;c) \neq 6$

А также нам необходимо учесть, что хотя бы одна $k_i = 15$ и хотя бы одна $m_i = 16$., а иначе у нас бы $НОК(a;b;c) \neq 2^{15} \cdot 3^{16}$.

2) Теперь выбираем одно из $k_1; k_2; k_3$.

Необходимо выбрать такое, что $k_i = 1$ (есть 3 способа)

Из оставшихся возьмем одно $k_i = 15$ (есть 2 способа)

А оставшееся число $k_p$ может принимать любые значения от 1 до 15.

Итого получаем: $3 \cdot 2 \cdot 15 = 90$ способов.

21103466 (U813835 M1297788)

②

Чистовик

3) Теперь аналогично выбираем $\underbrace{m_i = 1}_{3 спос}$; $\underbrace{m_i = 16}_{2 спос.}$;
$m_p$ принимает от 1 до 16.
Итого: $3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$ способов.

4) Затем каждый способ по выбору $m$ умножаем на каждый способ выбрать $k$. Итого: $96 \cdot 90$.

! Но нам важно учесть, что возможны пересечения, т.е тройки чисел $(a; b; c)$, которые учтены более 1 раза.

5) Тройки чисел, в которые 2 числа $k$ равны 1 и 15; третье – $k$ от 2 до 14 $k \in [2; 14]$ (13 чисел), но тогда все три числа $m$ равны либо 1, либо 16, в начале учтены 2 раза.
Выбрать такую тройку можно: $(\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 13}_{выбор\ k}) \cdot (\underbrace{3 \cdot 2}_{выбор\ m})$.

6) Тройки чисел $(a; b; c)$ в которых два числа равны 1 и 16; а третье – $m$ от 2 до 15 (14 чис.) $m \in [2; 15]$,
То все три числа $k$ равны либо 1, либо 15, и учтены по 2 раза.
Их можно выбрать: $(\underbrace{3 \cdot 2}_{выбор\ k}) \cdot (\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 14}_{выбор\ m})$.

③

Чистовик

7) Тройки чисел, в которых все $k$ равны 1 или 15 (когда две 1 и одна 15; когда две 15 и одна 1) и все $m$ равны 1 или 16 (когда две 1 и одна 16; когда две 16 и одна 1)., нам можно выбрать $(3\cdot2)\cdot(3\cdot2)$ способами.
Каждую такую тройку нужно учесть 4р.

7) Итого, кол-во троек $(a;b;c)$ равно

$$90\cdot96-(3\cdot2\cdot13)(3\cdot2)-(3\cdot2)(3\cdot2\cdot14)-$$

$$-3(3\cdot2)(3\cdot2)=$$

$$=6640-468-504-108=$$

$$=8640-576-504=7560.$$

Ответ: 7560

21103466 (U813835 M1297788)

(4)

Чистовик

Условие: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$;

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$.

Найти: при каких $x$ два числа равны, а третье меньше на 1?

Решение: 1) Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x-1>0 \\ 4x-1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} x>\frac{1}{5} \\ x\neq \frac{2}{5}. \end{array}$$

2) Обозначим $t=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2\log_a b$;

$d=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2\log_b c$;

$f=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_c a$;

где $a=5x-1$; $b=4x+1$; $c=\frac{x}{2}+2$.

Заметим, что:

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\log_a c\cdot\log_c a=1.$

$\Longrightarrow t\cdot d\cdot f=2^2=4.$

3) Если $t=d$, тогда $f=t-1$, тогда из $t\cdot d\cdot f=4$ имеем следующ:

⑥ Чистовик

$\Rightarrow 5x-1=\frac{x^2}{4}+2x+4$

$\frac{x^2}{4}-3x+5=0 \quad |\cdot 4$

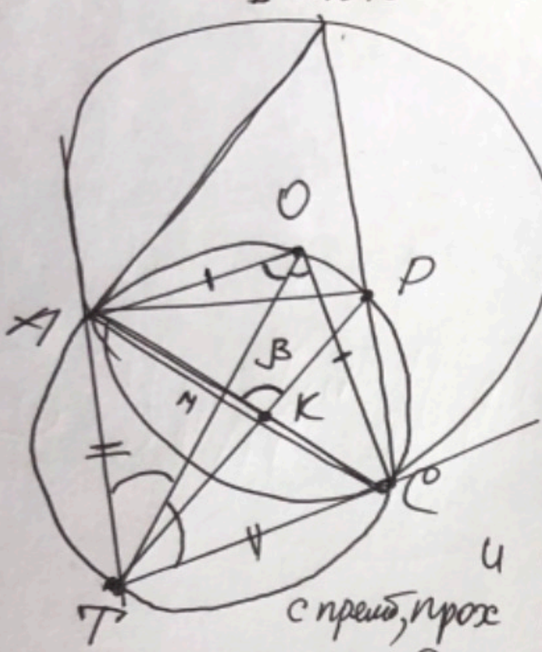
$x^2-12x+20=0 \quad |$ по Т. Виета:

$x_1=2$; $x_2=10$; по ОДЗ - подходят.

Ответ: $x=2$; $x=10$; $x=\frac{2}{7}$

⑦

Чистовик



Условие:

$S_{\triangle APK} = 6$; $S_{\triangle CPK} = 4$

$S_{\triangle ABC}$ - ? AC - ?

Решение: касательные к окружности, проведенные из одной точки равны и составляют равные углы с прям, прох через эту точку и ц. окруж.

$\angle ATO = \alpha = \angle OTC$; $AT \perp OA$; $OC \perp TC$.

В $\triangle AOT$: $\angle ATO = \alpha$; $\angle OAT = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOT = 90 - \alpha$.

Аналогично в $\triangle OCT$: $\angle COT = 90 - \alpha$.

$\triangle AOC$ - р/б, т.к $AO = OC$ (т.к радиусы).

$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = \dfrac{180 - (90 - \alpha) - 90 - \alpha)}{2} =$

$= \dfrac{180 - 180 + 2\alpha}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$

$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = \alpha$.

(8)

Чистовик

$\angle OAT = 90 = \angle OAC + \angle CAT = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 45$

$\Rightarrow$ Получаем, что $\triangle AMO$ – прямоуг,

т.к $\angle AMO = 180 - \angle AOM - \angle OAM = 90$.

Аналогичным образом получаем, что $\angle OMC$ – тоже прямоугольн. (поскольку $AC \perp OT$

$S_{APK} = PK \cdot AK \cdot \sin\beta = 6$

$S_{CPK} = PK \cdot KC \cdot \sin\beta = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} PK \cdot \sin\beta = \frac{6}{AK} \\ PK \cdot \sin\beta = \frac{4}{KC} \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{AK} = \frac{4}{KC} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4AK = 6KC \Rightarrow AK = \frac{6}{4} KC$

21103466 (U813835 M1297788)

⑤ Иметовик

$t \cdot t \cdot (t-1) = 4$

$\Rightarrow t^3 - t^2 - 4 = 0$ $\qquad t = 2$ подходит

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} t^3 - t^2 - 4 & t-2 \\ \underline{t^3 - 2t^2} \quad\; & \overline{t^2 + t + 2} \\ t^2 - 4 & \\ \underline{t^2 - 2t} & \\ 2t - 4 & \\ \underline{2t - 4} & \\ 0. & \end{array}$$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2$

$2\log_{5x-1}(4x+1) = 2.$

$4x + 1 = 5x - 1 \Rightarrow x = 2$; по ОДЗ подх.

4) Аналогично, $d = f$ или $t = f$.

$\Rightarrow d = 2$, или $f = 2$.

1 вар) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 1$

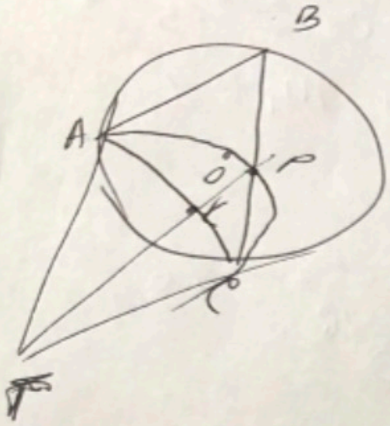
$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \log_{4x+1}(4x+1)$

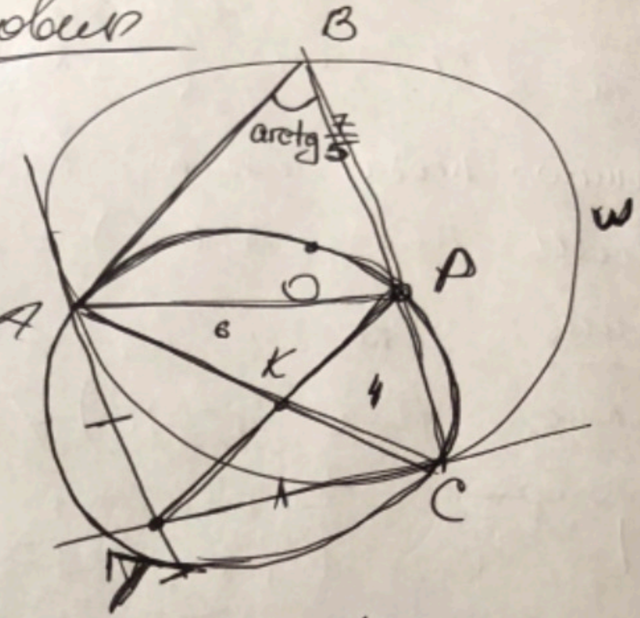
$\frac{x}{2} + 2 = 4x + 1 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$, по ОДЗ подх.

2 вар) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \Rightarrow$

# Черновик




По св-ву 2-х касат из 1 точки

$\Rightarrow AT = TC$

$S_{\triangle}APK = 6$; $S_{\triangle}CPK = 4$

---

Наиб. общ дел. $a$; $b$ и $c$ = 6.

~~Наиб.~~ $2^{15} \cdot 13^{16}$

---

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\frac{\log_b(4x+1)}{\log_b\sqrt{5x-1}}$; $\frac{\log_b\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}{\log_b(4x+1)}$; $\frac{\log_b(5x-1)}{\log_b\left(\frac{x}{2}+2\right)}$.

Обозначу $\log_b(4x+1)$ за $t$.

Черновик

$a = 2^{k_1} \cdot 3^{m_1}$; $b = 2^{k_2} \cdot 3^{m_2}$; $c = 2^{k_3} \cdot 3^{m_3}$

Важно: необх хотя бы: $k_i = 1$ и $m_i = 1$

иначе НОД $(a; b; c) \neq 6$.

Важно: хотя бы $k_i = 15$ и $m_i = 16$,

иначе НОК $(a; b; c) \neq 2^{15} \cdot 3^{16}$.

Выбираем $k_1; k_2; k_3$

НО! $\underbrace{k_i = 1}_{3}$; $\underbrace{k_i = 15}_{2}$; $k_p = \underbrace{1 \to 15}_{15}$

Итого: $3 \cdot 2 \cdot 15 = 90$ спос

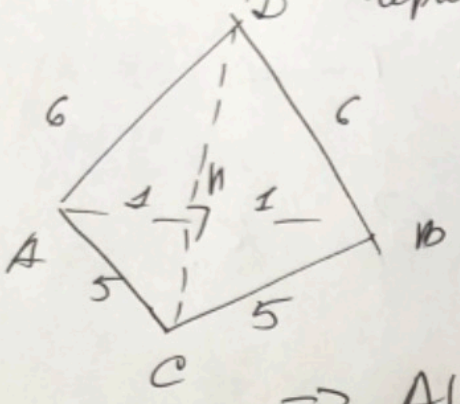
Аналогично выб. $m$

Способы т.к перемнож

Учтем, когда 3-их больше 1-ого раза.

Отбор по $k$ и $m$.

# Черновик




$\triangle ADB$ высота ДИ – медиан. Аналогично с р/б $\triangle ABC$: СИ – мед.

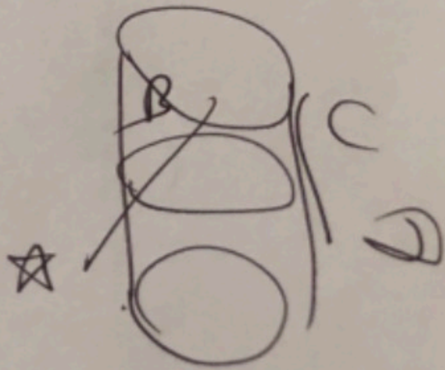
$\Rightarrow AИ = ИB = \frac{AB}{2} = 1.$

$\Rightarrow AB \perp$ к пл-ти ДИС.

Т.к $AB \perp ИC$, ~~AB ⊥ ДИ~~. $AB \perp ДИ$

Далее, т. C, и Д лежат на бок пов-ти цилиндр и $CД \parallel$ оси $\Rightarrow CD$ – их образующ. относит. пов т.к $AB \perp CДИ$, то $AB \perp CД$, т.е AB лежит в пл-ти, перпенд. оси цилиндра

Сечение цилиндра – круг, паралл. основ. цилиндра, AB – хорда.




$r \geq \frac{AB}{2}$, т.к AB – хорда

Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=6 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

Кол-во троек – ?

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$;

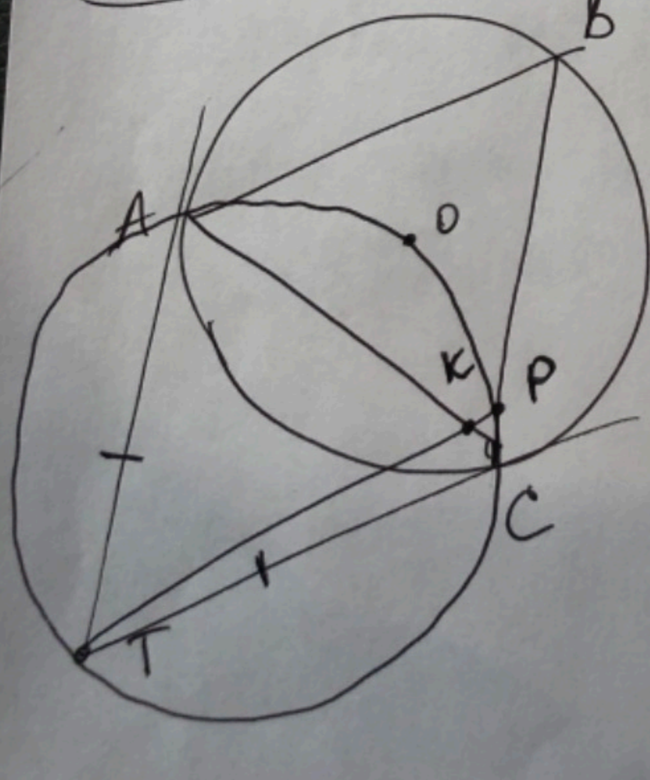
$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$.

$x$ – ?

2 – равны

3-ее −1

$$\frac{\log_c 4x+1}{\log_c \sqrt{5x-1}};\quad \frac{\log_a \left(\frac{x}{2}+2\right)^2}{\log_a 4x+1};\quad \frac{\log_b 5x-1}{\log_b \frac{x}{2}+2}.$$




$S_\Delta APK=6$; $S_\Delta CPK=4$.

$S_\Delta ABC$ – ?

$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{7}{5}$;

$AC$ – ?

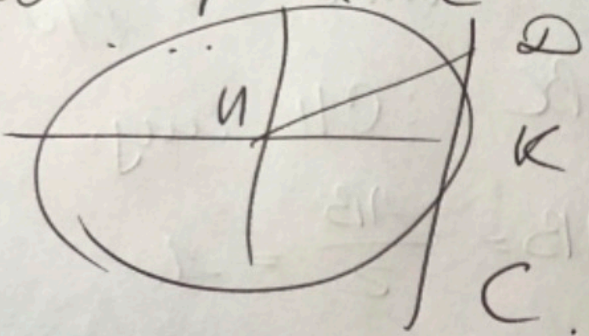
21103466 (U813835 M1297788)

Черновик

=> Наим. объём $r = 1$

=>

$CD$ пересек с $S$ в $K$.



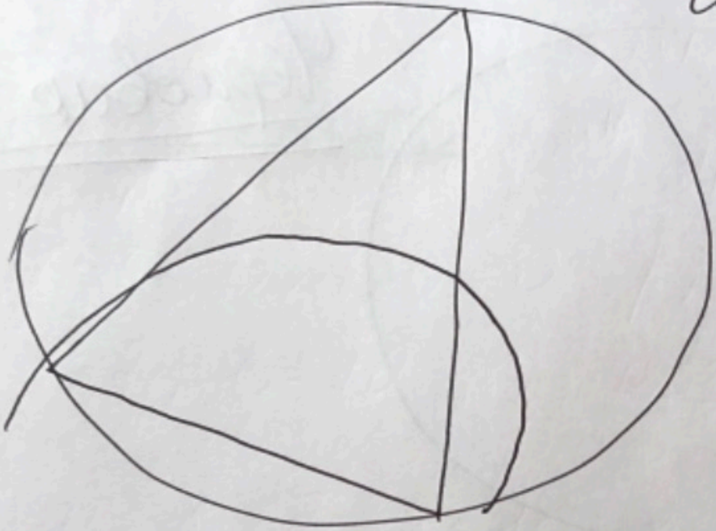
Чистовик

~~Чистовик~~

Черновик

~~Чистовик~~ Черновик

7

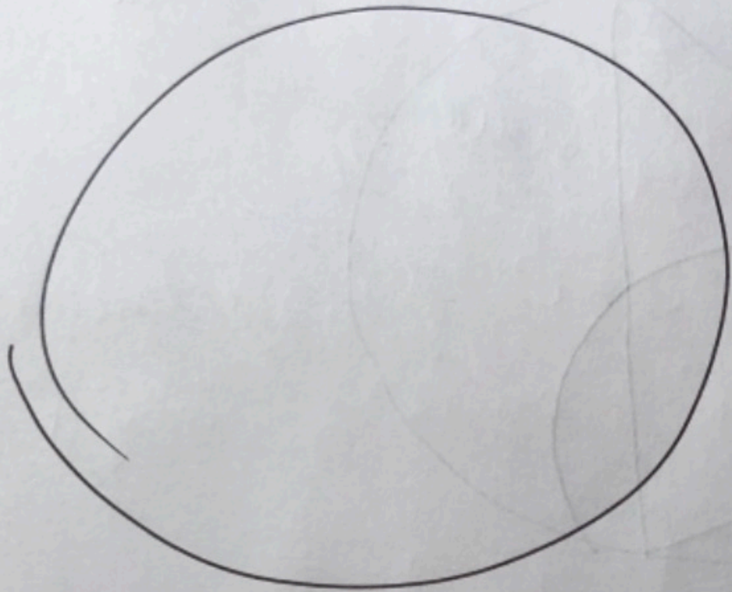


~~Чистовик~~

Черновик

~~Нечетовик~~

Черновик



$\log_6 (4x+1) - t$ Черновик

$\log_6 \left(\frac{x}{2}+2\right) - c.$

$\frac{t}{\log_6\sqrt{5x-1}}$; $\frac{c^2}{t}$; $\frac{\log_6(5x-1)}{c}.$

$5x-1>0$

$5x>1 \Rightarrow \underline{x>\frac{1}{5}}$

$5x=2 \Rightarrow x\neq\frac{2}{5}.$