Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103353**

ID профиля: **354224**

Вариант 17

Загал...

$\begin{cases} (x-a \ldots \\ a^2 \ldots \end{cases}$

(1) 3

(2)

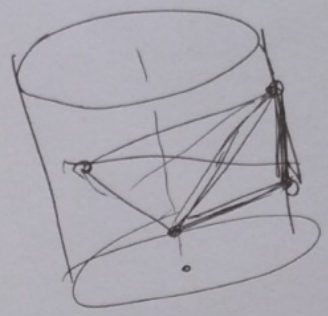
$$\begin{array}{r} 256 \\ -\ 220 \\ \hline 36 \end{array}$$

-320

$140 \cdot 140 - 4 \cdot 16 \cdot 168$

$$\begin{array}{r} 55 \\ \times\ 4 \\ \hline 220 \end{array}$$

$4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 168$



$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 35 \\ \hline 175 \\ +\ 105 \\ \hline 1225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 4 \\ \hline 68 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 168 \\ \times\ 16 \\ \hline 1008 \\ +\ 168 \end{array}$$

18

$25 - 1$

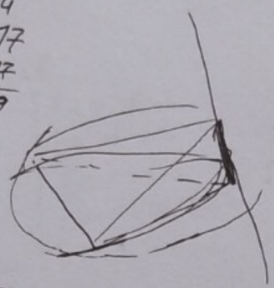
$\sqrt{24} = \sqrt{6 \cdot 4}$

$\frac{a_6 + a_{12}}{2} = a_9$

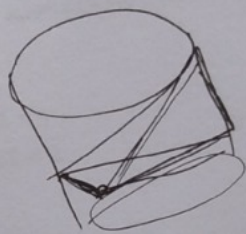
$$\begin{array}{r} 77 \\ \times\ 77 \\ \hline 779 \\ +\ 67 \end{array}$$

$4^2 \cdot 49 \cdot 25 - 4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 104$

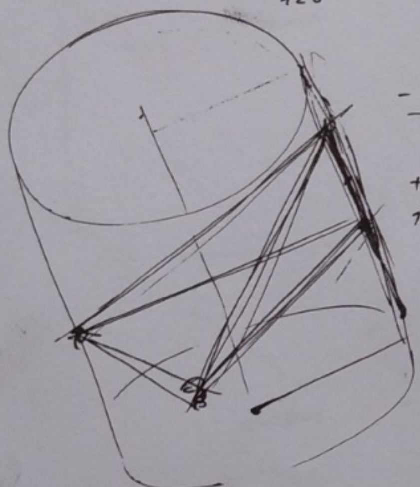
$\times 104$



$36 -$



$$\begin{array}{r} 1225 \\ -\ 1036 \\ \hline 189 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 189 \\ -\ 36 \\ \hline 125 \end{array}$$

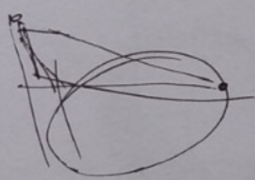


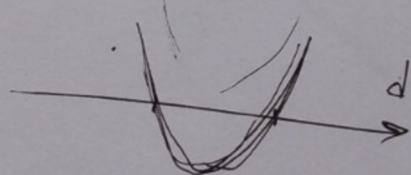
59

$$\begin{array}{r} 1225 \\ -\ 936 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ \times\ 6 \\ \hline 210 \end{array}$$

140

$$\begin{array}{r} 936 \\ +\ 289 \\ \hline 1225 \end{array}$$





$\frac{140 \pm 17}{2 \cdot 36}$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \times\ 4 \\ \hline 672 \end{array}$$

$\frac{140 \pm 68}{2 \cdot 36}$

5

$$\begin{array}{r} 1225 \\ -\ 672 \\ \hline 553 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 553 \\ +\ 672 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$\frac{208}{2 \cdot 36} = \frac{104}{36} = \frac{52}{18} = \frac{26}{9}$

$+ \quad 1 \quad - \quad \frac{26}{9} \quad +$

$140 - 68$

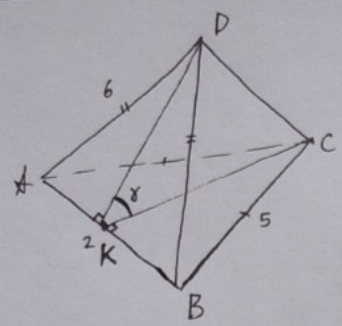
$$\begin{array}{r} 140 \\ -\ 68 \\ \hline 72 \end{array}$$

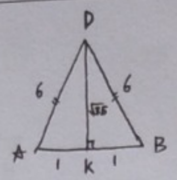
$\frac{26}{9}$

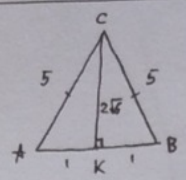
72

21103353 (U354224 M1300605)

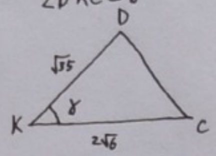
Задача 2.





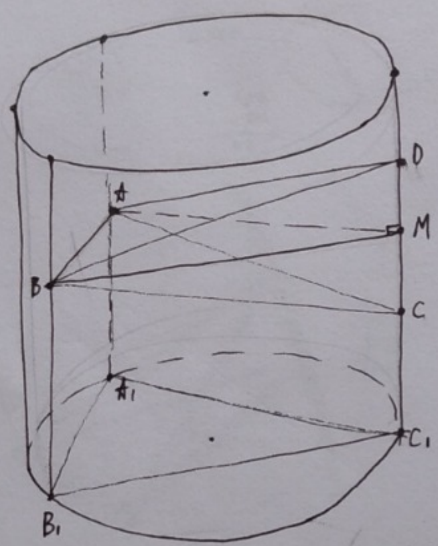


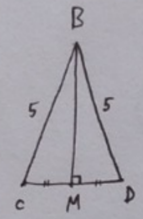
$\angle DKC = \gamma$

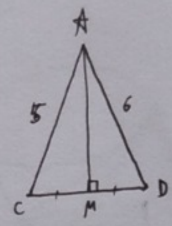


$DC^2 = 35 + 24 - 2\cdot\cos\gamma\cdot\sqrt{35}\cdot 2\sqrt{6}$

$DC = \sqrt{59 - 4\sqrt{210}\cdot\cos\gamma}$





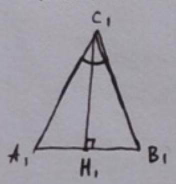


$DC = d$

$BM = B_1C_1$ $\quad AB = A_1B_1$

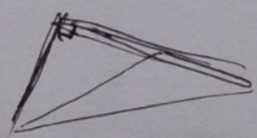
$AM = A_1C_1 = 2$

$\triangle A_1B_1C_1$ вписан в основание цилиндра.



$C_1H_1 = \sqrt{}$

$(30\cos\gamma)^2 \cdot 2 \cdot 1$



$71 - 60\cos\gamma$

-1

$43 \times 4 = 172$

$484 - 172 = 312$

$22 \times 22 = 484$

$168 \times 4 = 672$

$60\cdot 4 - 45\cdot 4 - 17$

$240 - 180$

$1225 - 672 = 553$

$553 + 672 = 1225$

$32 - 10$

$60 - 17 = 43$

Задача 3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (1)\\[2ex] a^2+b^2\le \min(2a+2b,2) & (2)\end{cases}$$

(1) Задает круг с центром в точке (a,b) и радиусом $\sqrt{2}$

(2) Если $2a+2b>2$, то $a^2+b^2\le 2$.

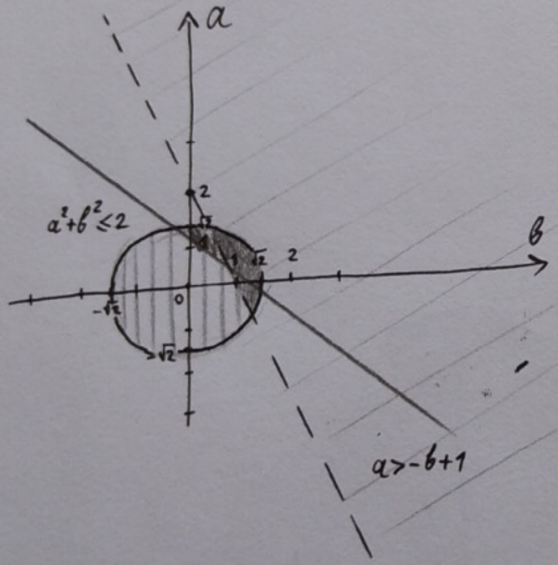
Если $2a+2b<2$, то $a^2+b^2\le 2a+2b$

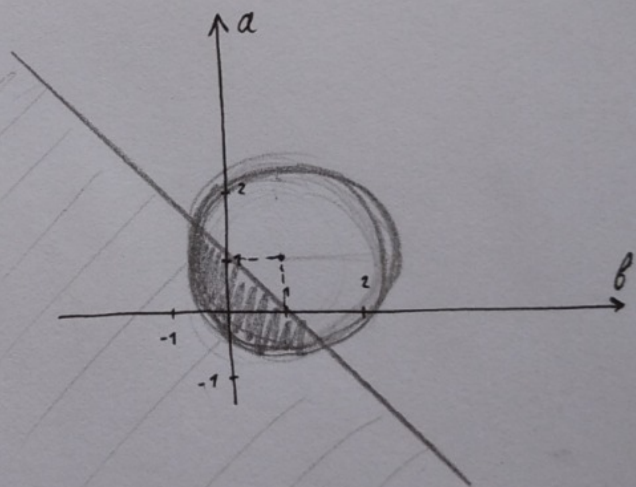
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a+2b>2\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}2a+2b<2\\ a^2+b^2\le 2a+2b\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b>1\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a+b<1\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>-b+1\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a<-b+1\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим совокупность систем на декартовой плоскости, состоящей из точек (a,b)

$1<2<4$

$1<\sqrt{2}<2$





Чистовик

Задача 3.

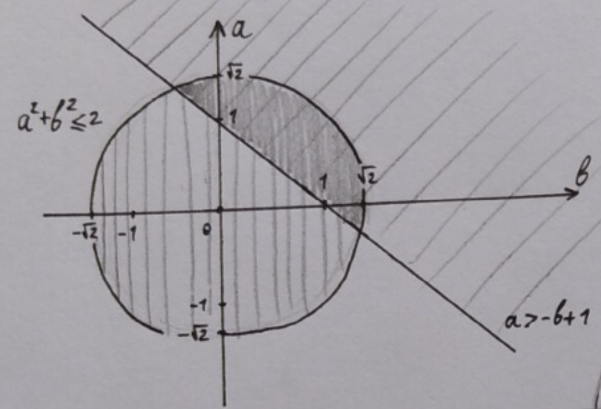
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (1) \\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2) & (2) \end{cases}$$

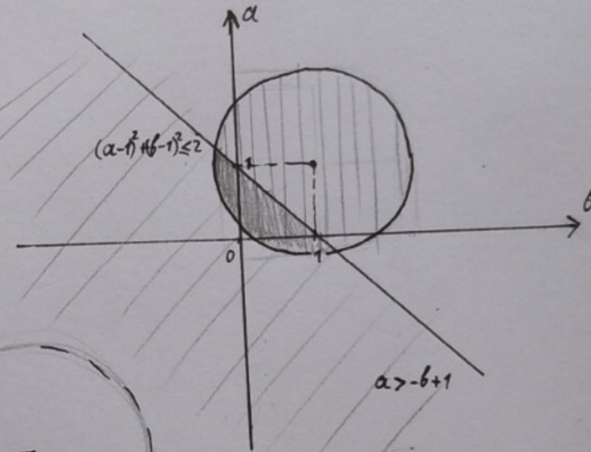
Неравенство (1) задает круг с центром в точке (a,b) и радиусом $\sqrt{2}$.

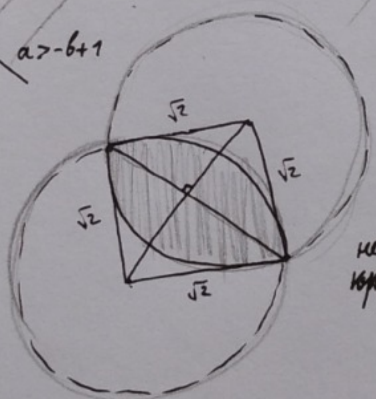
Неравенство (2) есть совокупность двух систем, которую мы рассмотрим на декартовой плоскости в координатах $(a;b)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a+2b>2 \\ a^2+b^2\le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a+2b<2 \\ a^2+b^2\le 2a+2b \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b>1 \\ a^2+b^2\le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b<1 \\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

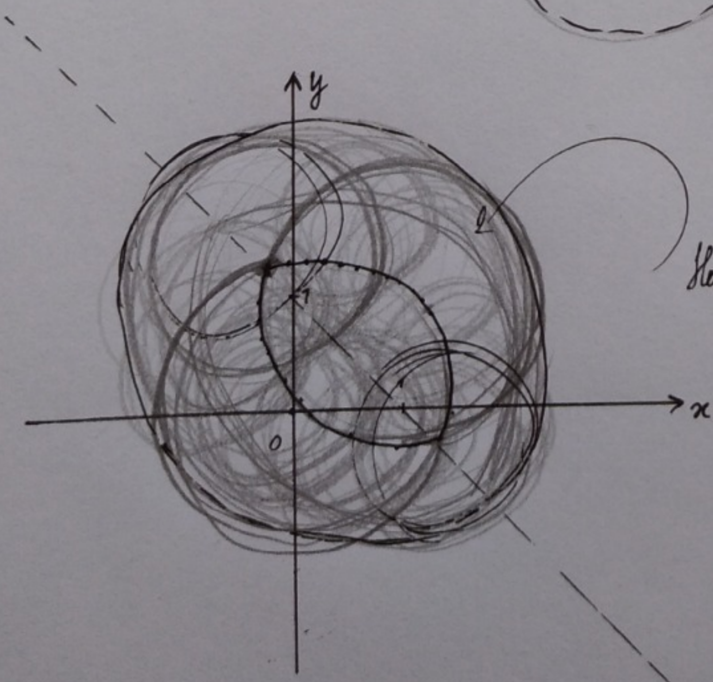
$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a>-b+1 & \text{полуплоскость} \\ a^2+b^2\le 2 & \text{круг с центром в точке } (0;0) \text{ и радиусом } \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a<-b+1 & \text{полуплоскость} \\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2 & \text{круг с центром в точке } (1;1) \text{ и радиусом } \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$



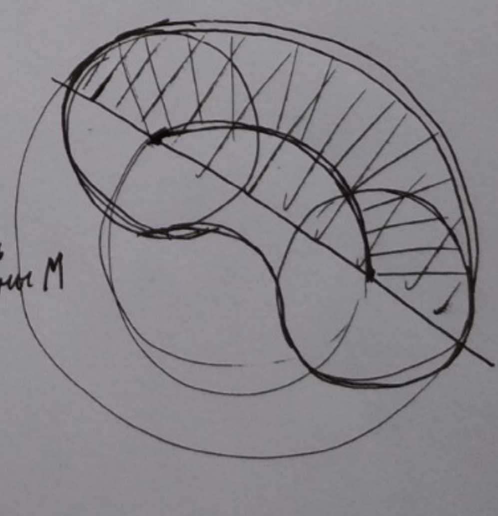




Получившееся множество точек $(a;b)$ есть не что иное как множество координат центра круга с радиусом $\sqrt{2}$ на плоскости Oxy.

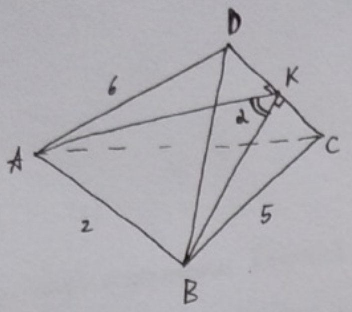


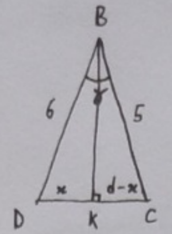
Надо найти площадь этой мракобесины M



Задача 2.

Илистовик





$AK \perp DC$ $\quad DC \perp (ABK)$

$BK \perp DC$ $\quad DC \perp AB$

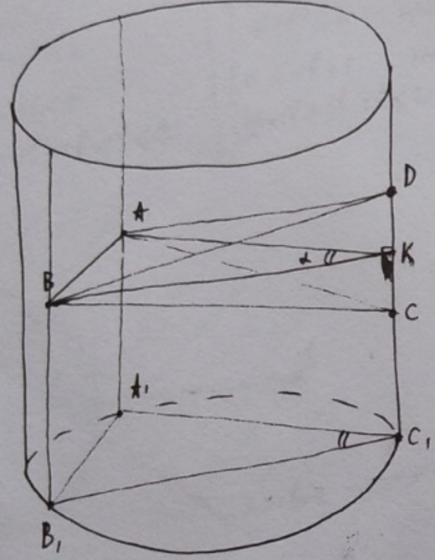
$\Delta ADC = \Delta BDC$ (по трем сторонам)

$DC = d \quad , \angle DBC = \gamma$

$$S_{BCD} = \frac{\sin\gamma \cdot 6 \cdot 5}{2} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot d \quad ; \; BK = \frac{\sin\gamma \cdot 30}{d}$$

$$d^2 = 36 + 25 - 2 \cdot \cos\gamma \cdot 6 \cdot 5$$

$$BK = \frac{\sin\gamma \cdot 30}{\sqrt{61 - 60 \cdot \cos\gamma}}$$



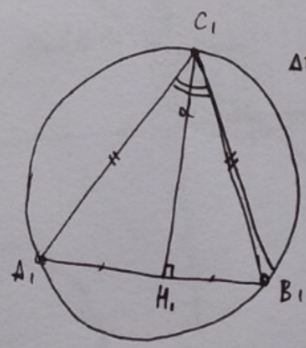
$BK = B_1C_1$

$AK = A_1C_1$

$AB = A_1B_1 = 2$

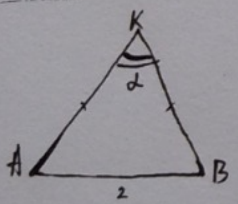
$$B_1C_1 = A_1C_1 = \frac{30 \cdot \sin\gamma}{\sqrt{61 - 60 \cdot \cos\gamma}}$$

Так.к. DC ∥ оси цилиндра, а точки D и C лежат на боковой поверхности то DC лежит на образующей цилиндра.



$\Delta A_1B_1C_1$ вписан в основание цилиндра с радиусом R

$$R = \frac{A_1B_1}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$$



$$4 = \frac{900 \cdot \sin^2\gamma}{61 - 60 \cdot \cos\gamma} \cdot 2 - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{900 \cdot \sin^2\gamma}{61 - 60 \cdot \cos\gamma}$$

$$\cos\alpha \cdot \frac{900 \cdot \sin^2\gamma}{61 - 60 \cdot \cos\gamma} = \frac{900 \cdot \sin^2\gamma}{61 - 60 \cdot \cos\gamma} - 2$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{(61 - 60\cos\gamma) \cdot 2}{900 \sin^2\gamma} \quad ; \; \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{1 - 1 + \frac{4 \cdot (61 - 60 \cdot \cos\gamma)}{900 \cdot \sin^2\gamma} - \frac{4(61 - 60 \cdot \cos\gamma)^2}{810000 \sin^4\gamma}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(61 - 60 \cdot \cos\gamma)}{900 \cdot \sin^2\gamma}} \cdot \sqrt{1 - \frac{(61 - 60 \cdot \cos\gamma)}{900 \cdot \sin^2\gamma}} \cdot 2$$

$$R(\gamma) = \frac{900 \cdot \sin^2\gamma}{2\sqrt{61 - 60\cos\gamma} \cdot \sqrt{900(1 - \cos^2\gamma) - (61 - 60\cos\gamma)}}$$

$$R'(\gamma) = \frac{900 \cdot 2 \cdot \sin\gamma \cdot \cos\gamma \cdot 2\sqrt{61 - 60\cos\gamma} \cdot \sqrt{} - 900 \sin^2\gamma \frac{1}{2\sqrt{} \cdot \sqrt{}}}{2 \cdot \sqrt{} \cdot \sqrt{}} =$$

$$= 900 \cdot \sin\gamma \left(2 \cdot \cos\gamma \cdot (61 - \cos\gamma) \cdot (\qquad) - \sin\gamma \right)$$

21103353 (U354224 M1300605)

Задача 1

Чистовик

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})\cdot 10}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + d\cdot(10-1))10}{2} = 10a_1 + 45d.$

$a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$ формула n-ого члена арифметической прогрессии, при это по условию прогрессия возрастающая, значит $d>0$ Т.к. члены прогрессии целые числа то и $d \in Z$

По условию:

$a_6 \cdot a_{12} > S + 1$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

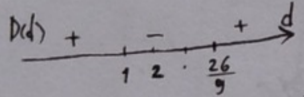
$a_1^2 + (16d-10)a_1 + 55d^2 - 45d - 1 > 0$

$(16d-10)^2 - 4\cdot(55d^2 - 45d - 1) = 256d^2 - 320d + 100 - 220d^2 + 180d + 4 =$

$= 36d^2 - 140d + 104$

$140^2 - 4\cdot 36 \cdot 104 = \cancel{\ldots} = 289 \cdot 16 = (17\cdot 4)^2$

$D(d) = 36d^2 - 140d + 104$



Если $D<0$, то $a_1^2 + (16d-10)a_1 + 55d^2 - 45d - 1 > 0$ при любых a_1

Если $D \geq 0$, то $d=1$ или $d \geq 3$

$a_7 \cdot a_{11} < S + 17$

$(a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + (16d-10)a_1 + 60d^2 - 45d - 17 < 0$

$(16d-10)^2 - 4(60d^2 - 45d - 17) = 256d^2 - 320d + 100 - 240d^2 + 180d + 68 =$

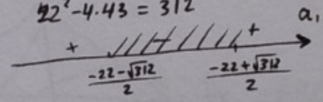
$= 16d^2 - 140d + 168$

$140^2 - 4\cdot 16 \cdot 168 = 553 \cdot 16$

Если $d = 2$, то

$a_1^2 + 22a_1 + 43 < 0$

$22^2 - 4\cdot 43 = 312$



$\times\frac{16}{16}$ $\frac{+96}{16}$ 256

$\times\frac{17}{4}$ 68

21103353 (U354224 M1300605)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

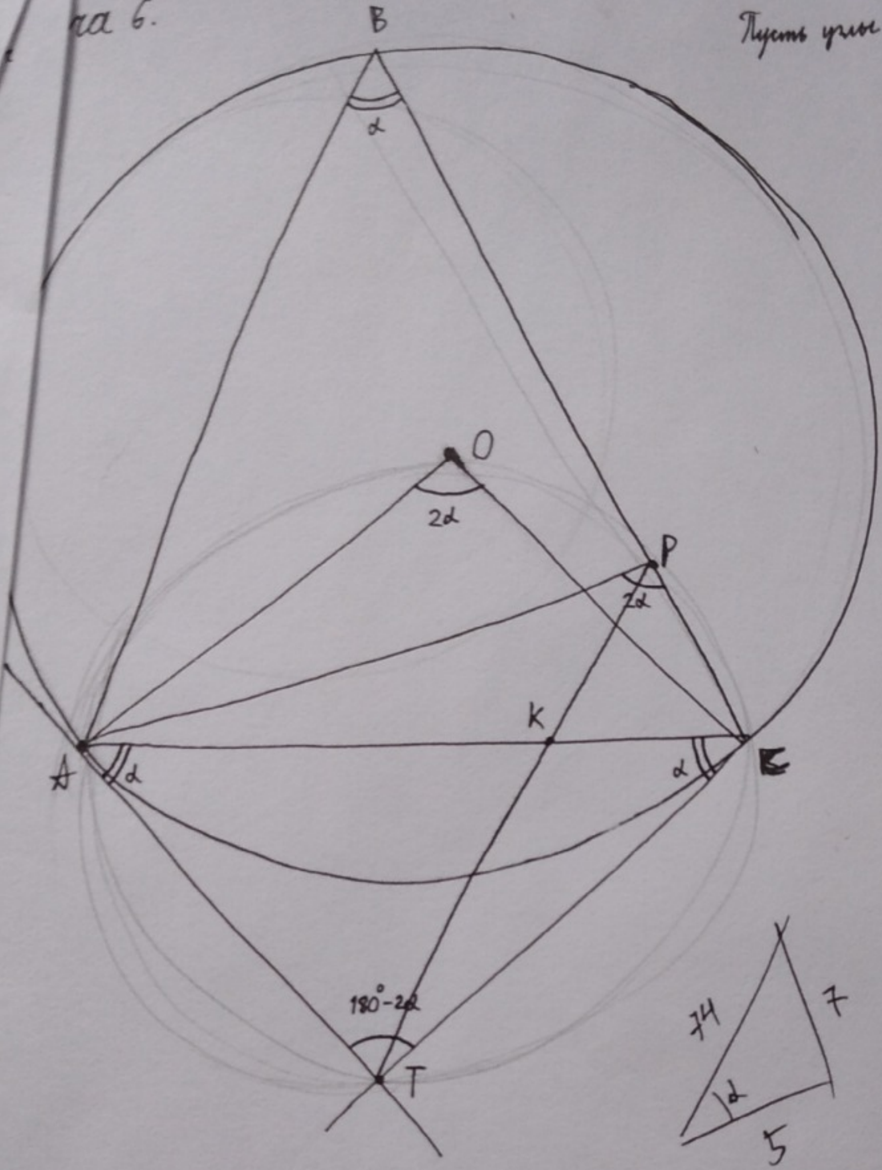
Шифр: **21103353**

ID профиля: **354224**

Вариант 17

ча 6.

Пусть углы между касательными AT, BT и



5

6

$2^2 3$

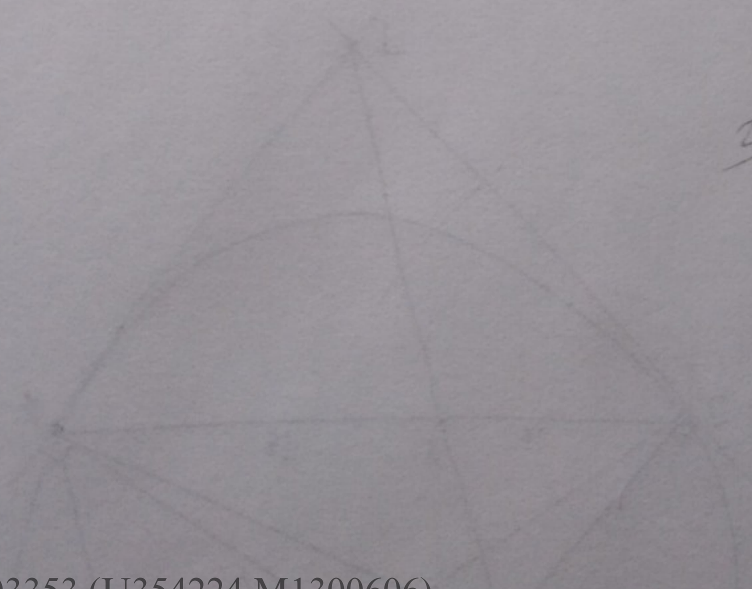
$2\ 3$

23

$2\cdot 2\cdot$

$49+25$

$\frac{2\cdot 2}{5\cdot 5} = \frac{4}{\ }$



Задача 4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

НОД$(a;b)=1$ взаимно простые

$a = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}$ $\alpha_2 \leq 15$, $\alpha_3 \leq 16$, $\alpha_2 \geq 1$, $\alpha_3 \geq 1$

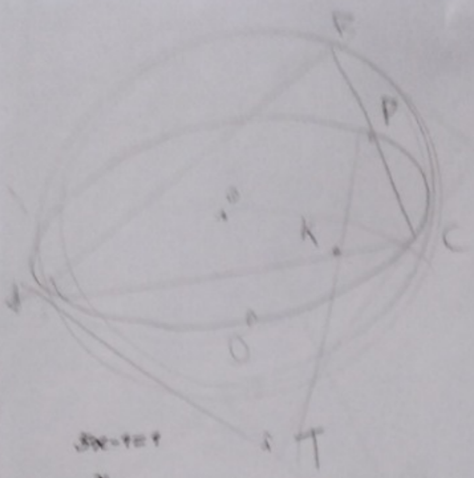
$b = 2^{\beta_2}\cdot 3^{\beta_3}$ $\beta_2 \leq 15$, $\beta_3 \leq 16$, $\beta_2 \geq 1$, $\beta_3 \geq 1$

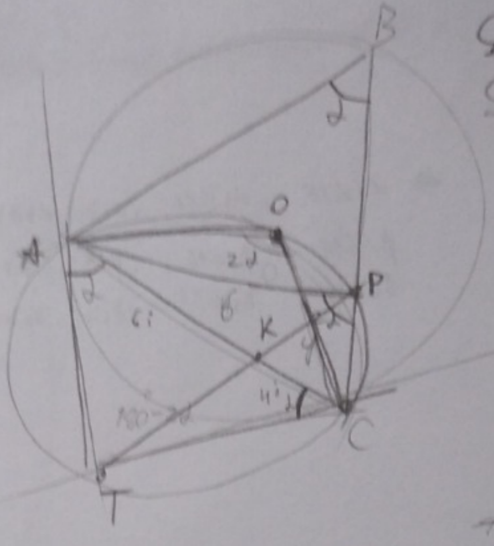
$c = 2^{\gamma_2}\cdot 3^{\gamma_3}$ $\gamma_2 \leq 15$, $\gamma_3 \leq 16$, $\gamma_2 \geq 1$, $\gamma_3 \geq 1$

$a = 2^{\alpha}\cdot 3$

$b = 2\cdot 3$

$c = 2\cdot 3$



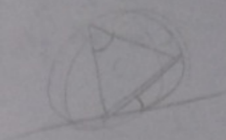


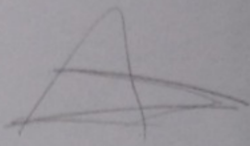
$S_{APK}=6$

$S_{CPK}=4$

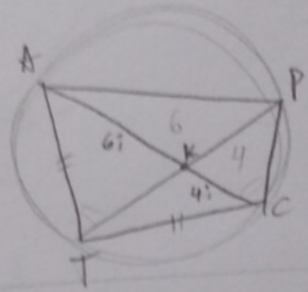
S_{ABC}-?

AC-?



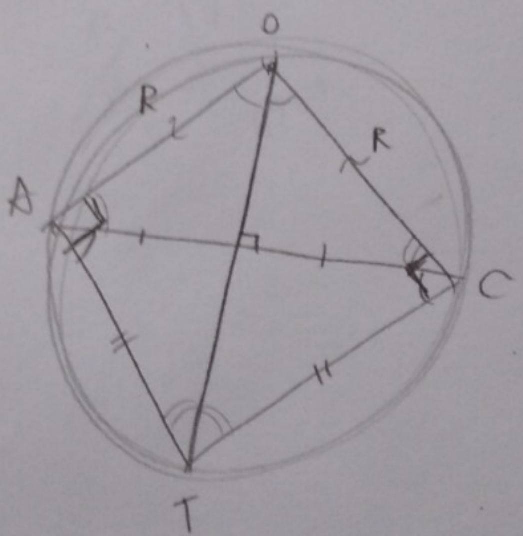


	1	-1	0	-4
2	1	*	2	

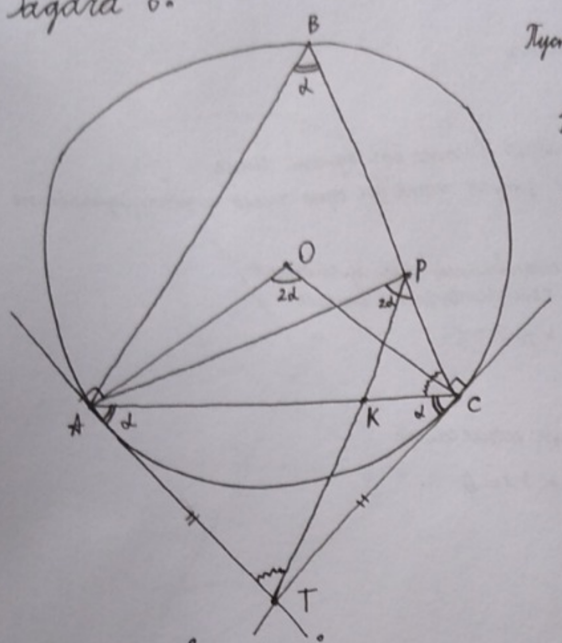


$$\frac{AK}{KP} = \frac{KT}{KC}$$

$$6i \cdot 4i = KT \cdot KP$$



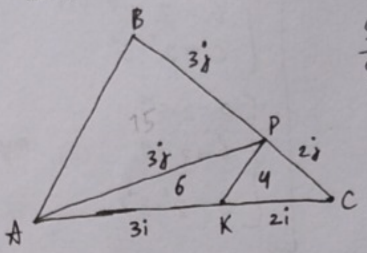
Задача 6.



Пусть угол $\angle ACT = \alpha$, тогда $\angle CAT = \alpha$ т.к. ΔATC равнобедренный потому что отрезки касательных равны
$AT = CT$

По теореме об угле между касательной и хордой:
$\angle ABC = \alpha$, центральный $\angle AOC = 2\alpha$

По условию точки: A, O, P, C лежат на одной окружности поэтому
$\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$
$\angle BAP = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$, значит ΔABP равнобедренный $AP = BP$



$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$S_{APC} = 10$

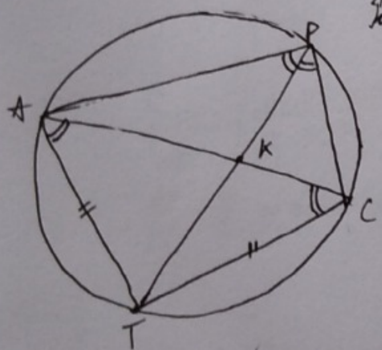
$$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin\angle C \cdot 2j \cdot 5i}{\frac{1}{2} \cdot \sin\angle C \cdot 5j \cdot 5i} = \frac{2}{5}$$

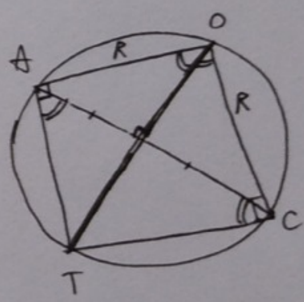
$$S_{ABC} = \frac{5}{2} \cdot S_{APC} = 25$$

$$\boxed{S_{ABC} = 25}$$

т.к. $\angle OAC = 90^\circ$ и $\angle OCT = 90^\circ$
$\angle OAC + \angle OCT = 180^\circ$
и по признаку принадлежности точки окружности
точка T лежит на окружности вместе с ними
содержащей точки A, O, C, точка P соответственно

Рассматриваем равенства вписанных углов
и видим, что PK биссектриса $\angle APC$
значит $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$





$\Delta APT \sim \Delta ABC$

$$\frac{AB}{3j} = \frac{5j}{PT} = \frac{5i}{AT}$$

$$tg\,\alpha = \frac{AT}{R}$$

Теперь известно $\angle ABC = arc\,tg\,\frac{7}{5}$; $tg\,\alpha = \frac{7}{5}$; $\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}}$

$$\frac{5j \cdot 5i \cdot \sin\angle C}{2} = \frac{5j \cdot AB \cdot \sin\alpha}{2}$$

$AO = OC = OB = R$

$$R = \frac{AC}{2 \cdot \sin\beta}$$

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S_{ABC}}$$

$AC = 5i$

21103353 (U354224 M1300606)

Задача 5.

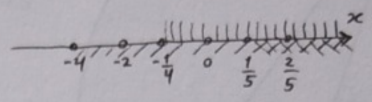
$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=a$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=b$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=c$

Решим задачу с учетом следующих условий:

$$\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \sqrt{5x-1}\neq 1 \\ 5x-1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x\neq \frac{2}{5} \\ x>\frac{1}{5} \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases}$$



$x\in\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$

$a=2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)=\frac{2}{\log_{4x+1}(5x-1)}$

$b=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$c=\frac{1}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$

$a\cdot b=4\cdot\frac{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\log_{4x+1}(5x-1)}=4\cdot\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=\frac{4}{c}$

$a\cdot b\cdot c=4$

Возможны следующие случаи:

$\cancel{\begin{cases} a=b \\ c+1=a \end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases} b=c \\ a+1=b \end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases} a=c \\ b+1=a \end{cases}}$

$$\begin{cases} a=b \\ a=c+1 \\ abc=4 \end{cases} \quad \begin{cases} a=b \\ a=\frac{4}{ab}+1 \\ c=\frac{4}{ab} \end{cases} \quad a=\frac{4}{a^2}+1 \ ; \quad a^3-a^2-4=0$$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$a=2$

$b=2$

$c=1$

Решать можно было и в других обозначениях главный вывод, который мы получили, что равные числа равны двум, а третье меньше на один равно единице.

I случай $a=2$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

$4x+1=5x-1$

$x=2$, при этом значении

$b=\log_{4\cdot 2+1}\left(\frac{2}{2}+2\right)^2=\log_9 9=1$

$c=\log_{\frac{2}{2}+2}(5\cdot 2-1)=\log_3 9=2$

II случай $a=1$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=1$

$4x+1=\sqrt{5x-1}$

$16x^2+8x+1=5x-1$

$16x^2+3x+2=0$

$9-2\cdot 4\cdot 16<0$

действительных решений нет, значит $a\neq 1$

Значит возможен только случай $a=2$, который удовлетворяет условию задачи.

$\boxed{x=2}$

Задача 4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=6 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

НОД чисел a,b,c гораздо меньше их НОКа

Из данных условий следует то, что ~~в каждом числе a,b,c не больше~~ в хотя бы одном числе степень двойки и тройки встречается не больше одного раза. Иначе говоря хотя бы одно число можно представить в виде

$2\cdot 3$ или $2\cdot 3^x$, $3\cdot 2^y$

$\uparrow$ либо одно такое будет в тройке

$\uparrow$ либо два таких будет в тройке

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2\cdot 3 \\ b=2^x\cdot 3^y \\ c=2^c\cdot 3^d \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a=2\cdot 3^x \\ b=3\cdot 2^y \\ c=2^c\cdot 3^d \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) Перестановками мы умножим количество этих случаев $\times 3\cdot 2=6$

(2) тут тоже самое $\times 3\cdot 2=6$