Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103350**

ID профиля: **368257**

Вариант 17

(1) Чистовик Вариант 17.

(по условию $a_1, d, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Z}$)

Задача №1

Пусть d – разность арифм. прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Тогда $S = \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 = (2a_1+9d)5 = 10a_1 + 45d$.

Заметим, что $a_6 = a_1+5d$, $a_7 = a_1+6d$, $a_{11} = a_1+10d$, $a_{12} = a_1+11d$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2 + 16a_1d + 55d^2$

$a_7 a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$

По условию

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \Rightarrow a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \ (1) \\ a_7 a_{11} < S+17 \Rightarrow a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \ (2) \end{cases}$$

$a_6 a_{12} > S+1 > a_7 a_{11} - 16.$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 - 16$

$5d^2 < 16$; $d^2 < 3,2$

Последовательность возрастающая и целая $\Rightarrow \begin{cases} d \in \mathbb{Z} \\ d > 0 \end{cases}$ т.е. $d \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} d \in \mathbb{N} \\ d^2 < 3,2 \end{cases} \Rightarrow d = 1$ (т.к. $1 < \sqrt{3,2} < 2$)

(1): $a_1^2 + \underline{16a_1 \cdot 1} + \underline{55 \cdot 1} > \underline{10a_1} + \underline{45 \cdot 1 + 1}$; $a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$(a_1+3)^2 > 0$ т.е. $a_1 \neq -3$.

(2): $a_1^2 + \underline{16a_1 \cdot 1} + \underline{60 \cdot 1} < \underline{10a_1} + \underline{45 \cdot 1 + 17}$; $a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$D = 36 + 8 = 44$; $a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$+ \quad - \quad +$; $-3-\sqrt{11}$, $-3+\sqrt{11}$, a_1

$a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$.

$-7 < -3 - \sqrt{11} < -6$, $a_1 \in \mathbb{Z}$ по усл. $\Rightarrow a_1 \geq -6 > -3 - \sqrt{11} > -7$.

$-4 < -\sqrt{11} < -3$

$\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$

$1 > \sqrt{11} - 3 > 0$, $a_1 \in \mathbb{Z}$ по усл. $\Rightarrow a_1 \leq 0 < -3 + \sqrt{11} < 1$.

$4 > \sqrt{11} > 3$

$\sqrt{16} > \sqrt{11} > \sqrt{9}$

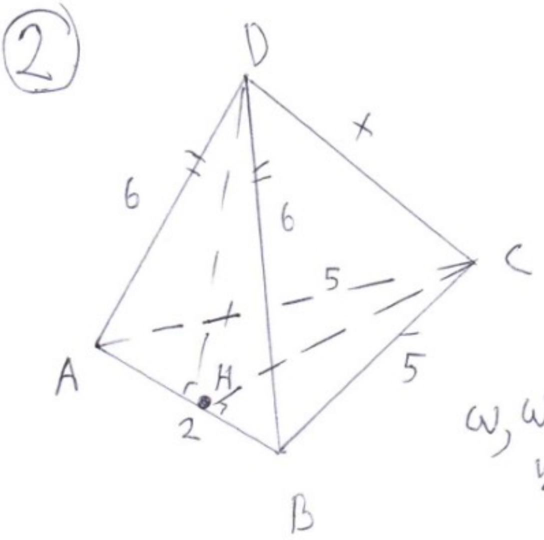
Итого $\begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in [-6; 0] \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$ т.е. искомые последовательности – это ар. прогрессии (начиная с a_1 и с шагом $d=1$)

21103350 (U368257 M1295685)

Ответ: $a_1 = -6, -5, -4, -2, -1, 0.$

Чистовик

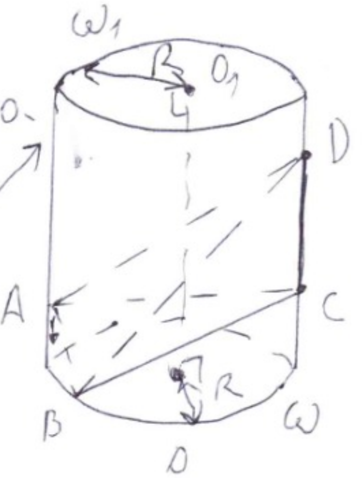
(2)



№ 2.

Пусть $CD = x, x > 0$.

Пусть ω, ω_1 – основания цилиндра



1). Докажем, что $CD \perp AB$:

1.1) $\triangle ABD$: опустим $DH \perp AB$. т.к. $AD = DB$ ($\triangle$ равнобедренный), то $AH = HB$ т.к. DH не только высота, но и медиана.

1.2) $\triangle CAB$: CH – медиана, а т.к. $AC = BC = 5$, то CH – высота в равнобедренном $\triangle ABC$.

1.3) $\left.\begin{array}{l} AB \perp CH \\ AB \perp DH \\ CH \cap DH = H \end{array}\right\} AB \perp DHC \Rightarrow AB \perp CD$

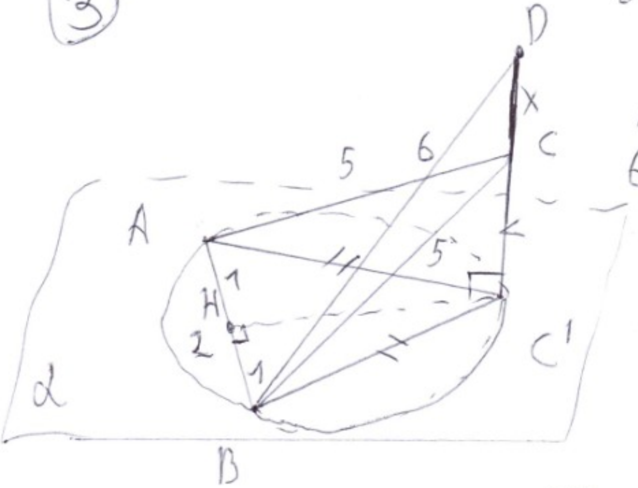
2). По условию $CD \parallel$ оси цилиндра т.е. $CD \parallel OO_1$;
$OO_1 \perp \omega, \omega_1$ т.к. ось цилиндра $\Rightarrow CD \perp \omega, \omega_1$.

3). $\left.\begin{array}{l} CD \perp \omega, \omega_1 \\ CD \perp AB \end{array}\right| \Rightarrow \underline{AB \parallel \omega, \omega_1}$ (или же $AB \in \omega(\omega_1)$).

4). Проведём в цилиндре плоскость α, такую что $AB \in \alpha$, $\alpha \parallel \omega$;
$\alpha \cap$ цилиндр $= \omega'$, радиусы сечения ω', ω и ω_1 совпадают, $AB \in \omega'$
[по построению $\omega' \parallel \omega, \omega' \parallel \omega_1$]

5) Найдём этот радиус:
Пусть C' – проекция CD на ω (т.к. $CD \perp \omega$, то проекция – одна точка).
C' принадлежит окружности основания т.к. CD лежит на боковой поверхности цилиндра;
$A, B, C' \in$ окружности оснований, поэтому её радиус R (по условию $R = R$...) равен радиусу описанной окружности треугольника ABC'.

③ Чистовик



№2 (продолжение)

6) $CC' \perp \alpha \Rightarrow CC' \perp AC',\ CC' \perp BC'$.

$\Delta ACC' = \Delta BCC'$ по общему катету CC' и равным гипотенузам $AC = BC = 5$.

$$\Downarrow$$

$\boxed{AC' = BC'}$

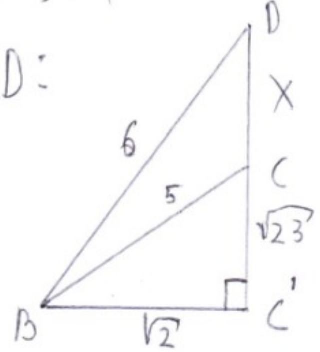
7). По теор. синусов $\frac{AB}{\sin AC'B} = 2R$, по усл $R = R_{min}$, $AB = 2 = const \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin AC'B = 1$ т.к. $\sin AC'B \leq 1$, $\angle AC'B$ очевидно $\in (0; 180) \Rightarrow$ синус должен быть максимален

$\Rightarrow \boxed{\angle AC'B = 90^\circ}$;

$\left.\begin{array}{l} AB = 2 \\ \angle AC'B = 90^\circ \end{array}\right| \Rightarrow AC' = BC' = \sqrt{2}$.

8). $\Delta BC'D$:



$\Delta BC'D$ прямоугольный $\Rightarrow$

$\Rightarrow CC' = \sqrt{BC^2 - BC'^2} = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{23}$.

$BD^2 = BC'^2 + DC'^2$; $36 = 2 + (x + \sqrt{23})^2$; $34 = (x + \sqrt{23})^2$

$x = \sqrt{34} - \sqrt{23}$.

$CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$.

Ответ: $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$.

21103350 (U368257 M1295685)

(4)

Чистовик

№3.

1) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le 2a+2b\\ a^2+b^2\le 2.\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}$

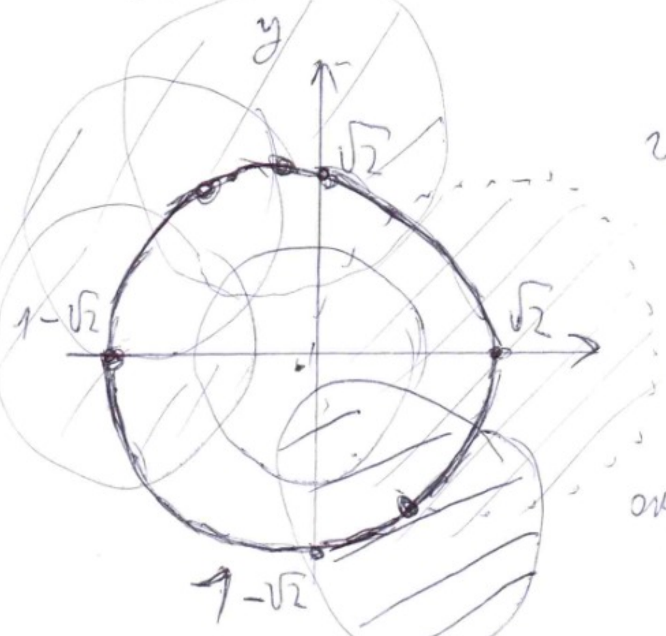
2) заметим, что $\begin{cases}(a-1)^2\le 2\\ a^2\le 2\end{cases}$ и $\begin{cases}(b-1)^2\le 2\\ b^2\le 2\end{cases}$

$\begin{cases}(a-1-\sqrt2)(a-1+\sqrt2)\le 0\\ (a-\sqrt2)(a+\sqrt2)\le 0\end{cases}$

$1-\sqrt2$, $1+\sqrt2$, $-\sqrt2$, $\sqrt2$, a, b

т.е. $a, b\in[1-\sqrt2; \sqrt2]$.

3) При любом значении a из данного промежутка, ему будут соответствовать такие значения b, чтобы точка $(a;b)$ лежала внутри окружности, ограниченной прямыми $x, y=1-\sqrt2$; $x, y=\sqrt2$.
или $(b;a)$ – система не изменится при замене $a\Longleftrightarrow b$.



4) $(x-a)^2+(y-b)^2\le 2$ задаёт часть плоскости, ~~внутри окружности~~, ограниченной окружностью радиуса $\sqrt2$ с центром в $(a;b)$.
т.е. центр лежит на нарисованной нами ранее окружности (или внутри неё)

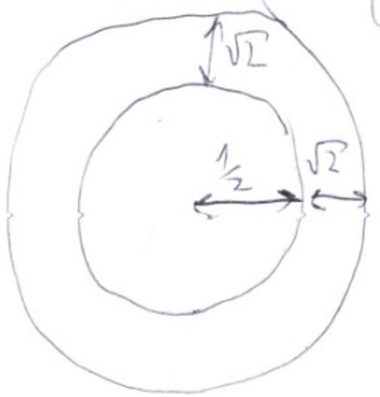
Заметим, что основная окружность, созданная ограничениями на a и b, имеет радиус $\left(\frac{1-\sqrt2+\sqrt2}{2}=\frac12\right)$, поэтому множество окружностей $(x-a)^2+(y-b)^2\le 2$ покроет всю её внутреннюю часть.

21103350 (U368237 M1295685)

(5)

Чистовик.

Таким образом, фигура М — это та окружность радиуса $\frac{1}{2}$, к которой добавили все окружности (включая территорию внутри окружностей) радиуса $\sqrt{2}$, центры которых лежат на или внутри той окружности радиуса $\frac{1}{2}$.



(т. е. фактически радиус просто увеличили от $\frac{1}{2}$, добавив ещё $\sqrt{2}$.

Т. е. М — окружность радиуса $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

Тогда $S_M = \pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{1}{4}+\sqrt{2}+2\right) =$

$= \frac{9}{4}\pi + \sqrt{2}\pi.$

Ответ: $S_M = \frac{9}{4}\pi + \sqrt{2}\pi.$

21103350 (U368257 M1295685)

Черновик

№1. $a_7 a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) =$
$= a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$

$\frac{a_1+a_{10}}{2} 10 = 5a_1 + 5a_{10} = S$

$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = (2a_1 + 9d)5 = 10a_1 + 45d$

$a_6 a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2 + 11a_1d + 5a_1d + 55d^2$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1, d \in Z$

$\boxed{d>0}$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 > a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 - 16$

$16 > 5d^2$; $d^2 < \frac{16}{5}$ ($=3,2$), $d>0$; $0 < d < \frac{4\sqrt5}{5} = \frac{\sqrt{80}}{5}$

$d = 1$, ~~$d=2$~~

$a_1^2 + 6a_1 - 2 = 0$

$D = 36 + 8 = 44$

$a_1^2 + 6a_1 + \underbrace{60-45}_{15} - 17 < 0$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$D = 36 - 4\cdot(-2) = 44$

$a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$+ \quad -3-\sqrt{11} \quad - \quad -3+\sqrt{11} \quad +$

$(\sqrt{11} - 3)^2 + 6(\sqrt{11} - 3) - 2 = 0$

$11 + 9 - 6\sqrt{11} + 6\sqrt{11} - 18 - 2 = 0$

$0 = 0$

$-3, 9$:

$a_6 = -3 + 5 = 2$

$a_{12} = -3 + 11 = 8$

$S = 10\cdot(-3) + 45 = 15$

$2\cdot 8 > 15 + 1$

$16 > 16$

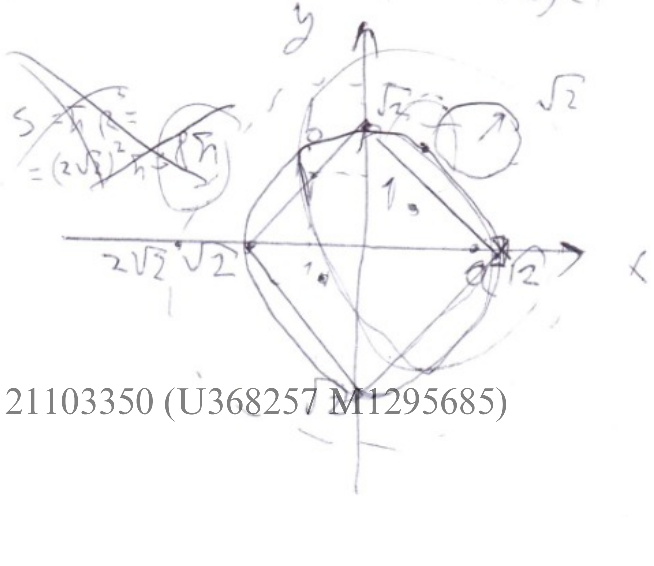
$\varnothing$

$a^2 + b^2 \le \min(2a + 2b, 2)$

$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 2a + 2b \\ a^2 + b^2 \le 2 \end{cases}$

$a^2 - 2a + 1 - 1 + b^2 - 2b + 1 - 1 \le 0$

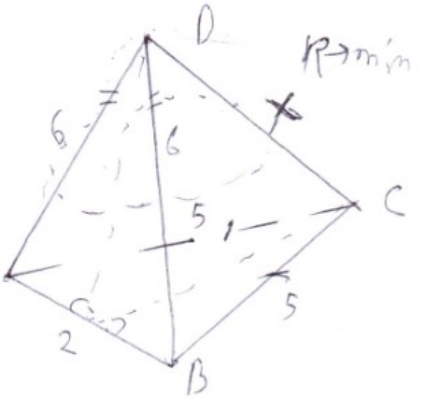
$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 \le 2 \\ a^2 + b^2 \le 2 \end{cases}$



21103350 (U368257 M1295685)

Черновик №2.

ABS(D)
BCD(A)
ABD(C)
ADC(B)



CD ⊥ AB

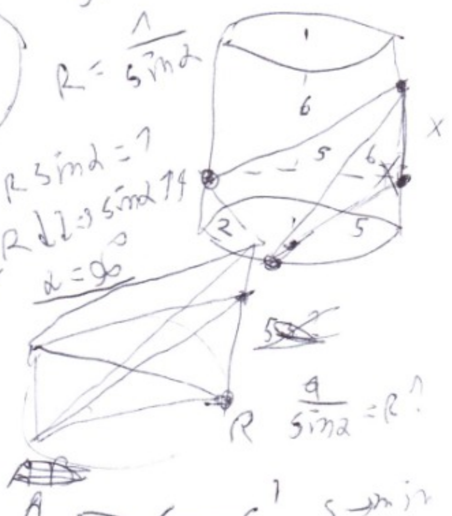
$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$

$R=\frac{1}{\sin\alpha}$

$R\sin\alpha=1$

$R\downarrow\downarrow \Rightarrow \sin\alpha\uparrow\uparrow$

$\alpha=90^\circ$



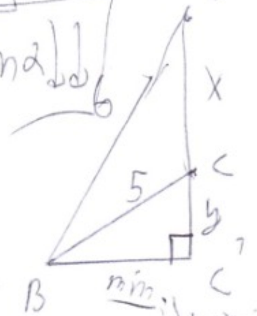
$\frac{a}{\sin\alpha}=R$?

5, 6, x

2, 5, 5

2, 6, 6

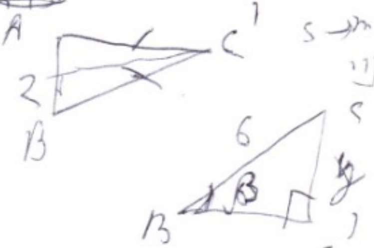
$(0;90]: \alpha\uparrow\uparrow \Rightarrow \sin\alpha\uparrow\uparrow$



min

y = min

$\sqrt{25-y^2}\geq\sqrt{25}=5$



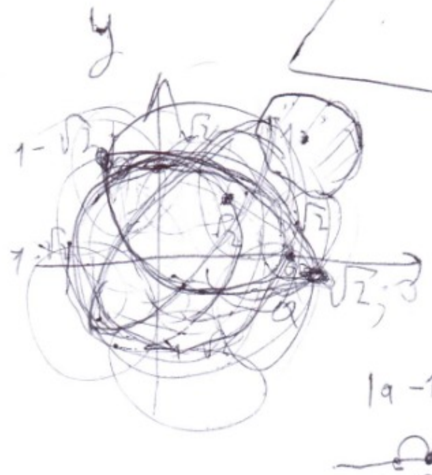
S→min

BC'→min

$BC'=BC\cos\beta$

$(a-1-\sqrt{2})(a-1+\sqrt{2})$

№3.



$(a-1)^2\geq2$

$x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2\leq2$

$x^2-2xa-2yb+y^2\leq2-(a^2+b^2)\geq0$

$-1\leq a\leq2$

$-1\leq b\leq2$

$|a-1|\leq2$

$(-1;3)$

−2 0 2 a−1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103350**

ID профиля: **368257**

Вариант 17

(1) Задача №5. Чистовик. Вариант 17

Пусть $a=\sqrt{5x-1}$, $b=4x+1$, $c=\frac{x}{2}+2$.

$\log_a b,\ \log_b c^2,\ \log_c a^2$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1\geq 0 \\ a>0 \\ b>0 \\ c>0 \\ a\neq 1,\ b\neq 1,\ c\neq 1 \\ c^2>0,\ a^2>0 \end{cases}$

т.е. $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ 5x-1\neq 1,\ 4x\neq 0, \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} x>0,2 \\ x>-0,25 \\ x>-4 \\ x\neq 0,4 \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \end{cases}$

т.е. $x\in(0,2;\ 0,4)\cup(0,4;+\infty)$.

Заметим, что $\log_a b\cdot\log_b c^2\cdot\log_c a^2=\frac{\log_b c^2}{\log_b a}\cdot\log_c a^2=$

$=4\log_a c\cdot\log_c a=4$. Пусть один из логарифмов равен t, тогда (из условия) один из других двух равен $t-1$, а третий тоже t.

Тогда $t\cdot t\cdot(t-1)=4$; $t^3-t^2-4=0$

Заметим, что $t=2$ является корнем ур-я: $8-4-4=0$

$$\begin{array}{r|l} t^3-t^2-4 & t-2 \\ -\ (t^3-2t^2) & t^2+t+2 \\ \hline t^2-4 & \\ -\ (t^2-2t) & \\ \hline 2t-4 & \\ -\ (2t-4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$t^3-t^2-4=(t-2)(t^2+t+2)=0$

$t^2+t+2=0$

$D=1-8=-7<0\Rightarrow$ действит. корней нет.

$\boxed{t=2}$, $\boxed{t-1=1}$

То есть один из логарифмов должен быть равен 1, а два других равны 2.

21103350 (U368257 M1295686)

(2)

Чистовик

Задача №5 (продолжение решения).

Возможны 3 случая:

1) $\log_a b = 1$, 2) $\log_b c^2 = 1$, 3) $\log_c a^2 = 1$

и $\log_b c^2 = \log_c a^2 = 2$, и $\log_a b = \log_c a^2 = 2$, и $\log_a b = \log_b c^2 = 2$.

1): $\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = 1 \Rightarrow 4x+1 = \sqrt{5x-1}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 4x+1>0 \text{ — верно из ОДЗ} \\ 5x-1 = 16x^2+8x+1 \end{cases}$

$16x^2+3x+2=0$

$D = 9-4\cdot2\cdot16 = 9-128 = -119$

действительных корней нет.

Такой случай невозможен.

2). $\log_b c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = b$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 4x+1$

$\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 = 4x+1$; $(x+4)^2 = 16x+4$; $x^2+8x+16 = 16x+4$

$x^2-8x+12=0$

$D = 64-48 = 16 = 4^2$

$x = \frac{8\pm4}{2}$ $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=2 \end{array}\right.$ ← подходят ОДЗ.

Проверим корни на два других условия:

$\log_a b = \log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = 2$; $\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{29}} 25 = 2 \Rightarrow 25 = 29 \text{ — неверно, } x=6 \text{ не подходит.} \\ \log_3 9 = 2 \Rightarrow 9 = 9 \text{ — верно, } x=2 \text{ подходит} \end{array}\right.$

$\log_c a^2 = 2$; $\log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1 = 2$; $\log_{\frac{2}{2}+2}(5\cdot2-1) = \log_3 9 = 2$; $9=9$ — верно,

$\boxed{x=2}$ подходит.

3). $\log_c a^2 = 1 \Rightarrow c = a^2$; $\frac{x}{2}+2 = 5x-1$; $x+4 = 10x-2$; $9x=6$; $x=\frac{2}{3}$

Проверим корень на два других условия:

по ОДЗ подходит

③ $\begin{cases} x=\frac{2}{3}: \\ \log_a b = 2 \\ \log_b c^2 = 2 \end{cases}$ Чистовик №5 (продолжение решения)

$\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ \log_{\sqrt{5x-1}} \frac{4x+1}{} = 2; \log_{\sqrt{\frac{7}{3}}} \left(\frac{8}{3}+1\right) = 2; \frac{11}{3} = \frac{7}{3} \text{ — неверно} \\ \log_{4x+1} (5x-1)^2 = 2; (5x-1)^2 = (4x+1)^2 \end{cases}$

$\left(\frac{10}{3}-1\right)^2 = \left(\frac{8}{3}+1\right)^2; \frac{7}{3} = \frac{11}{3}$ — неверно

$x = \frac{2}{3}$ не подходит.

Ответ: при $x=2$.

№4.

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 = 2^1 \cdot 3^1 \\ НОК(a;b;c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases} \Rightarrow$ в каждом из чисел a, b, c есть хотя бы по одному ~~множ~~ множителю $2^1 \cdot 3^1$

$\Downarrow$

a, b, c состоят только из степеней двойки и тройки.

1). Рассмотрим степени двойки: в Нод есть $2^1 \Rightarrow$ в каком-то числе (в его разложении) только одна двойка.

в НОК есть ~~x~~ $2^{15} \Rightarrow$ в разложении какого-то числа есть ровно 2^{15} (т.к. иначе НОК бы имел другое значение).

В оставшемся числе может быть в разложении такое 2^k ($k \in \mathbb{N}$), что $k \geq 1$ т.к. иначе в НОД не было бы 2^1 и $k \leq 15$ т.к. иначе бы НОК не делилось бы на это число т.к. $2^{15} \not\vdots\, 2^k$, где $k \geq 16$.

Таким образом в одном числе 2^1, в другом 2^{15}, а в третьем 2^k, где для k есть 15 вариантов от 1 до 15 включительно.

2) Аналогично рассмотрим степени тройки в разложении чисел a, b, c и НОК, НОД: раз в НОД 3^1, то какое-то число имеет в разложении 3^1 т.к. иначе бы или 3 вообще не было бы, или можно было бы взять 3 в большей степени.

21103350 (U368257 M1295686)

4)

Чистовик

№ 4 (продолжение).

в НОК есть 3^{16} $\Rightarrow$ в разложении одного из чисел есть 3^{16} (если бы было 3 в меньшей степени, то и для НОК можно было бы ~~бы~~ взять 3 в меньшей степени, а если бы было число с большей степенью тройки, то тогда бы НОК не делился бы на него, что есть противоречие).

Для оставшегося числа в разложении 3^m $(m \in \mathbb{N})$ m такое, что $m \geq 1$ т.к. в НОД есть 3^1 и $m \leq 16$ т.к. в НОК есть 3^{16}.

Таким образом, в одном числе 3^1, в другом 3^{16}, а в третьем 3^m, где для m есть 16 вариантов от 1 до 16 включительно.

~~Так как тройки упорядоченные, то всего~~

3) Распределим 2^7, 2^{15} и 2^k по a, b, c:

3.1) если $k \in [2; 14]$ (при $k \in \mathbb{N}$), то для этого есть $\underbrace{3!}_{\text{распределяем по 3 позициям}} \cdot \underbrace{(14-2+1)}_{\text{выбираем значение } k} = 6 \cdot 13 = 78$ способов

3.2) если $k = 7$, то для этого есть $C_3^2 \cdot 1 = 3$ способа

3.3) если $k = 15$, то есть $C_3^2 \cdot 1 = 3$ способа

Всего имеется $78 + 3 + 3 = 84$ способа распределить степени 2.

4). Аналогично можно распределить 3^1, 3^{16} и 3^m по 3 числа a, b, c:

4.1) если $m \in [2; 15]$ $(m \in \mathbb{N})$, то $\underbrace{3!}_{\text{выбираем тройки позиций } a, b, c} \underbrace{(15-2+1)}_{\text{выбираем значение } m \text{ из промежутка}} = 6 \cdot 14 = 84$ способа

4.2) если $k = 16$, то $C_3^2 \cdot 1 = 3$ способа

4.3) если $k = 1$, то $C_3^2 \cdot 1 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ способа

Всего имеется $84+3+3=90$ способов распределить степени 3 по a, b, c, чтобы $НОК(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$ и $НОД(a,b,c) = 2 \cdot 3^1$.

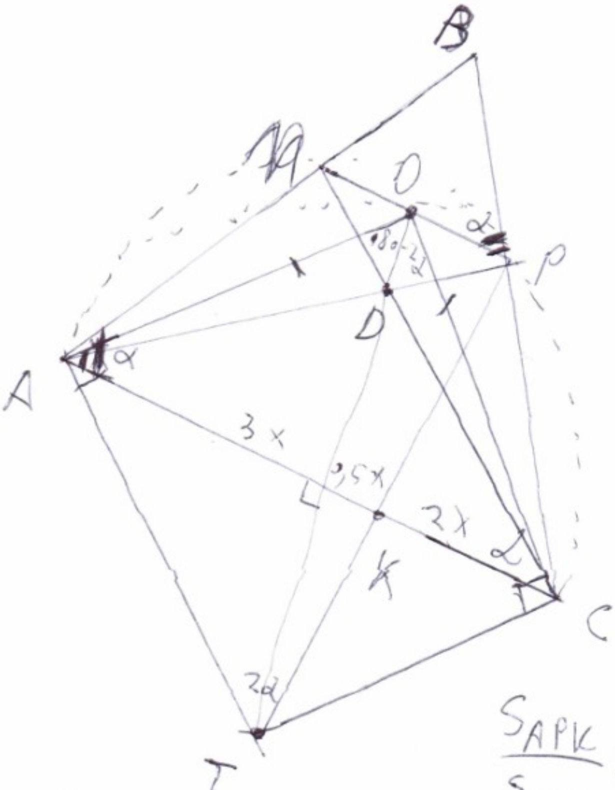
⑤ ~~[illegible]~~ Чистовик

№4 (продолжение решения).

~~[illegible]~~ Так как распределение степеней 2 и 3 не влияет на НОК и НОД, то для каждого из 84-х распределений степеней двоек имеется 90 распределений степеней троек. И всего таких троек будет $84 \cdot 90 = 7560$.

Ответ: таких троек существует 7560.

№6.



1) A, O, P, C лежат на одной окружности
⇓
AOPC вписанный
⇓
$\angle OAC + \angle OPC = 180^\circ$

$\angle OAC = \alpha$, тогда

$\angle BPO = 180^\circ - \angle OPC =$
$= 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$.

$M = PO \cap AB$.

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot h}{\frac{1}{2} KC \cdot h} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} AK = 3X \\ KC = 2X \end{matrix}}$

$\angle ATC = 180 - (90 - \alpha) - (90 - \alpha) = 2\alpha$

$\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ т.к. $AO = OC$ — радиусы ω.

$\frac{S_{KCP}}{S_{ABC}} = \frac{CK \cdot CP \cdot \frac{1}{2} \sin PKC}{AC \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \sin BCA} = \frac{CK \cdot CP}{AC \cdot BC} = \frac{2CP}{5BC}$.

По теор. о секущей и касательной $BM \cdot BA = BP \cdot BC$

$\angle B$ — общий $\Rightarrow \triangle MBP \sim \triangle ABC$, $k = \frac{MP}{AC} = \frac{X}{5X} = \frac{1}{5} = \frac{BP}{BC}$

21103350 (U368257 M1295686)

Чистовик

6)

$$\frac{CP}{BC} = \frac{BC-BP}{BC} = 1 - \frac{BP}{BC} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{S_{KCP}}{S_{ABC}} = \frac{2CP}{5BC} = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 5} = \frac{8}{25} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{25}{8} S_{KCP} = \frac{25}{8}\cdot 4 = 12{,}5$$

Ответ: а) $S_{ABC} = 12{,}5$.

$\angle ATC = 2\alpha \Rightarrow \angle ADC = 180 - 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. ABC - впис. угол, то $\angle ABC = \frac{180-2\alpha}{2} = 90 - \alpha$

$tg\, ABC = tg(90-\alpha) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\,\alpha = \frac{7}{5} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{5}{7}$

$$tg\,ATC = tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{5}{7}}{1-\frac{25}{49}} = \frac{10}{7\cdot\frac{24}{49}} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}$$

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \,|\, :\cos^2 2\alpha$

По т. синусов $\frac{AC}{\sin ATC} = 2R$;

$$\frac{1}{\cos^2 2\alpha} = 1 + tg^2 2\alpha = 1 + \left(\frac{35}{12}\right)^2$$

$$\cos^2 2\alpha = \frac{144}{144+35^2}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{12}{\sqrt{144+35^2}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin ATC = \sqrt{1 - \frac{144}{144+35^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{35^2}{144+35^2}} = \sqrt{\frac{35}{\sqrt{1369}}};$$

$$AC = 2R\sqrt{\frac{35}{\sqrt{1369}}}.$$

Черновик

№2.

$a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $c = \log_{x+2}(5x-1)$

$a = \sqrt{5x-1}$

$b = 4x+1$

$c = \frac{x}{2}+2$

$\log_a b; \log_b c^2, \log_c a^2$

$\log_a b \cdot \log_b c^2 \cdot \log_c a^2 = \frac{\log_b c^2}{\log_b a} \cdot \log_c a^2 = \frac{\log_a c^2}{\log_{a^2} c} = 4.$

$x, y, z = 4$

$x, z, z = 4$ $x = \frac{z-1}{2}$

$2x = z-1$

$z^2 - z = 8$

$z^2 - z - 8 = 0$

$D = 1 + 32 = 33$?

$\log_4 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 4} = \frac{1}{2}$

$\log_2 4 \cdot \log_4 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$x, x, x-1$

$x \cdot x(x-1) = 4$

$x^3 - x - 4 = 0$

$x^3 = x + 4$

$\log_a b = \log_b c^2$

$x, x, x-1.$

$x^2(x-1) = 4$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

$x = 2: 8 - 4 - 4 = 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4 & x-2 \\ x^3 - 2x^2 & x^2 + x + 2 \\ \hline x^2 - 4 & \\ x^2 - 2x & \\ \hline 2x - 4 & \\ 2x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\log_3 9 = 2$

$\log_9 9 = 1$ √

$\log_3 9 = 2$

$x^2 + x + 2 = 0$

$D = 1 - 8 < 0.$

$\frac{1}{3} + 2 = \frac{10}{3} - \frac{3}{3}$

$\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

$(4x+1)^2$

$16x^2 + 8x + 1 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1 = (4x+1)^2$

$-\frac{3}{32}$

$2 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^7 = 128$

$\boxed{x = 2^7}$

81

$2^4 \cdot 4 = 2^6 = 64$

$64 + 16 + 1 = 81$

$16 \cdot \frac{9}{16^2 \cdot 4} - \frac{9}{32} + 2$

$\frac{9}{64} - \frac{9}{32} + \frac{64}{32} > 0$

21103350 (U368257 M1295686)

Черновик

$2^a \cdot 3^b$

6, 16, 8

$2\cdot3;\ 2^4;\ 2^3$

НОД = 2

НОК = 48

$2\cdot3 \quad 2^3 \quad 2^3\cdot3$

6, 8, 24

НОД(6,8,24) = 2

НОК$(2\cdot3, 2^3, 2^3\cdot3) = 2^3\cdot3 = 24$

$a_{min} = 1$

$b_{min} = 1$

$a_{max} = 15$

$b_{max} = 16$

$a_\Sigma =$

$b_\Sigma =$

1	2	3
Б	С	М
Б	М	С
С	М	Б
С	Б	М
М	Б	С
М	С	Б

6

1) Все различны

2) ~~Все равны~~

2/3 различны (равны 2/3).

$a_1 b_1 \quad a_2 b_2 \quad a_3 b_3$

$\frac{1}{a_1} \quad \frac{}{a_2} \quad \frac{}{a_3} \quad \frac{}{b_1} \quad \frac{}{b_2} \quad \frac{}{b_3}$

$C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$

1, 1, 15

1, 1, 16.

123

321

213

min, max, 15

min, 15, max

max, 15, min

112

121

211

123

132

213

231

312

321

$13\cdot6 = 60+18 = 78$

7560 : 90 = 84

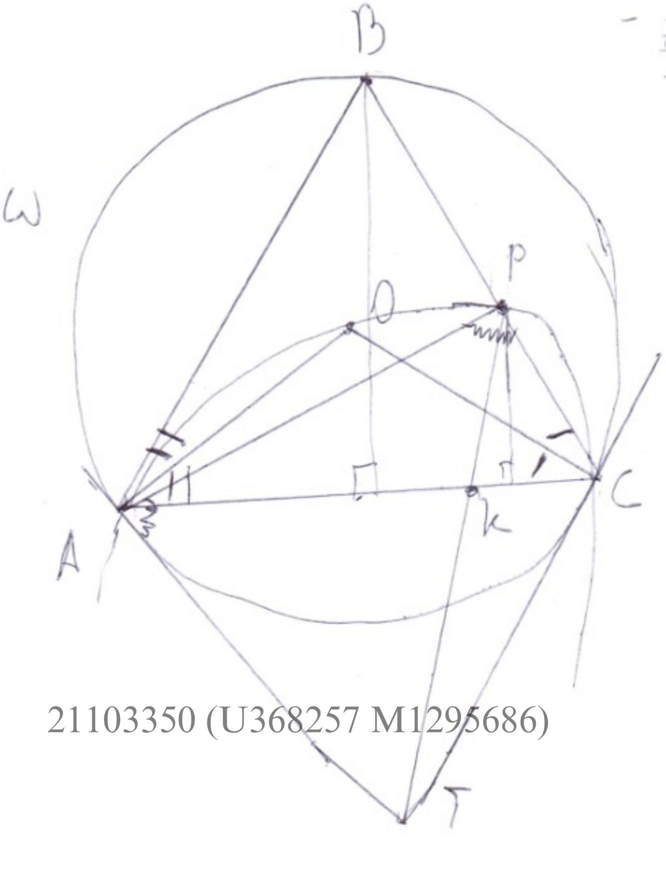
$84 \times 9 = 756$

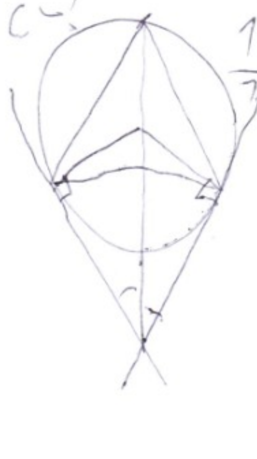
34 | 19

$S_{APK} = 6,\ S_{CPK} = 4$

$S_{ABC} - ?$

$35 \times 35 = 1225$





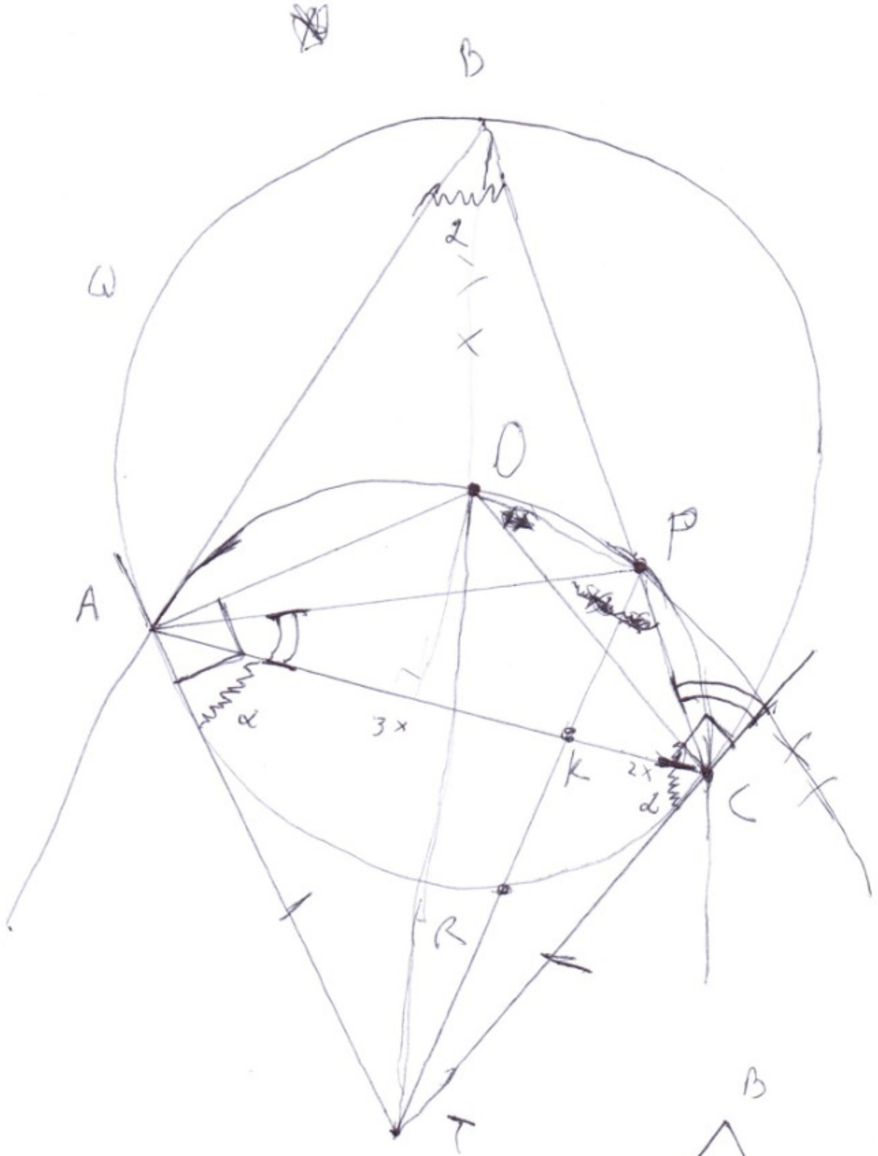
21103350 (U368257 M1295686)

Черновик

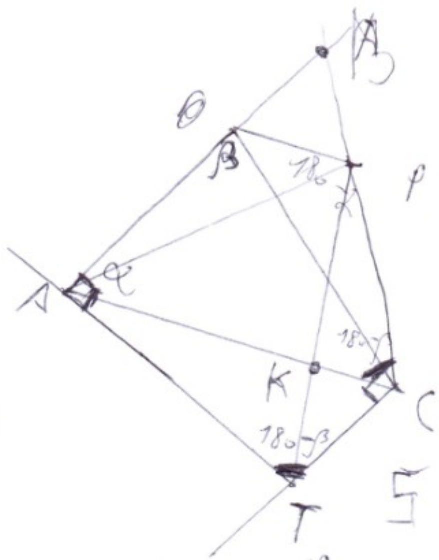
$S_{APC} = 10$

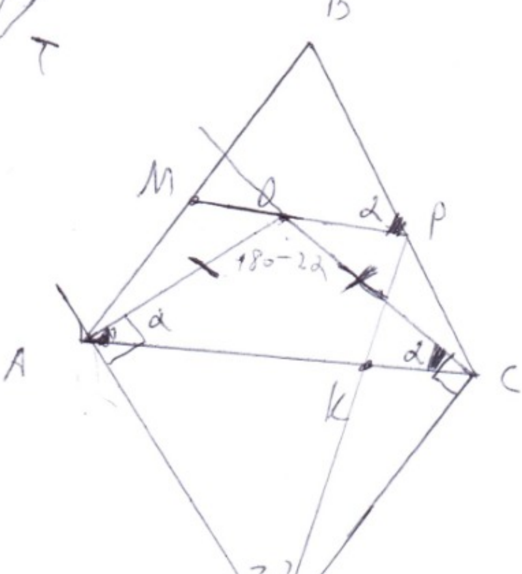
$S_{APK} = 6$, $S_{CPK} = 4$ $\Big\}$ $\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$

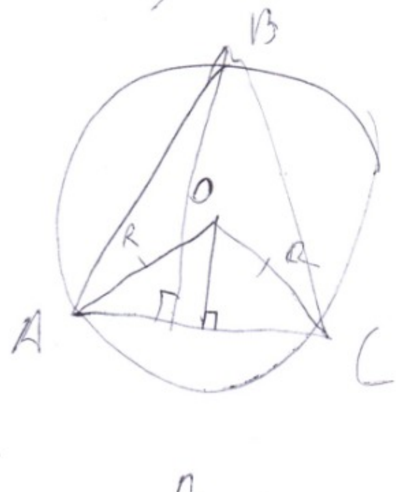
$S_{ABC} - ?$

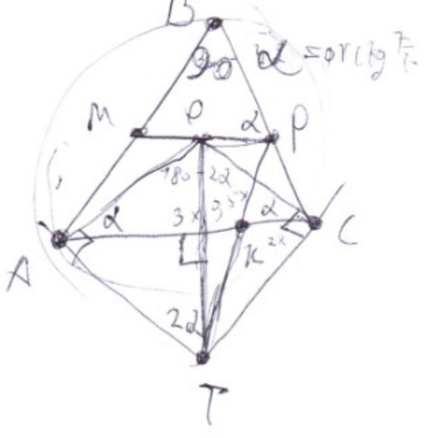


$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{CP}{CB}$









21103350 (U368257 M1295686)