Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

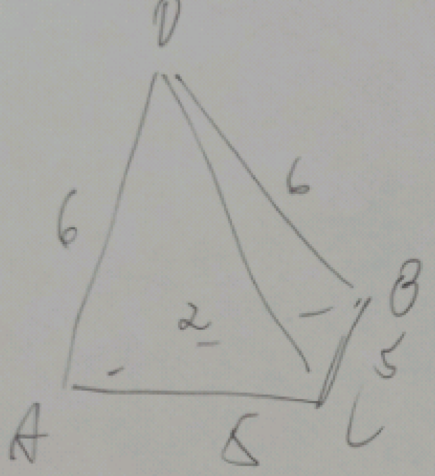
Шифр: **21103251**

ID профиля: **377482**

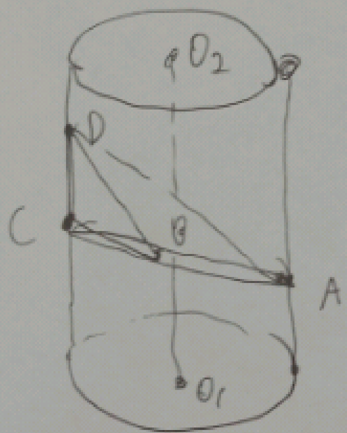
Вариант 17

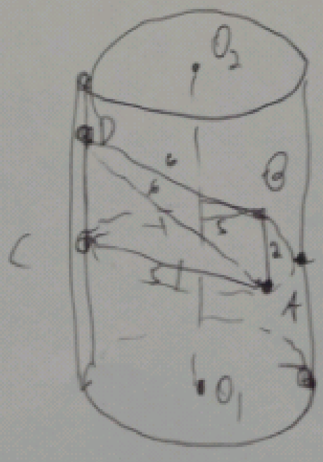
Чистовик
Черновик

Математика 11



Черновик

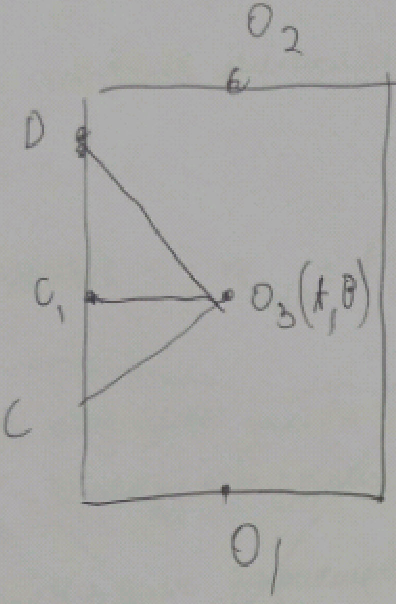


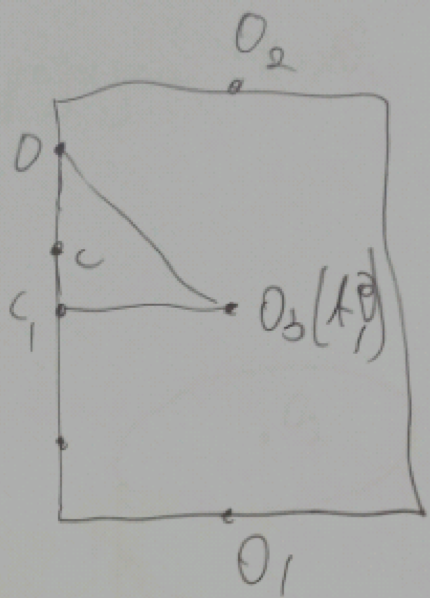


Лист 8

№2 (продолжение)

3) Возможно 2 случая:





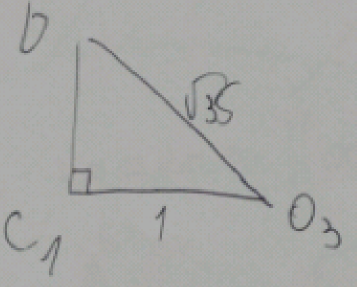
$CD = DC_1 + CC_1$

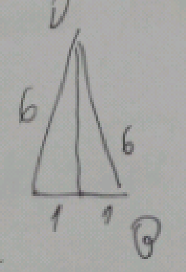
$CD = DC_1 - CC_1$

$DO_3 = \sqrt{DA^2 - AO_3^2}$

4) Аналогично 2): $DO_3 = \sqrt{36 - 1} = \sqrt{35}$

$DC_1 = \sqrt{DO_3^2 - C_1O_3^2} = \sqrt{35 - 1} = \sqrt{34}$





5) $\Rightarrow CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

$CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} - \sqrt{23}$ или $\sqrt{34} + \sqrt{23}$

№2 (продолжение)

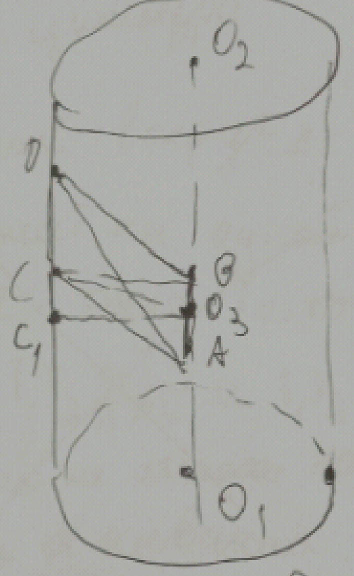
Т.к. FK – диаметр, AB – хорда $\Rightarrow FK \geq AB$.

Тогда из условия минимальности радиуса $FK = AB$.

$FK = 2, \Rightarrow r = 1$.

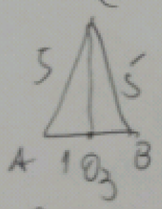
Минимальный r: $r_{min} = 1$.

~~Ранее было опущено док-во $AB \parallel (O_1O_1''O_1')$. Приведу его здесь: $CD \perp \alpha$. $CA = CB \Rightarrow$ если зафиксировать т. A, то $B \in$ сфере с центром в C, $R = CA$. $DA = DB \Rightarrow$ аналогично $B \in$ сфере с центром в C, $R = DA$. Эти сферы пересекаются по эллипсу. Этот эллипс~~

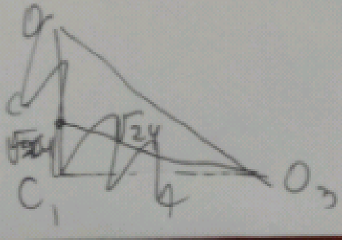


2) C_1O_3 = пр $\perp CO_3$ на β, где $C_1 \in \beta$

β – плоскость $\parallel$ основания, $AB \in \beta$ тогда $C_1O_3 \perp CD$ (т.к. $CD \perp O_1O_1''O_1'$, а $O_1O_1''O_1' \parallel \beta$)



$CO_3 = \sqrt{AC^2 - AO_3^2} = \sqrt{24}$.

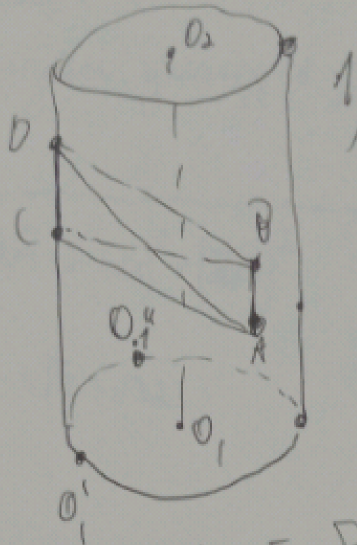


$CC_1^2 = \cancel{C_1O_3^2 + CC_1^2}\ CO_3^2 - C_1O_3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow CC_1 = \sqrt{24 - 1} = \sqrt{23}$

Чистовик Математика 11

№2

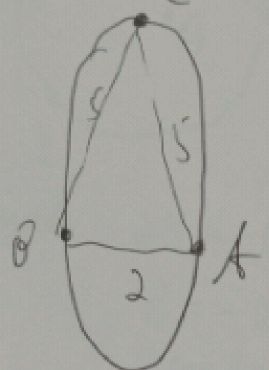


1) т.к. $DB = DA$, $CB = CA$ ⇒

⇒ A, B ∈ одному сечению конуса (находятся на одинаковой высоте от основания)

C, B, A — принадлежат бок. пов. цилиндра.

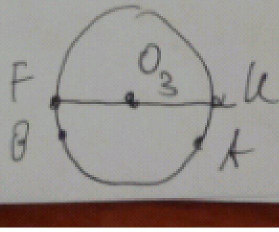
Тогда Рассмотрим эллипс, ~~описанный~~ вокруг $\triangle CBA$.



~~A, B лежат на одной высоте. Тогда все точки $T_1, T_2 : T_1T_2 \parallel AB$ и $T_1T_2 \ni ABC$ будут так же лежать на один.~~ расстоянии от основания.

Тогда $AB \parallel O_1O_1'O_1''$ (т.к. $\rho(A; O_1O_1'O_1'') = \rho(B; O_1O_1'O_1'')$ в силу равенства, указанного ранее.)

Тогда рассмотрим сечение, проходящее через AB и параллельное основанию.



FK — диаметр.

Лист 8

Чистовик Математика 11

№3 (продолжение)

Сначала найдем длину A_2O_2: $\sqrt{(x_{A_2}-x_{O_2})^2+(y_{A_2}-y_{O_2})^2}=l_{A_2O_2}$

$$l_{A_2O_2}=\sqrt{(2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4\cdot3+4\cdot3}=\sqrt{24}$$

$$d=2\sqrt{2}\cdot2=4\sqrt{2}=\sqrt{32}$$

По т. косинусов $24=16-2\cdot8\cdot\cos\alpha$

$8=-2\cdot8\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\alpha=120^\circ$. Тогда площадь сегмента =

$$=\pi R^2\cdot\frac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi}+S_{\triangle A_2O_2}=\frac{\pi\cdot8\cdot2}{3}+\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}{2}\cdot\sin120^\circ=$$

$$=\frac{16\pi}{3}+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{16\pi}{3}+2\sqrt{3}=S_{A_2O_2C_2}$$

$S_{A_2O_2C_1}=S_{A_2O_2C_2}$ (в силу симметрии).

Тогда $S_M=\frac{32\pi}{3}+4\sqrt{3}$

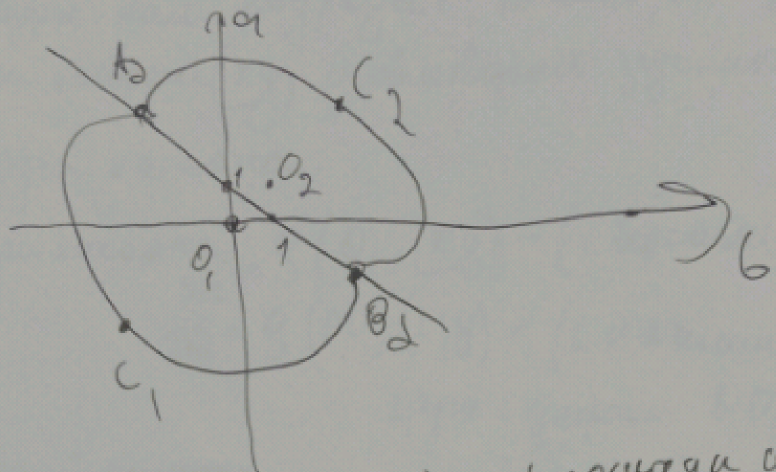
Ответ: $S_M=\frac{32\pi}{3}+4\sqrt{3}$

Чистовик

Математика 11

Пункт 4.

Площадь фигуры М — ~~площадь 2 кругов~~ -



$S(A_2C_1B_2) + S(A_2C_2B_2)$ — площади сегментов (больших)

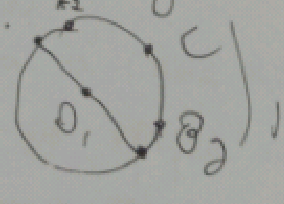
$S_M = \cancel{S_{O_1} + S_{O_2} - 2S}$ ~~(сегмен, где $S_{A_2B_2}$ - площадь сегмента (A_2B_2)~~

Замечание!

Важно подметить, что ~~окр~~ A_2B_2 — меньший сегмент.

~~Если бы он~~ Дело в том, что A_2B_2 может быть больше $A_2B_2C_1$ и $A_2B_2C_2$

Только если A_2B_2 лежат по одну сторону от диаметра, параллельного A_2B_2 (т.е.



), что очевидно не выполняется

Лист 6

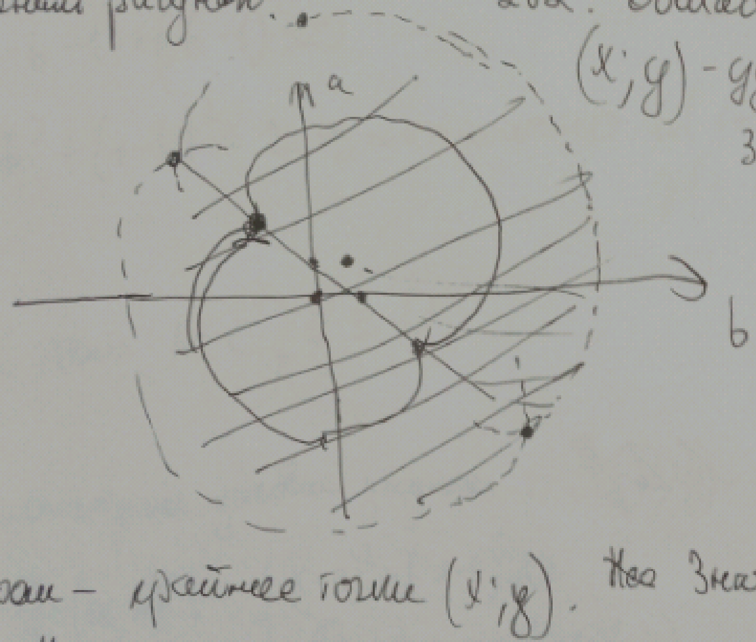
Чистовик — Математика 11

№3 (продолжение)

Справедливо заметить, что все окружности лежащие с центром внутри фигуры нам подходят. Логично, что крайний случай при котором $(x;y)$ удовлетворяет заданию — когда круги касаются.

Но т.к круги касаются $2\sqrt{2} = \rho(O_1;(x;y))$ — (с верхним кругом) $\Rightarrow$ это
$2\sqrt{2} = \rho(O_2;(x;y))$ — (с нижним кругом) $\Rightarrow$ круги с центрами в O_1 и O_2 и радиусами $2\sqrt{2}$. — область при которой $(x;y)$ — удов. условию задачи

Схематичный рисунок:



Пунктиром — крайние точки $(x;y)$. Это значит наша фигура M — то, что внутри пунктира и сам пунктир (заштрихован). Как уже было сказано это такие же круги с удвоенным радиусом. Тогда несложно догадаться, что их точки пересечения с прямой $a=1-b$ будут такими: $A_2(2+\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

$B_2(2-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

Лист 5.

Чистовик

Математика

11

№3 (продолжение)

Найдем точки пер. окр. O_1 и O_2 с прямой $a = 1 - b$

(I): $b^2 + (1-b)^2 = 2$

$1 - 2b + 2b^2 = 2$

$2b^2 - 2b - 1 = 0$

$D = 4 + 8 = 12$

$b_1 = \frac{2+\sqrt{12}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad b_2 = \frac{2-\sqrt{12}}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow A\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$B\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(II): $(1-b-1)^2 + (b-1)^2 = 2$

$b^2 + (1-b)^2 = 2 \Rightarrow$ аналогично $C\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$D\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

при этом $A \equiv C$, $B \equiv D$.

Пункт 3.

Теперь рассмотрим условие задачи: ~~$\exists (x,y)$~~

$(x;y): \exists\,(a,b)$: $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2 \\ a^2 + b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$

Получается нам нужно найти все круги с центром в т. (x,y), радиусом $\sqrt{2}$, такие, что у них есть хотя бы одна общая точка с фигурой из Пункта 2.

Лист 4

Чистовик

Математика 11

№3

Пункт 1.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-\cancel{x})^2+(b-y)^2 \le 2 \ (1)\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \ (2)\end{cases}$$

~~Пун~~

(1) – ~~окр~~ круг, с центром в т. $(x; y)$, радиусом $\sqrt{2}$

Пункт 2.

Рассмотрим второе выражение. $a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$.

Если $2a+2b<2$, $\to a+b<1$, $a<1-b$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$ $\to$ $a^2-2a+1-1+b^2-2b+1-1 \le 0$

Построим в осях ab.

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$ (II)

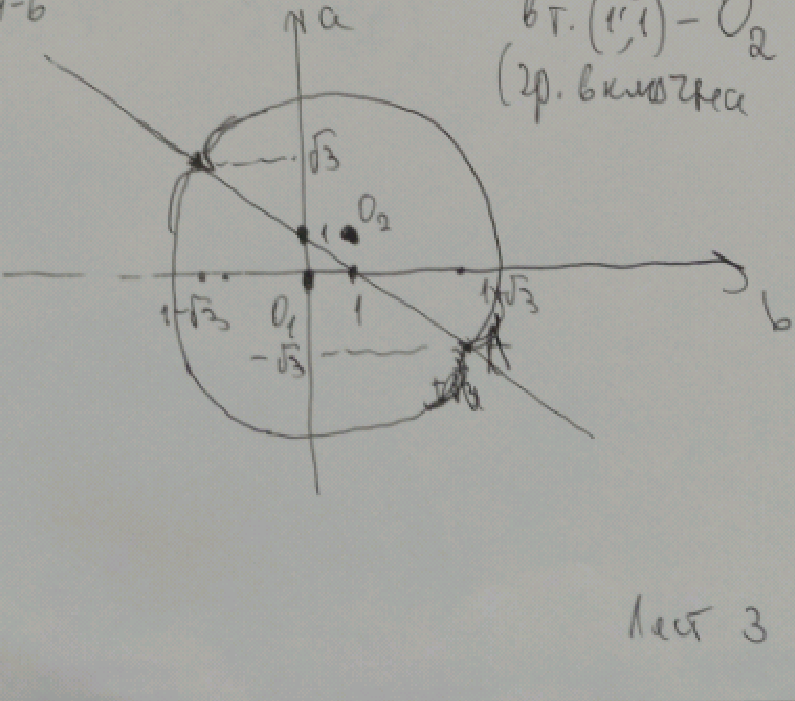
круг ~~окр~~ с центром в т. $(1;1)$ – O_2 (гр. включена

Если $2a+2b \ge 2$ $\to$ $a+b \ge 1$, $a \ge 1-b$

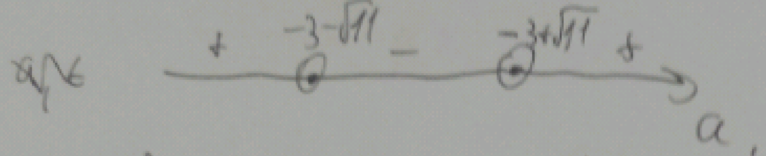
$a^2+b^2 \le 2$. (I)

круг ~~окр~~. с центром в т. $(0;0)$, радиусом $\sqrt{2}$ – O_1

(граница включена)



N1 (продолжение)



$\Rightarrow a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$, но так же знаем, что $a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Рассмотрим ближайшие к границам отрезка числа, лежащие в нем.

$-3-\sqrt{16} < -3-\sqrt{11} < -3-\sqrt{9}$

$-7 < -3-\sqrt{11} < -6 \rightarrow \boxed{-6}$

$-3+\sqrt{9} < -3+\sqrt{11} < -3+\sqrt{16}$

$\boxed{0} < -3+\sqrt{11} < +1$

Тогда все целые числа, принадлежащие данному отрезку: $(-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0)$.

Ответ: $a_1 \in (-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0)$.

Математика 11

Чистовик

Вариант 17

№ 1

$$S = \frac{2a_1 + d\cancel{(n-1)}^{\cdot 9}}{2} \cdot \cancel{9}\, 10$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > (2a_1+9d)5+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < (2a_1+9d)5 + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \quad (1) \\ a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1^2 - 16da_1 - 55d^2 < -10a_1 - 45d - 1 \\ a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases} \Big| \; (+) \rightarrow$$

$$\rightarrow 5d^2 < 16, \; d^2 < \frac{16}{5}, \; d < \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \left(\frac{16}{5} < \frac{16}{4} < 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{16}{5}} < 2\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow d = 1$ (т.к прогрессия состоит из целых чисел, и она возрастает).

Тогда подставим в первое (1) нер-во: $a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1$

$$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$$

$$(a_1+3)^2 > 0$$

Подставим во второе (2): $a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17$

$$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$$

$$D = 36 + 8 = \sqrt{44}$$

$$a_1 = \frac{-6+\sqrt{44}}{2} = -3+\sqrt{11} \qquad a_1 = \frac{-6-\sqrt{44}}{2} = -3-\sqrt{11}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103251**

ID профиля: **377482**

Вариант 17

Шестова Математика 11

№6 (продолжение)

$\angle BCH = \angle BAH$ опир. на одну дугу. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle \cancel{BAH} + \angle BAC = \angle \cancel{ACH} + \angle BCA$

$\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедр.

$\angle OCA = \angle OAC$ как углы в р-б. треуг.

$\angle BCA = \angle BAC$

$\angle BAO + \angle \cancel{OAC} = \angle \cancel{OCA} + \angle BCO \Rightarrow OP = FO$

$\angle OPT = \angle OFT = 90^{\circ}$

Тогда $\triangle OPT = \triangle OFT$ (по катету и гипотенузе)

$TP \parallel AB \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle P_x C}} = \left(\dfrac{\cancel{20}}{\cancel{10}}\right)^2 = \dfrac{100}{16} = \dfrac{50}{8} = \dfrac{25}{4}$

$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{4} = \dfrac{25}{4}$

$S_{\triangle ABC} = 25$

Лист 5

Ответ: 25

Чистовик Математика 11

№61 №5

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \rightarrow \log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \\ \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 1+\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \end{cases}$$

$$2\log_{5x-1}(4x+1) = 1+\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$$

$$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x+1 = \frac{x}{2}+2 = 1 \rightarrow \varnothing \\ \begin{cases} 5x-1 = 4x+1 \\ 4x+1 = \frac{x}{2}+2 \end{cases} \rightarrow \varnothing \end{array}\right.$$

$$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\left(\frac{x}{2}+2\right) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$\frac{\log_a ab}{2} = \log_x a$$

$$1 = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\log_{4x+1}(5x-1)$$

$$2\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\log_{4x+1}(5x-1)+\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$$

$$2\log_a b = \log_b c \log_b a + \log_c a$$

Лист 4

Чистовик

№6 (продолжение)

~~Тогда пусть $\angle ATC = \alpha$~~
~~Рассмотрим четырехугольник APCT. Он вписан ⇒~~
~~$\Rightarrow \angle ATC + \angle APC = 180^\circ$~~
~~т.о $\angle ATC = \alpha \Rightarrow \angle APC = 180^\circ - \alpha = AOC$.~~

Значит TD – диаметр, т.к $\angle OCT = 90^\circ$

$S_{APK} = 6$, $S_{CPK} = 4$ $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (одинаковая высота из т. P).

Пусть $\angle OCO_2 = \alpha$, тогда $\angle O_2CT = 90^\circ - \alpha$

$\angle AOC = 180^\circ - 2\alpha$ (AO = OC равнобедр)

a OT – биссектриса угла AOC т.к

$\triangle AOT = \triangle OCT$. $\Rightarrow \angle COO_2 = 90^\circ - \alpha$.

Тогда $\angle OO_2C = 90^\circ$.

$OT \perp AC \Rightarrow$ ~~$\triangle AOC$ равнобедренный~~, $AO = OC$

$\Rightarrow O_2C = O_2A$

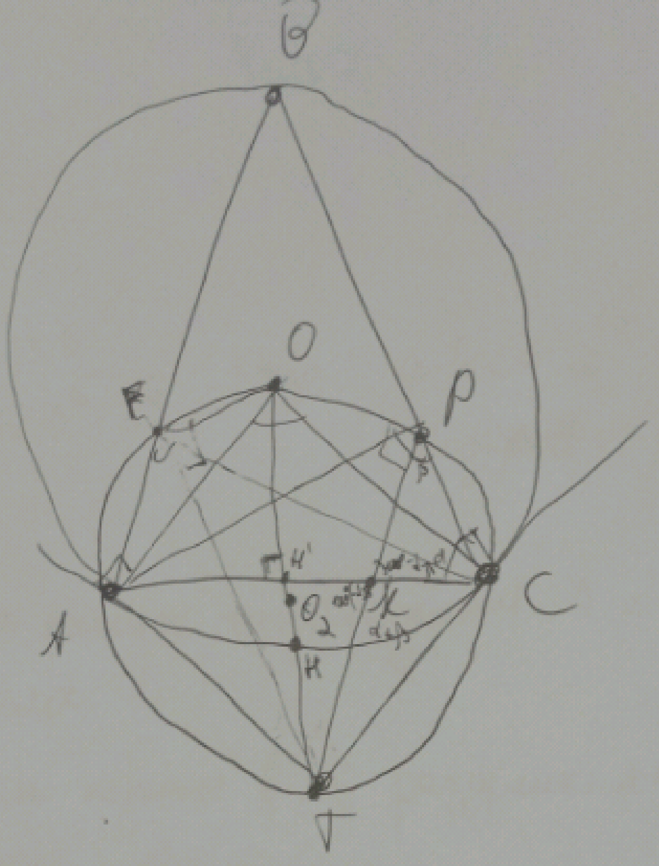
HH' – общий $\Rightarrow \triangle AO_2H = \triangle CO_2H$.

$\angle$ ~~OAH~~ $ACH = \angle CAH$. (из р-ва треуг.)

Чистовик

Математика 11

№6



а) AT - касат, CT - кас $\Rightarrow OC \perp CT$, $OA \perp AT$.

Тогда в чет. уг $AOCT$ $\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow$ они ~~леж~~ лежат на одной окружности.

$AOCT$ - вписан
$AOC \in \omega_2$
$O, C \in$ окружн.

$\Rightarrow$ ~~ОД~~ $AOCT$ вписан в $\omega_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow T$ лежит на окруж. ω_2

Лист 2

Математика
11

Чистовик
Вариант 17
Часть 2

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$ Тогда $a\cdot b\cdot c = 2^{16}\cdot 3^{17}$

(НОД · НОК = ab)

Нод = 6 ⇒ каждое число содержит 2 и 3 в качестве делителя.

т.е. нам нужно ~~выбр~~ разделить 2-ки на 3 группы и 3-ки на две группы.

т.е. нам нужно выбрать 2 разделителя на 15 мест и на 16 мест: (тоесть $C_{15}^2 \cdot C_{16}^2$

$\underbrace{2\,2\,2}\,|\,\underbrace{2\,2\,2\,2\,2\,2}\,|\,\underbrace{2\,2\,2\,2\,2\,2\,2}$

$\underbrace{3\,3\,3}\,|\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,|\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3$

Тогда всего случаев: $C_{15}^2 \cdot C_{16}^2 = \frac{15!}{13!\cdot 2!}\cdot\frac{16!}{14!\cdot 2!} = \frac{16\cdot 15\cdot 15\cdot 14}{4} = 225\cdot 4\cdot 14 = 900\cdot 14 =$

$\begin{array}{r} 900 \\ \times 14 \\ \hline 126 \end{array}$

$= 12600$

Ответ: 12600 троек возможно.

Лист 1

~~№5~~ ~~Чистовик~~ ~~Математика~~ 11

Пусть $\sqrt{5x-1} = a > 0 \Rightarrow \log_c a^2 = 2\log_c a$ (1)

$(4x+1) = b$

рассмотрим сумму

$\frac{x}{2}+2 = c$, т.к. $x > \frac{1}{5}$ из $\Rightarrow \frac{x}{2}+1 = c > 0 \Rightarrow \log_b c^2 = 2\log_b c$

$\log_a b + \log_b c^2 + \log_c a^2 =$

$= \log_a b + 2\log_b c + 2\log_c a$

З системы получаем:

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

log

~~Получим з уравнения:~~

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) + \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 + \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) =$

Черновая

~~№1~~ 2

Черновик

№5 Обозначим $\sqrt{5x-1}=a$, $4x+1=b$, $\frac{x}{2}+2=c$, $\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{matrix}$ (т.к. $x \geq \frac{1}{5}$ (из ОДЗ корня))

3 случая:

1) $\begin{cases} \log_a b = \log_b c^2 \\ \log_a b = 1 + \log_c a^2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_a b = \log_c a^2 \\ \log_a b = 1 + \log_b c^2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \log_c a^2 = \log_b c^2 \\ \log_c a^2 = \log_a b + 1 \end{cases}$

$$\log_a b + \log_b c^2 + \log_c a^2 =$$

$$= \log_a b + 2\log_b c + 2\log_c a$$

$$\log_a b + \frac{2}{\log_c b} + 2\log_c a$$

$$\frac{2 + \log_a b \log_c b + 2\log_c a \log_c b}{\log_c b} =$$

$$= \frac{2 + \frac{\log_c^2 b}{\log_c a} + 2\log_c a \log_c b}{\log_c b} =$$

$$\frac{2}{\log_c b} + \frac{\log_c b}{\log_c a} + 2\log_c a$$

Черновик:

$\log_a b + 2\log_b c + 2\log_c a$

$\frac{1}{\log_b a} + 2\log_b c + 2\log_c a =$

$= 2 + 2\log_b c$

$\log_a b + 2\frac{\log_a c}{\log_a b} + 2\frac{\log_a a}{\log_a c}$

$2\left(\frac{1}{\log_c b} + \log_c a\right) = 2\left(\frac{1 + \log_c a \cdot \log_c b}{\log_c b}\right) =$

$= 2\left(\frac{1}{\log_c b} + \log_b a\right)$

$\log_c a = \log_b a$

$c = b$

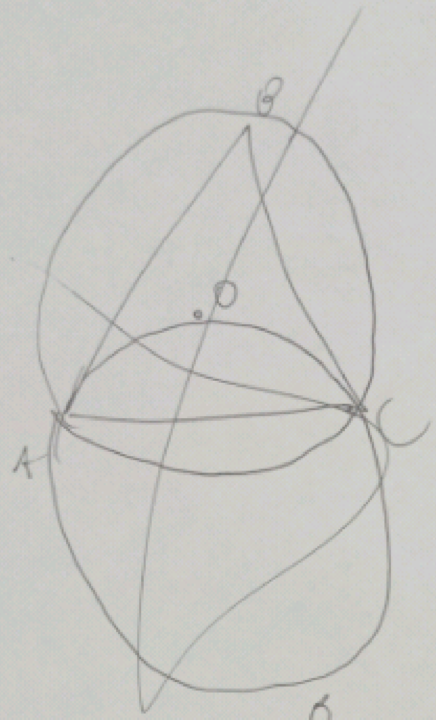
$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 1 + \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \end{cases}$

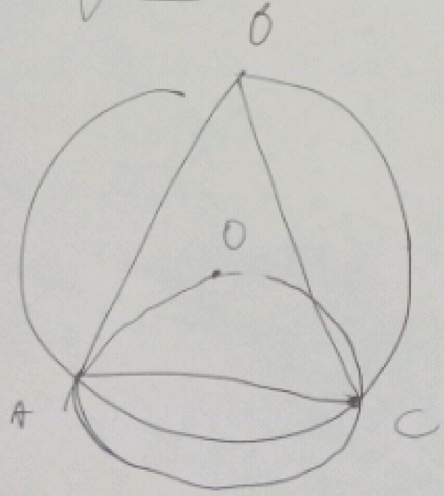
$\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{5x-1}}\right) = \log_{\frac{x}{2}+2}$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\left(\frac{x}{2}+2\right)$

Черн

N6





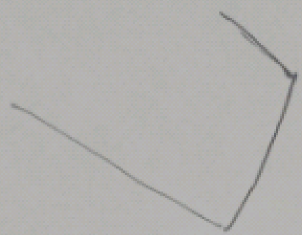
$x \cdot 2r = y$

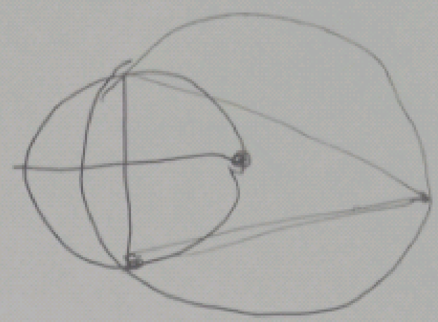
$y^2 + z^2 = (y+z)^2$

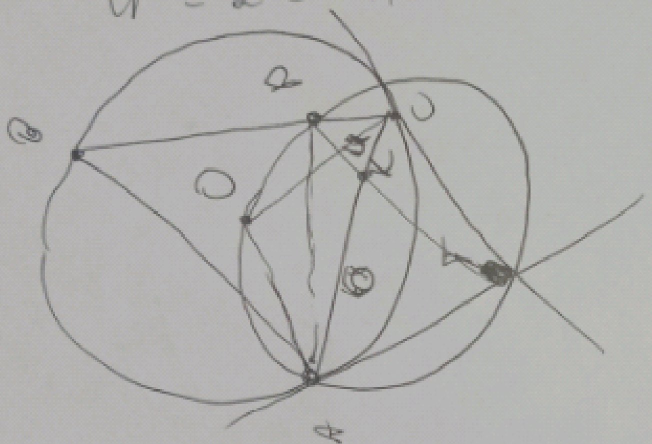
$y^2 + z^2 = x^2 + y + z^2$

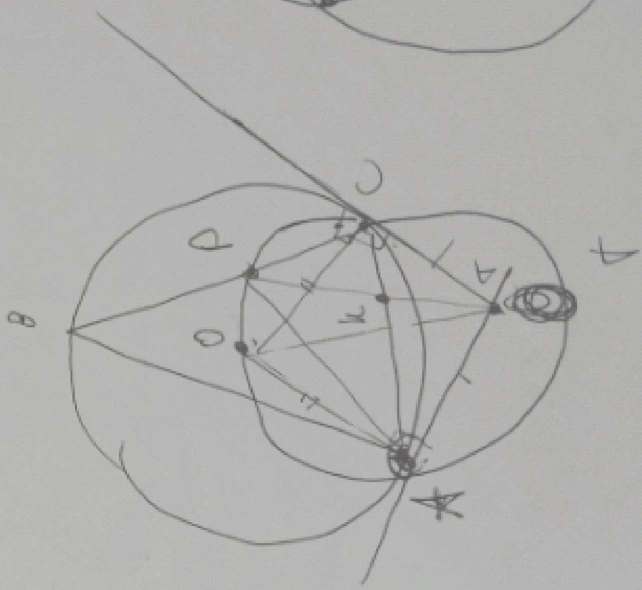
$CT^2 = TH \cdot d$

$CT^2 = 2r \cdot TH$









$180^\circ - 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha$

$90 - \alpha$