Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103242**

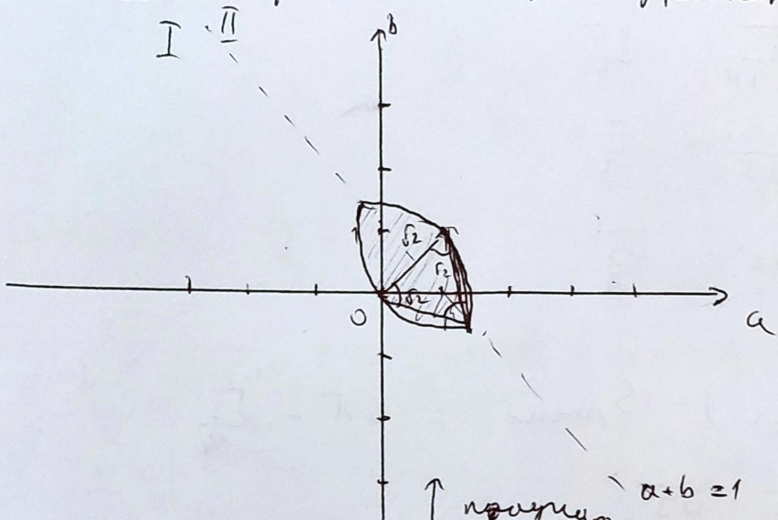
ID профиля: **168785**

Вариант 17

Чистовик.

№3

Рассмотрим второе уравнение системы



$a^2+b^2 \le \min(2a+2b;\ 2)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b \\ 2a+2b < 2 \end{cases} \quad \text{I} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ 2a+2b \ge 2 \end{cases} \quad \text{II} \end{array}\right.$$

$a+b \ge 1$

$x^2+y^2=R^2$ - окружность

$x^2+y^2 \le R^2$ - круг с радиусом $|R|$

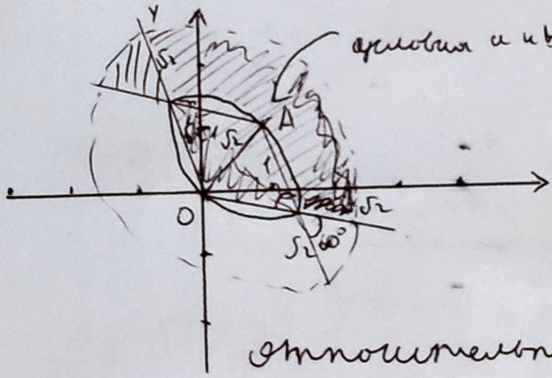
пересечение части сегментов кругов

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$

Круги с центрами в $(a;b)$ радиусом $\sqrt{2}$



условия a и b - часть ~~плоск~~ для наших точки рисуем круг

$\Downarrow$

получается, что относительно предыдущих центров секторов радиус получается $2\sqrt{2}$, а угол тот же, и еще часть сектора тогда мы два раза посчитаем внутренний ромб.

Чистовик

Продолжение № 3

$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ $\alpha = 60^\circ \Rightarrow 2\alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

$S_{\text{сектор}_1} = \frac{\pi (2\sqrt{2})^2}{} \cdot \frac{2\pi}{3 \cdot 2\pi} = \frac{8\pi}{3}$

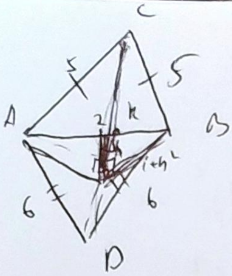
$S_{\text{сектор}_2} = \pi (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

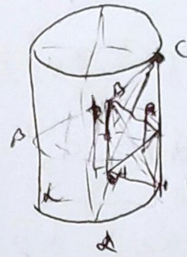
$S_{\text{ромб}} = 2 \cdot \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$S_M = 2 (S_{\text{сектор}_1} + S_{\text{сектор}_2}) - S_{\text{ромб}} = 6\pi - \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

Ответ: $6\pi - \sqrt{3}$

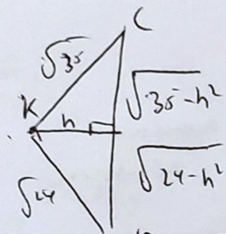
чистовик №2





~~сечение~~

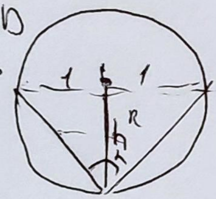
Сечение α



по теореме Пифагора $\sqrt{25-1}=\sqrt{24}$

$\sqrt{36-1}=\sqrt{35}$

Сечение β



$R_{min}=1$

$\Updownarrow$

$\alpha=90^\circ$ — опирается на диаметр

$h=1$

$c=\sqrt{35-h^2}+\sqrt{24-h^2}$

$\cancel{c_{max}}\ c=\sqrt{34}+\sqrt{23}$

$c=\sqrt{25-1-h^2}+\sqrt{35-1-h^2}=\sqrt{24-h^2}+\sqrt{34-h^2}$

~~$h\in(0;1]$~~

вырожденный тетраэдр?

↑ ~~иначе ...~~

$h\in(0;\sqrt{24})$ ↙ крайний случай

$c\in(\sqrt{11};\ \sqrt{35}+\sqrt{24})$

Ответ: ↑

Чистовик

№1

$$a_6 a_{12} = (a_9 - 3d)\cdot(a_9 + 3d) = a_9^2 - 9d^2$$

$$a_7 a_{11} = (a_9 - 2d)\cdot(a_9 + 2d) = a_9^2 - 4d^2$$

$$S = a_9 - 8d + a_9 - 7d \ldots a_9 + a_9 + d =$$

$$= 10a_9 - 35d$$

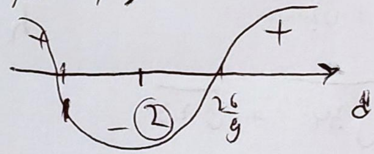
$$\begin{cases} a_9^2 - 10a_9 + 35 - 5d^2 - 1 > 0 \\ a_9^2 - 10a_9 + 35 - 9d^2 - 17 \cancel{<} 0 \end{cases}$$

дополним до полного квадрата

$$\begin{cases} (a_9 - 5)^2 - (9d - 26)\cdot(d-1) > 0 \\ (a_9 - 1)\cdot(a_9 - 9) - (9d - 26)\cdot(d-1) \cancel{<} 0 \end{cases}$$

$$(9d - 26)(d-1) \geq 0$$

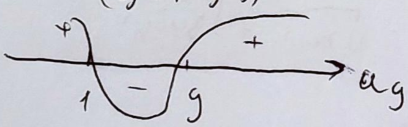
Метод интервалов



$(a_9 - 5)^2 \geq 0$ при ~~$a_9 \neq$~~ всех a_9

~~для всех~~

$(a_9 - 1)(a_9 - 9) \geq 0$



$(a_9 - 5)^2 > (9d - 26)\cdot(d - 1)$

$d \in \{1; 2\}$

~~$a_9 \in a_9$~~ $d = 1$ при $a_9 \in \mathbb{Z} \setminus \{5\}$

$d = 2$

$a_9 \in \mathbb{Z}$

a_1

объединяя

~~$a_9 - 1$~~

~~$a_9 \in \mathbb{Z}$~~

$d \in \{1; 2\}$

~~$a_9 \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$~~

$a_9 \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$ для $d \in \{1; 2\}$

для $a_9 = 1$ и $a_9 = 9$ $d = 1$ не подходит

~~$9 - 16$~~ $= x$

$1 - \cancel{32} = -15$

~~$a_9 \in \mathbb{Z}$~~ $\{$

~~$a_1 \in \mathbb{Z}$ исключая $[-15; -7]$~~

~~$a_9 \in \mathbb{Z}$ исключая~~

$a_1 \in \mathbb{Z}$ исключая $[$

чистовик

Продолжение №1

целые d и a

$$\begin{cases} a_9 \in (1;9), & d \in (-\infty;1] \cup (3;+\infty) \\ a_9 \in \mathbb{Z} \setminus \{5\}, & d \in \{1;2\} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_9 \in [2;5) \cup (5;8]$$

так есть $d=1$ ~~и $a \in (1;5$~~

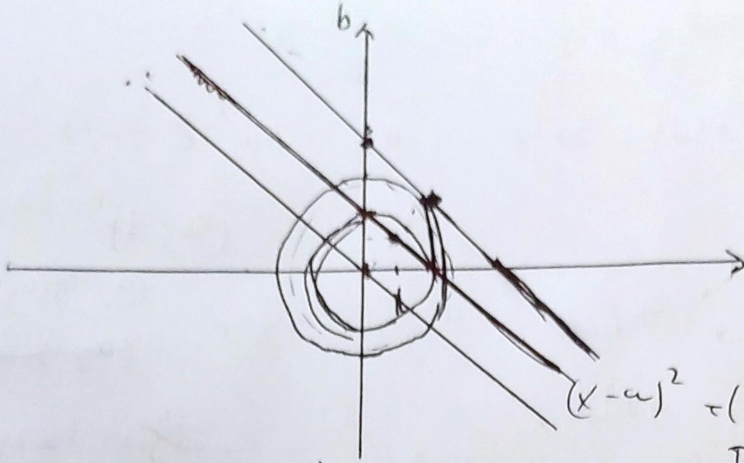
$$a_1 \in (-7;-3) \cup (-3;1)$$

Ответ: $a_1 \in \{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$

8

Черновик

№2



$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$

↑
круг

$2a+2b>0$

a^2+b^2 $2a+2b$ ~~2a+b~~

$a^2+b^2 \le 2$ $2a+2b=2$

$a+b=1$

$2\sqrt{2}$

$a^2+b^2 \le 2$

$2a^2+b^2 < 2$

$\sqrt{2}$

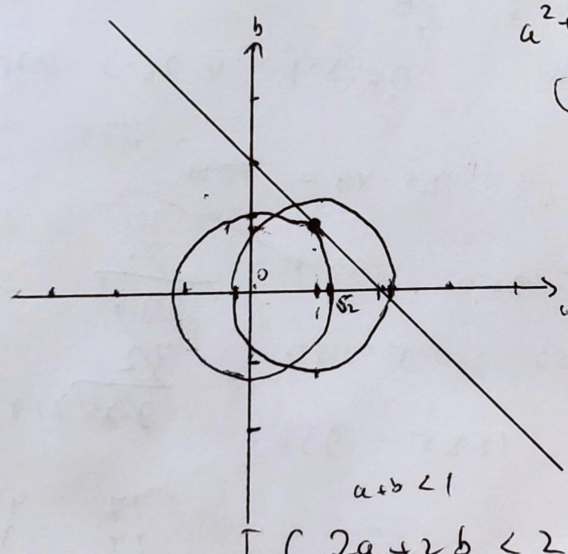
$a^2+b^2+2a+2b+2$

$(a+1)^2+(b+1)^2$ $a^2+b^2<$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

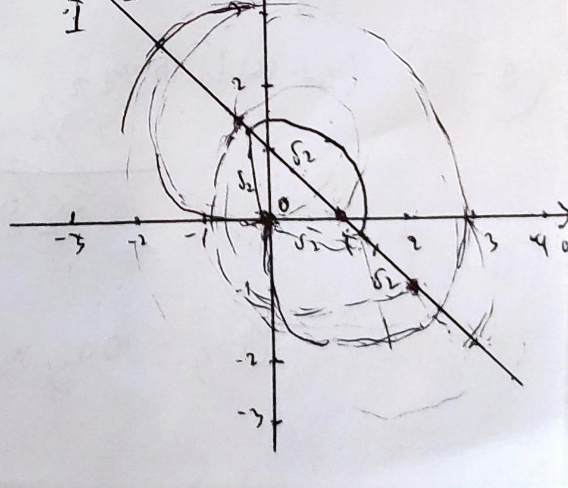
$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

$2a+2b<2$



$a+b<1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a+2b<2\\(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2\end{cases}\\ \begin{cases}2a+2b \ge 2\\a^2+b^2 \le 2\end{cases}\end{array}\right.$$



Черновик

№1

$(a_9-3d)\cdot(a_9+3d) > 5+1$ $\qquad a_9^2-9d^2>5+1$

$(a_9-2d)\cdot(a_9+2d) < 5+17$ $\qquad a_9^2-4d^2<5+17$

$\cancel{(a_9-5)}^2 \quad (a_9-5)^2<(9d-26)(d-1)$

$(a_9-9)(a_9-1)>(9d-26)(d-1)$

$\cancel{(a_9-9)(a_9}$

$S = \cancel{a_9+d}$

$a_9-8d+a_9-7d\ldots \qquad a_9+a_9+d=$

$9d^2$

$=10a_9-35d$

$25 \quad -9d^2+35d+26$

верно

$(a_9-5)^2<(9d^2-35d+42)$

$(a_9-5)^2>(9d-26)\cdot(d-1)$

$a_9^2-10a_9+35d-9d^2-1>0$

$(a_9-5)^2-(9d^2+35d+42)<0$

$a_9^2-10a_9+35d-9d^2-17<0$

$(9d-26)(d-1)+16$

$(a_9-5)^2+(\cancel{d-17})^2$

$(d-$

$\cancel{D=100-16}=225$

$D=(35)^2-4\cdot26\cdot9=975-936=$

$975 \quad =39$

$(a-5)^2+9\cdot\left(d-\frac{26}{9}\right)\cdot(d-1)$

$25\cdot49-\cancel{1025}$

$\cancel{(9d-26)(d-1)}$

$250\cdot5=1250 \qquad \cancel{25\cdot50=25}=$

36, 26, 216, 72, 936, 17+25=42

$\frac{35+17}{2\cdot9}=26$

$25\cdot50=250\cdot5=1250$

$\frac{35-17}{2\cdot9}=18$

$1225-936=$

$=$

$(a-5)^2-(9d-26)\cdot(d-1)>0$

1225, 936, 289

17 · 17 = 119, 17, 289

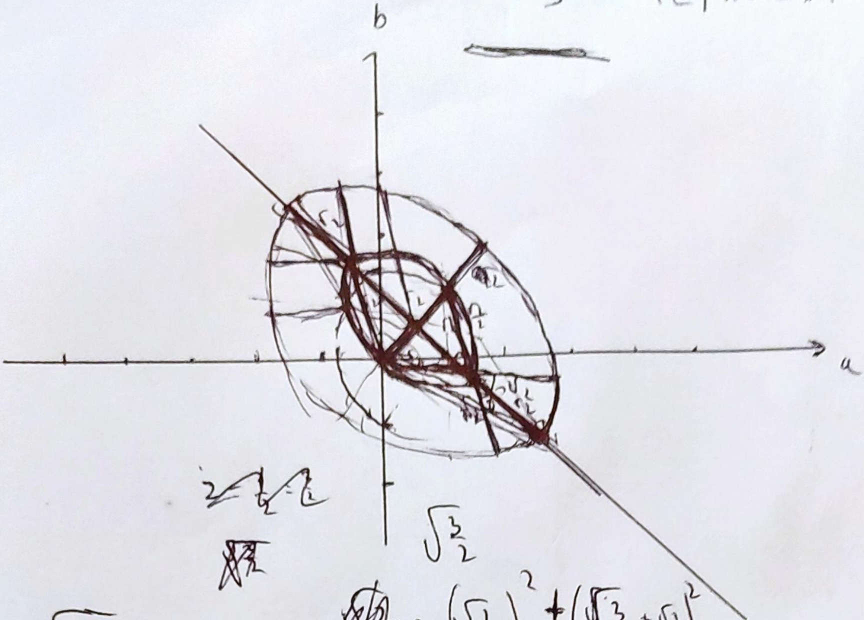
42 · 36 = 252, 126, 1512

$(a-5)^2$

$D=1225-4\cdot42\cdot9=$

$a_9-10a_9+9 \qquad 36$

№3 ЧЕРНОВИК



$2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{3}{2}}$

$R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\right)^2$

$\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$R^2 \quad \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{2}$

$= \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 2}$

$\cos\alpha = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

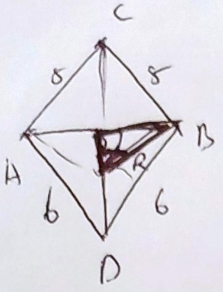
$\alpha = 60^\circ \quad 120^\circ$

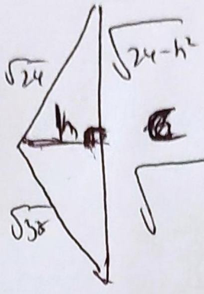
$$2\left(\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} \cdot \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2\right) + \left(\frac{\pi}{2\pi \cdot 3} \cdot \pi\left(\sqrt{2}\right)^2\right)\right) =$$

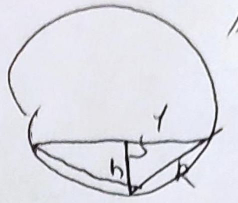
$$= 2\left(\frac{8\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{6\pi}$$

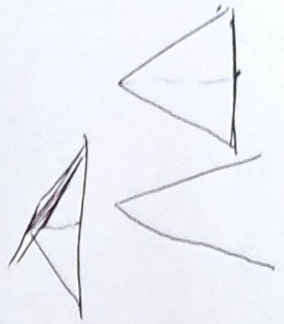
Черновик

№2









$R \sin\alpha = 1$

$R \cos\alpha = h$

$\sqrt{24-h^2} + \sqrt{35-h^2}$

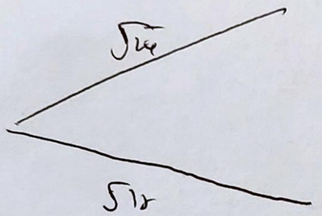
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{h}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cancel{\operatorname{tg}\alpha =}$

$\frac{1+h^2}{h^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cancel{\operatorname{tg}\alpha =}$



$\sqrt{24} + \sqrt{35} > \sqrt{24-h^2} + \sqrt{35-h^2}$

$\frac{h}{\sqrt{1+h^2}} = \cos\alpha$

$\sqrt{24} + \sqrt{24-h^2} + \sqrt{35-h^2} > \sqrt{35}$

$R = \sqrt{1+h^2}$

$\cancel{24 + 24 - h^2 + 2\sqrt{24}\sqrt{24-h^2} > 35 + 35 - h^2 + 2\sqrt{35}\sqrt{35-h^2}}$

$C \geq 2\sqrt{}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

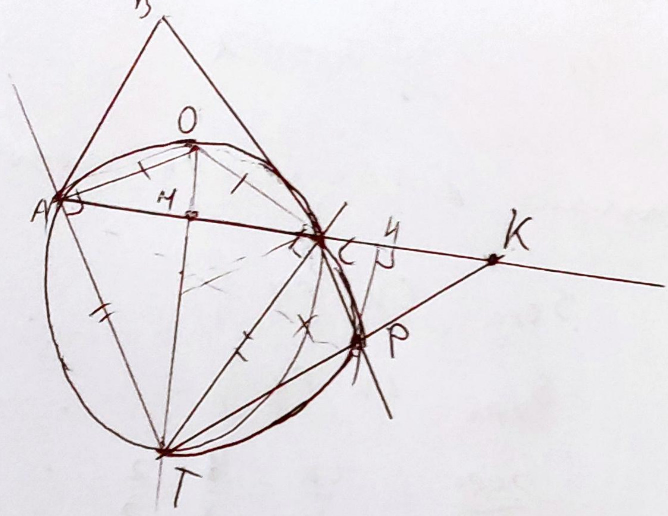
Шифр: **21103242**

ID профиля: **168785**

Вариант 17

Чистовик

№6



так как $OA = OC$ и OT общая сторона то по стороне и гипотенузе в прямоугольном Δ $AT = TC$, т.к. $\angle OCT = 90^\circ$ - касательная, то OT - диаметр окр.

] $\angle ABC = \alpha$

$\Downarrow$

$\angle AOC = 2\alpha$ - центральный на ту же дугу

$\Downarrow$

$\angle ATC = 180^\circ - 2\alpha$ по Σ $\angle$ в четырёх. вписанном

$\Downarrow$

$\angle ACT = \alpha$ - в р/б Δ

$\angle BCA = \angle PCK$ - вертикальные углы

$\angle APC = 180^\circ - 2\alpha$ - опирается на дугу AOC (на ту же, что и AOC)

$\angle APT = \angle ACT = \alpha$ - опир. на те дуги

ЧИСТОВИК

Продолжение №3

$\angle CPK = 180° - (180° - 2\alpha) - \alpha = \alpha$

$\Downarrow$

по трём углам $\triangle ABC$ и $\triangle CPK$ подобны

$\Downarrow$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2$

$S_{CPK} = CK \cdot PH \cdot \frac{1}{2}$

$S_{APK} = AK \cdot PH \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{CK}{AK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\frac{CK}{AK} = \frac{2}{1}$

$S_{ABC} = S_{CPK} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

$S_{ACT} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \cancel{PM}$

$\frac{S_{ATK}}{S_{CPK}} = \frac{\cancel{CK \cdot PK}\ AK \cdot KT}{\cancel{KT} \cdot PK} = x^2$

$CK \cdot AK = KP \cdot KT$ – секущие в окр

$\frac{AK}{PK} = \frac{KT}{CK} = x$ $\quad KT = x \cdot CK$, $AK = x \cdot PK$

$\frac{S_{CKT}}{S_{APK}} = \frac{AK \cdot KT}{AK \cdot PK} = \frac{CK^2}{PK^2} = \frac{4}{4}$

~~$S_{ACT} =$~~ $\frac{\cancel{CK}}{PK}$ $\quad \frac{S_{APK}}{S_{AK}} = \frac{PK \cdot CK}{PK \cdot AK} = \cancel{PK}$

Ответ: $S_{ABC} = 1$

чистовик

№4

$$НОД(a,b,c) = 2^{\min(x,y,z)} \cdot 3^{\min(k,l,m)} \qquad a = 2^x \cdot 3^k$$

$$НОК(a,b,c) = 2^{\max(x,y,z)} \cdot 3^{\max(k,l,m)} \qquad b = 2^y \cdot 3^l \qquad c = 2^z \cdot 3^m$$

$\Downarrow$

$\min(x,y,z) = 1 = \min(k,l,m)$

$\max(x,y,z) = 15 \quad \max(k,l,m) = 16$

$\Downarrow$

можно рассмотреть, что в каждом числе есть по одной 2 и 3

$\Downarrow$

нужно, ~~чтобы~~ было одно число, у которого есть еще 2^{14} и еще одно, у которого 2^{15}

$\Downarrow$

$2: \underline{14} \quad \underline{k} \quad \underline{1} \qquad k \in [1;14]$

$3: 15 \quad \underline{g} \quad \underline{1} \qquad g \in [1;15]$

$\Downarrow$

~~вариантов~~ $2: 6 \cdot 14$ ← вариантов k

↑ выбор наибольшего и наименьшего числа

~~(a → max~~

$3: 6 \cdot 15$ аналогично

$\Downarrow$

всего $6 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 14 = 7560$

Ответ: 7560

Чистовик № 5

$t_1 = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$t_2 = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$t_3 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$t_1+t_2+t_3 = 3t-1$

пусть какие-то два числа

$t_1 t_2 t_3 = 4$

$t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3 = 2(t-1)\cdot t + t^2 = 3t^2-2t$

по св-ву логарифма

$\frac{4}{t_1}+\frac{4}{t_2}+\frac{4}{t_3} = 3t^2-2t$

ОДЗ

$5x-1 \neq 1$ $\quad 5x-1>0$

$x \neq \frac{2}{5}$ $\quad x > \frac{1}{5}$

остальные меньше ограничивают

будем рассматривать варианты, когда $\log_a b$, где $a=b$

если $x=2$, то $t_1 = 2\log_9 9 = 2$ $\quad t_3 = \log_3 9 = 2$

$t_2 = \log_{9} 9 = 1$ подходит

t_1

$5x-1 = 4x+1$

$x = 2$

t_2

$4x+1 = \frac{x}{2}+2$

$3{,}5x = 1$ $\quad x = \frac{2}{7}$ $\quad t_1 = 2\log_{\frac{3}{7}}\frac{15}{7}$ $\quad t_2 = 1$

$t_3 = \log_{\frac{15}{7}}\frac{3}{7}$

не подходит

$t_1 t_3 = 2$ $\quad$ т.к. не один не равен

t_3

$\frac{x}{2}+2 = 5x-1$ $\quad t_1 = 2\log_{\frac{7}{3}}\frac{11}{3}$ $\quad t_2 = 2\log_{\frac{11}{3}}\frac{7}{3}$ $\quad t_3 = 1$

$4{,}5x = 3$

$x = \frac{2}{3}$ $\quad t_1 t_2 = 4$

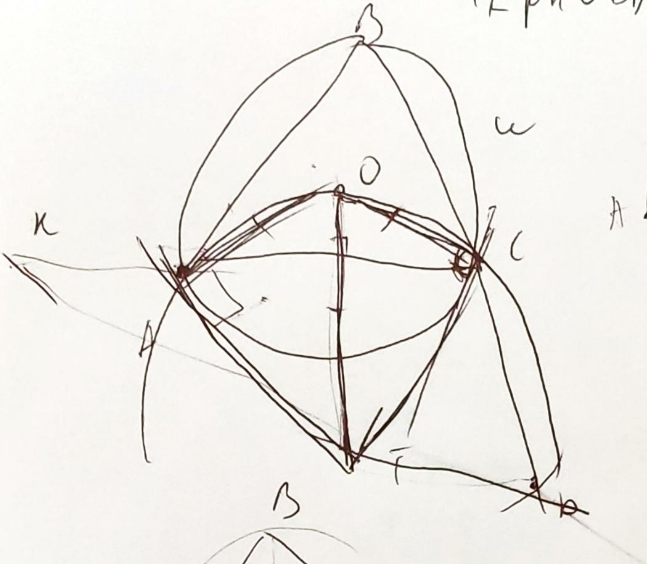
и не один не равен

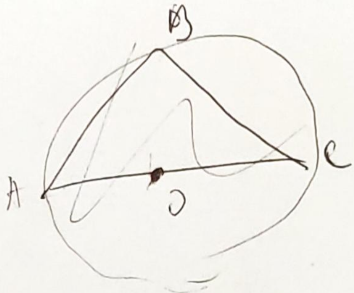
другие варианты не подходят, так как невозможно именно рассматривать эти логарифмы

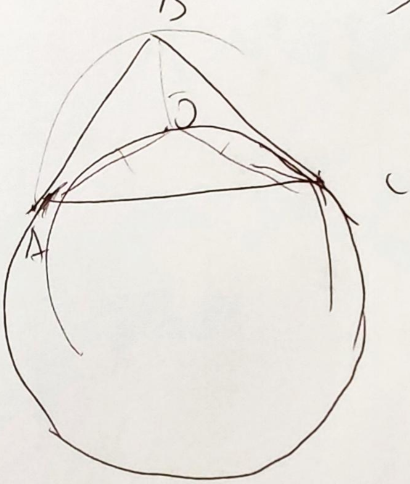
Ответ: $x = 2$

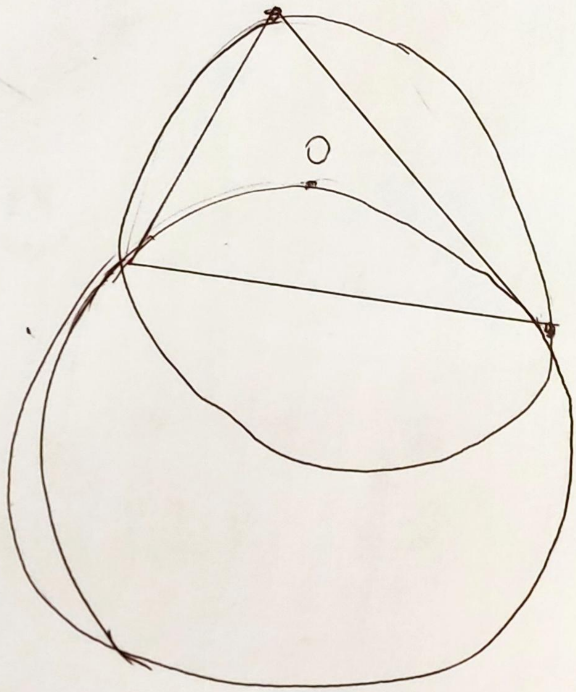
4

Черновик



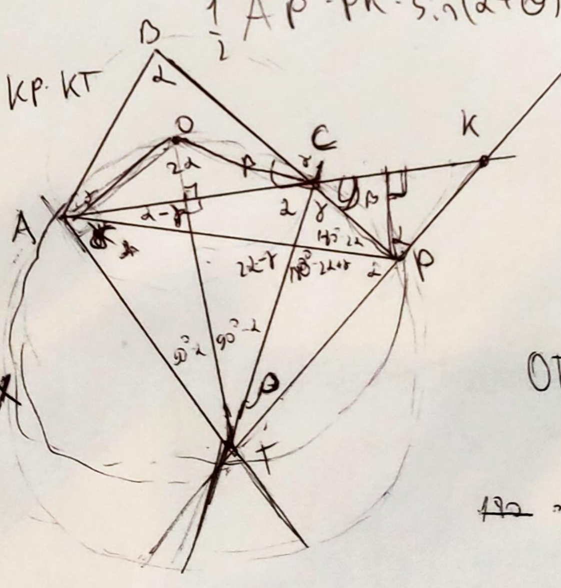






$\frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin(\alpha+\Theta) = 6$ $\quad \frac{1}{2} CP \cdot PK \cdot \sin\alpha = 4$

$\frac{1}{2} CP \cdot AP \sin\Theta = 2$



$AK \cdot CK = KP \cdot KT$

$\frac{AK}{\cancel{CK}} = \frac{KT}{2}$

KT

$\frac{KT}{CK} = \frac{AK}{PK} = x$

$\frac{CK \cdot PK}{AK \cdot KT} = x^2$

$\frac{AK}{CK} = \frac{3}{2}$ ~~AK~~

$\frac{AK}{CK} = \frac{1}{2}$

$OT = 2R$ из-под ...

$OPT =$ ~~Δ~~

~~192~~ 3

$\frac{AKPK}{CK \cdot KT} =$

Черновик

№4

~~$a = x$~~ ~~$a = 2^x \cdot 3^y$~~

a b c

~~$b = 2$~~

x k

y l

z m

$\frac{78}{6}$ 90

$\frac{78 \cdot 9}{6160}$

$\frac{84}{6}$

НОД $\min(x,y,z) + \min(k,l,m)$

$\max(x,y,z) + \min(k,l,m)$

~~x y z~~

$2^1 \cdot 3^1$

$2^{15} \cdot 3^{16}$

36

$\frac{15 \cdot 4}{60}$

$\frac{36 \cdot 21}{36}$

$\frac{72}{756}$ 210

$\frac{15}{210}$

210

36

21

3 3 14 15

$\underbrace{\quad}$

~~14, 14, 14~~ 14 1 1 14 1 15 1

14 14 1

~~a b c b a c~~

14 ~~14 a b c~~

3 $3 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 15 =$

$= 6^2 \cdot 14 \cdot 15$

№5

$x > \frac{1}{5}$ $x > -\frac{1}{4}$

$5x - 1 > 0$ $4x + 1 > 0$ $x > -4$

$\frac{x}{2} + 2 > 0$

$\frac{x}{2} + 2 \neq 1$

$x \neq -2$

$5x - 1 \neq 1$

$x \neq \frac{2}{5}$

$4x + 1 \neq 1$

$x \neq 0$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) =$

$= 2 \cdot 2 \log_{5x-1}(4x+1) \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 4$

~~$t_1 = t_2 = t_4 - 1 \; i \; t_1 - 1$~~

$t_1 + t_2^i + t_3 = 5t - 1$

x y z

черновик

$t_1 = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ какие-то 2 равны t, третье $t-1$

$t_2 = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $t_1+t_2+t_3=3t-1$

$t_3 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$ $t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3=3t^2-2t$

$t_1t_2t_3=4$

$p^3 -$

$t_1t_2 = 4\log_{5x-1}\left(\cancel{\frac{x}{2}+2}\right)$

$t_2t_3 = 2\log_{\cancel{4x+1}}\cancel{(4x+1)}(5x-1)$

$t_1t_3 = 2\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)$

$\frac{4}{t_3}+\frac{2}{\frac{t_1}{2}}+\frac{2}{\frac{t_2}{2}}=3t^2-2t$

$t_1+t_2+t_3=3t-1$

$\frac{4}{t_3}+\frac{4}{t_1}+\frac{4}{t_2}=3t^2-2t$

$4=\frac{1}{\cancel{t_1t_2t_3}}$

$:1 \; 2$

$1 \quad 2\cdot 2$

$4x+1=\frac{x}{2}+2$

~~$5x-1=4x+1$~~

~~$x=2$~~