Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103138**

ID профиля: **323446**

Вариант 17

Чистовик

Задача 1.

$S = \frac{2a_1+9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$ $\qquad$ d – разность прогрессии

$a_6 = a_1 + 5d \quad a_{12} = a_1 + 11d$

$a_7 = a_1 + 6d \quad a_{11} = a_1 + 10d$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > S+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \quad ① \\ a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \quad ② \end{cases}$$

Вычтем из меньшего ② большее ① и из большего ② меньшее ①:

$5d^2 < 16 \Rightarrow d \in (-\frac{4}{\sqrt5}; \frac{4}{\sqrt5})$, т.к. прогрессия возрастающая то $d>0$, а т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то и d – целое число:

$\frac{4}{\sqrt5} < \frac{4}{\sqrt4} = 2 \Rightarrow$ нам подходит только $d=1$:

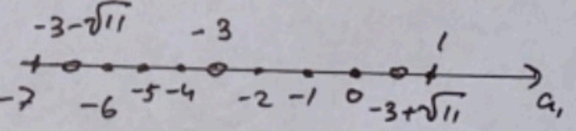
$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases}$$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 = 0$

$\frac{D}{4} = 9 + 2 = 11$

$a_{1_1} = -3 + \sqrt{11}$

$a_{1_2} = -3 - \sqrt{11}$



$a_1 = -6, -5, -4, -2, -1, 0$, проверка есть в черновиках

Ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

1

Задача 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \text{ - окр. с центром в точке } (a,b) \text{ и радиусом } \sqrt{2} & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2) & (2) \end{cases}$$

1\. $2 < 2a+2b$:

$$\begin{cases} 1-a < b \\ a^2+b^2 \le 2 \text{ - окр с центром в } (0;0) \text{ и радиусом } \sqrt{2} \end{cases}$$

2\. $2 > 2a+2b$

$$\begin{cases} 1-a > b \\ a^2+b^2 \le 2a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a > b \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \text{ - окр с центром в } (1;1) \text{ и радиусом } \sqrt{2} \end{cases}$$

$2a+2b=2$:

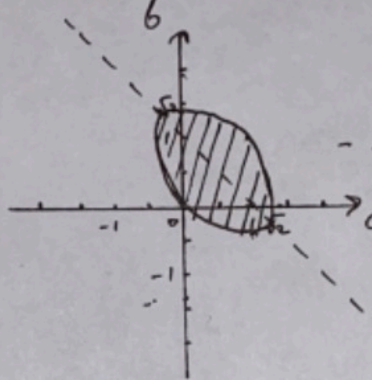
3\. $$\begin{cases} 2a+2b=2 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ (1-b)^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 2b^2-2b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} b=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ a=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ &\begin{cases} b=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ a=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{aligned} \right.$$

$2b^2-2b-1=0$

$\frac{D}{4}=3$

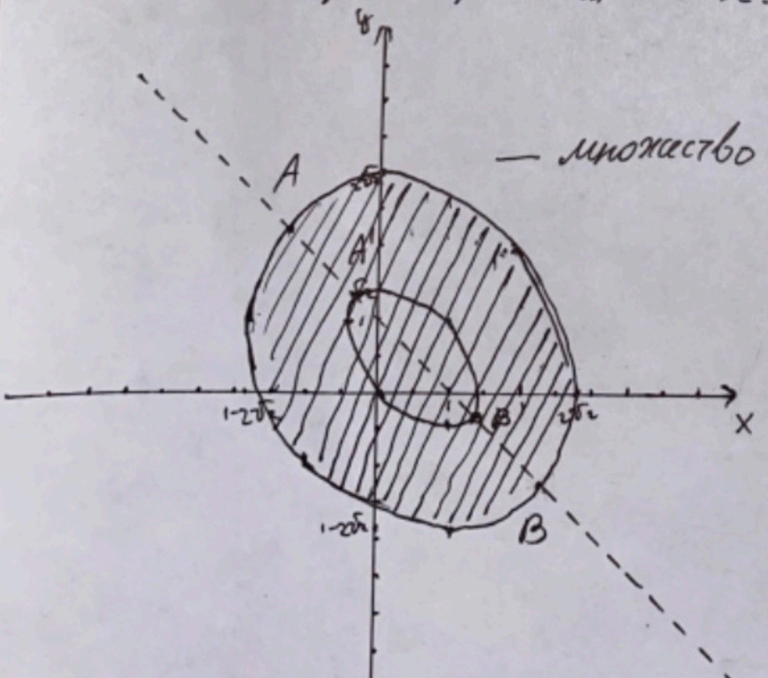
$b_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$b_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$



– множество точек a и b удовлетворяющих второму неравенству, поскольку центры окружностей первого неравенства смещены на a и b, то это множество точек также является множеством центров окружностей радиусом $\sqrt{2}$.

Тогда построить множество M можно просто отступив из каждой точки в каждом направлении на $\sqrt{2}$:



– множество M

$A'B'_x = A'B'_y = b_1-b_2 = \cancel{a_1-a_2} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A'B' = \sqrt{6}$

$AB = A'B' + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(2+\sqrt{3})$

Не успел дописать

②

21103138 (U323446 M1298443)

Черновик

$a_6 = a_1 + 5d$ $\qquad S = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > S+1$

$(a_1+6d)(a_1+10d) < S+17$

$a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \Leftrightarrow 10a_1 + 45d + 17 > a_1^2 + 16da_1 + 60d^2$ +

~~$17 > 5d^2$~~

$\cancel{a_1^2} + \cancel{10a_1} + \cancel{16da_1} + \cancel{45d} + 55d^2 + 17 > a_1^2 + 16da_1 + 10a_1 + 45d + 60d^2 + 1$

$16 > 5d^2 \Rightarrow d \in (-\frac{4}{\sqrt5}; \frac{4}{\sqrt5})$, т.к. прогрессия возрастающая

$5d^2 < 16$

$-\frac{4}{\sqrt5} < d < \frac{4}{\sqrt5}$

то $d > 0 \Rightarrow d \in (0; \frac{4}{\sqrt5})$,

т.к. прогрессия состоит из целых чисел то d - целое число $\Rightarrow$

Нам подходит $d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 = 0$

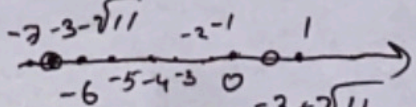
$\frac{D}{4} = 9 + 2 = 11$

$a_1 = -3 + \sqrt{11}$

$a_{12} = -3 - \sqrt{11}$

$a_1 \in$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases}$$



$a_1 = -6$ $\qquad a_1 = -6, -5, -4, \cancel{-3}, -2, -1, 0$

$a_6 = -1 \quad a_{12} = 5$ $\qquad -5 \quad S = -5 \qquad 25 + 80 + 55$

$S = -60 + 45 = -15$

21103138 (U323446 M1298443)

3.
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \text{ - окружность с центром в точке } (a,b) \text{ и радиусом } \sqrt{2} \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$

$$\frac{a+b}{2} \ge \frac{a^2+b^2}{4}$$

$$a^2+b^2<2$$

$$2a+2b<2$$
$$a+b<1$$
$$a<1-b$$

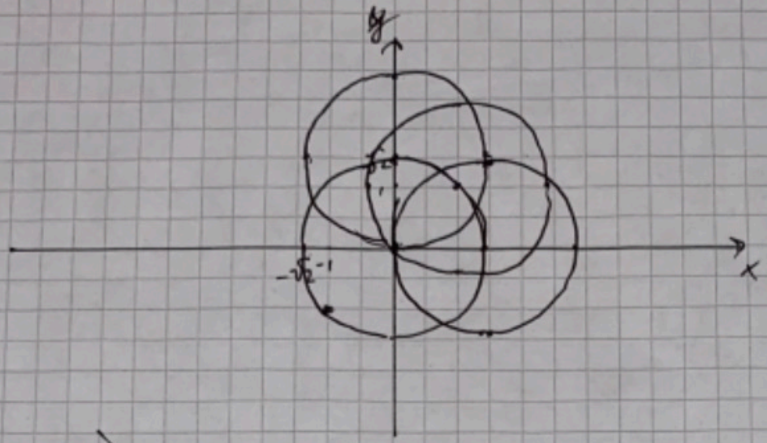
$$a^2+b^2 \le 2a+2b$$
$$a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 2$$
$$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$$

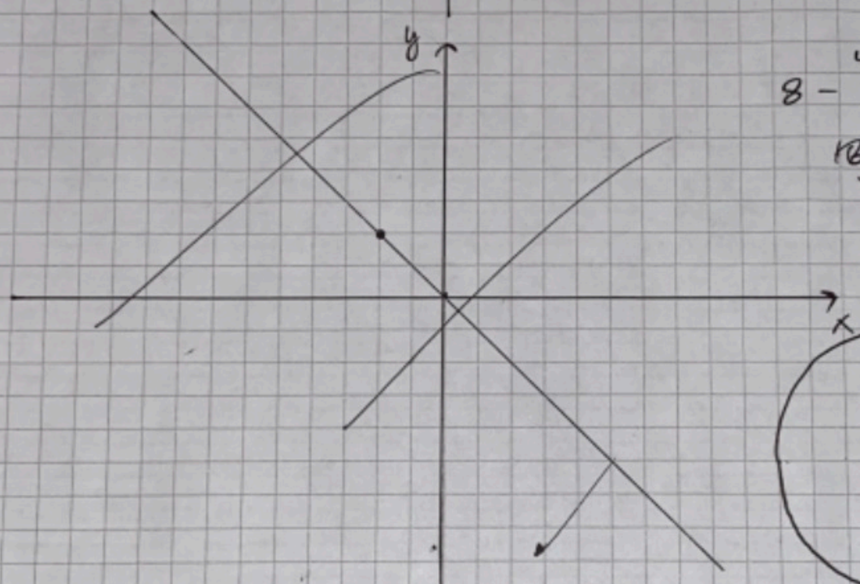
при $2<2a+2b$:
$$1<a+b$$
$$a>1-b$$
$$a^2+b^2<2$$
$$(1-b)^2+b^2=2$$
$$1-2b+b^2+b^2=2$$
$$2b^2-2b-1=0$$
$$\frac{D}{4}=1+2=3$$
$$b_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad a_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$
$$b_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad a_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

при $2a+2b<2$:
$$a<1-b$$
$$a^2+b^2 \le 2a+2b$$
$$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$$

$$\frac{1+2\sqrt{3}+3}{4}+\frac{1-2\sqrt{3}+3}{4}=2$$

Возьмём b и a: $(0;0)$; $(1;1)$; $(0;\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};0)$;
$(1-\sqrt{2};1)$; $(1;1-\sqrt{2})$



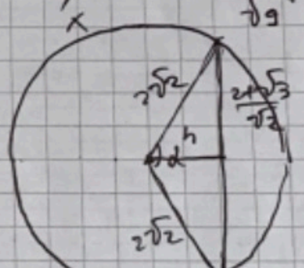


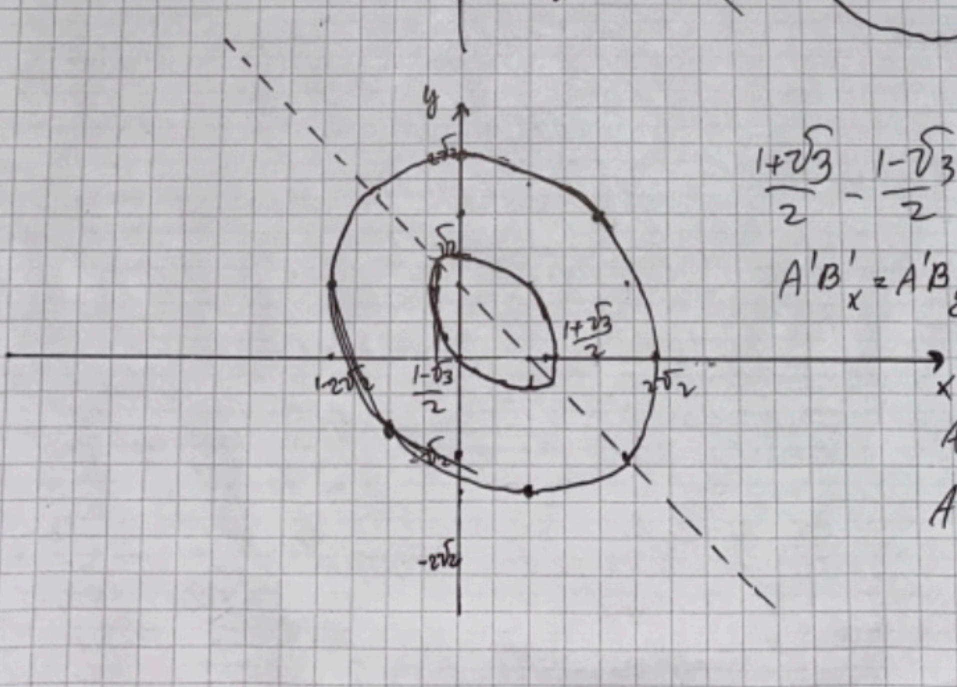
$$8-\frac{4+4\sqrt{3}+3}{2}$$

$$18\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{9}$





$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$A'B'_x=A'B'_y=b_1-b_2=a_1-a_2=\sqrt{3}$$

$$A'B'=\sqrt{6}$$

$$AB=A'B'+2\sqrt{2}=\sqrt{2}(2+\sqrt{3})$$

Черновик

$a_1 = -4$ $S = 5$

$a_1 = -3$ $S = 15$

$a_1 = -2$ $S = 25$

$a_1 = -1$ $S = 35$

$a_6 = 1$ $a_{12} = 7$
$a_7 = 2$ $a_{11} = 6$

$a_6 = 2$ $a_{12} = 8$
$a_7 = 3$ $a_{11} = 7$

$a_6 = 3$ $a_{12} = 9$
$a_7 = 4$ $a_{11} = 8$

$a_6 = 4$ $a_{12} = 10$
$a_7 = 5$ $a_{11} = 9$

$a_1 = 0$ $S = 45$

$a_1 = 1$ $S = 55$

$a_1 = -7$

$a_6 = -2$ $a_{12} = 4$
$a_7 = -1$ $a_{11} = 3$
$S = -25$

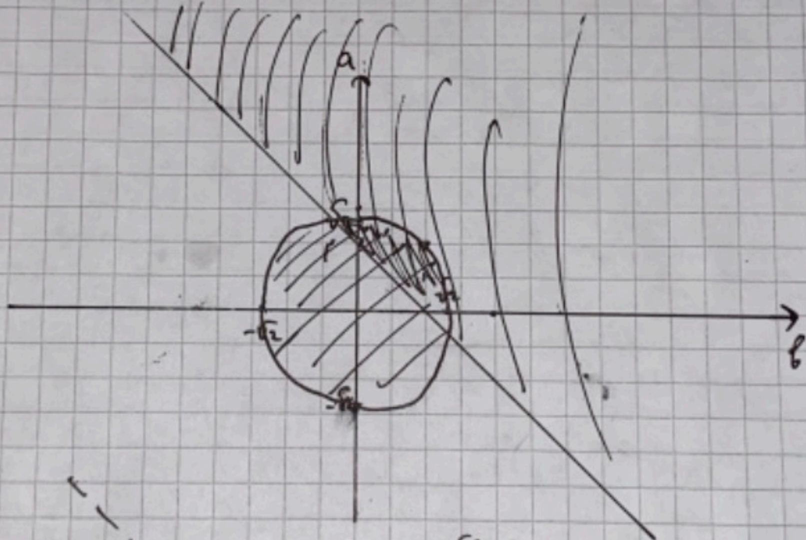
$a_6 = 5$ $a_{12} = 11$
$a_7 = 6$ $a_{11} = 10$

$a_6 = 6$ $a_{12} = 12$ 72
$a_7 = 7$ $a_{11} = 11$ 77

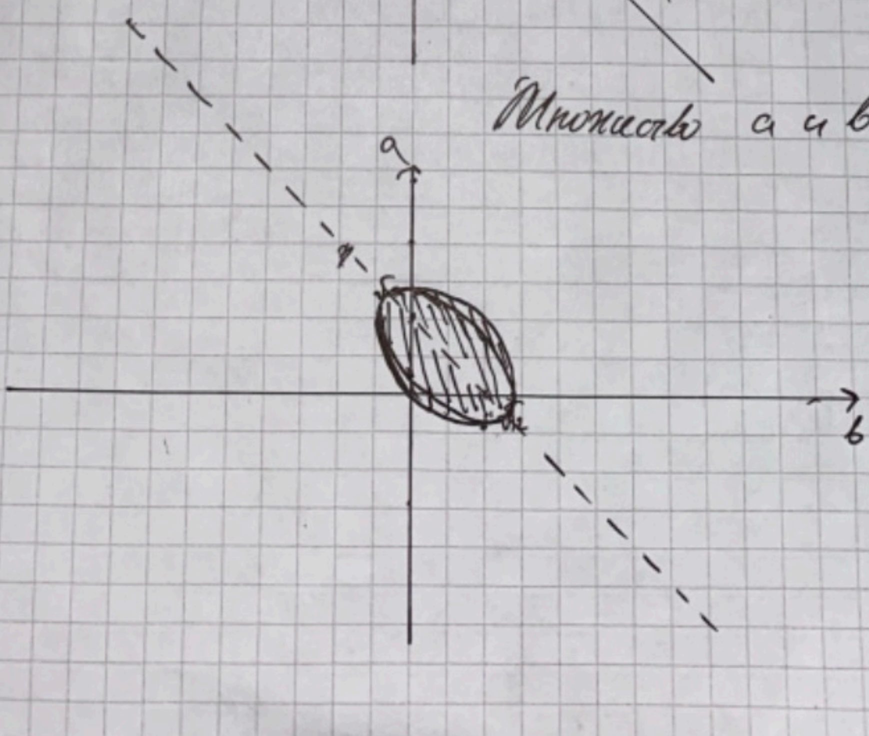
$a_1 = -8$

$a_6 = -3$ $a_{12} = 3$ -9
$a_7 = -2$ $a_{11} = 2$ -4
$S = -35$

$-3 < -25$



Множество a и b удовлетворяющих нам



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103138**

ID профиля: **323446**

Вариант 17

Задача 4 Чистовик

$a = 2^{k_a} \cdot 3^{n_a}$ т.к. НОД$(a, b, c) = 6$:

$b = 2^{k_b} \cdot 3^{n_b}$ $k_a, k_b, k_c, n_a, n_b, n_c \geq 1$

$c = 2^{k_c} \cdot 3^{n_c}$ т.к. НОК$(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

То всегда одна из $k = 15$, а остальные ≤ 15

также всегда одна из $n = 16$, а остальные ≤ 16

Посчитаем кол-во возможных троек k:

Расмотрим случаи когда одна из $k = 15$, а остальные ≤ 14:

$S_1 = 3 \cdot 14^2$

также есть случай когда двое из $k = 15$, а оставшийся ≤ 14:

$S_2 = 3 \cdot 14$

и есть случай $k_a = k_b = k_c = 15$, такой случай 1

итого S_k: $3 \cdot 14^2 + 3 \cdot 14 + 1 = 42(14+1) + 1 = 631$

Аналогично для n:

$S_n = 3 \cdot 15^2 + 3 \cdot 15 + 1 = 45(15+1) + 1 = 721$

тогда всего возможно $S = S_k \cdot S_n$ случаев

$S = 631 \cdot 721 = (7 \cdot 9 \cdot 10 + 1)(8 \cdot 9 \cdot 10 + 1) = 56 \cdot 90^2 + 90(7+8) + 1 =$

$= \cancel{90(56+15)+1}$ $90(56 \cdot 90 + 15) + 1 = 454951$

Ответ: 454951

(3)

21103138 (U323446 M1298444)

Задача 5 Чистовик

$a = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

$b = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Заметим, что: ~~$abc = 4 \cdot \log_{5x+1} 4x+1 \cdot \log_{\frac{x}{2}}$~~

$abc = 4\cdot\left(\log_{5x-1}(4x+1)\right)\cdot\left(\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\right)\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\right) = 4\left(\log_{5x-1}(4x+1)\right)\left(\log_{4x+1}(5x-1)\right) =$

$= 4$

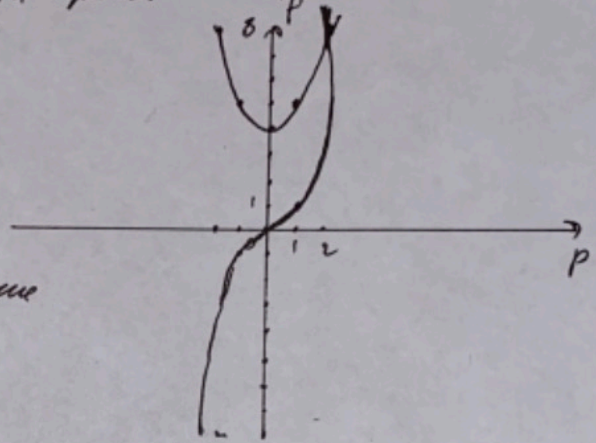
Пусть двое из чисел $= p$, тогда третье это $p-1$

$p^2(p-1) = 4$

$p^3 = p^2 + 4$

$f_1(p) = p^3$

$f_2(p) = p^2 + 4$



по графику видно что решение только одно при $p = 2$

тогда решение сводится к:

$$\left[\begin{array}{ll} ① & 2\log_{5x-1}(4x+1) = 1 \\ ② & 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 1 \\ ③ & \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 1 \end{array}\right.$$

1. $5x-1 = (4x+1)^2$ $\quad 5x-1 = 16x^2+8x+1$ $\quad 16x^2+3x+2=0$

$D = 9-128$ $\quad D<0 \Rightarrow$ нет решений

2. $4x+1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $\quad \cancel{8x+2=x}$ $\quad 4x+1 = \frac{x^2}{4}+2x+4$ $\quad x^2-8x+12=0$

$\frac{D}{4} = 16-12 = 2^2$

$x_1 = 4-2 = 2$

$x_2 = 4+2 = 6$

Проведём проверку x_1: $a=2$, $b=1$, $c=2$ $\Rightarrow x=2$ - удовлетворяет

Проведём проверку x_2:

$a = 2\log_{29} 25$

$b = 1$ $\quad \Rightarrow x=6$ - не удовлетворяет

$c = \log_5 29$

3. $\frac{x}{2}+2 = 5x-1$ $\quad \cancel{x+4=10x+2}$ $\quad \cancel{9x=2}$ $\quad \frac{x}{2}+2=5x-1$ $\quad x+4=10x-2$ $\quad 9x=6$ $\quad x=\frac{2}{3}$

Проверки

$a = 2\cdot\log_{\frac{7}{3}}\frac{11}{3}$

④ $b = 2\cdot\log_{\frac{11}{3}}\frac{7}{3}$ $\quad \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ - неуд $\quad$ Ответ: $x=2$

$c = 1$

4.

$\cdot 2^{15}$

$505500 - 50550$

$\cancel{a = 2^{k_a} 3^{k}}$ $a = 2^{k_a} \cdot 3^{n_a}$

$b = 2^{k_b} \cdot 3^{n_b}$

$c = 2^{k_c} \cdot 3^{n_c}$

$k_a, k_b, k_c \geq 1$

$n_a, n_b, n_c \geq 1$

$\cancel{k_a + k_b + k_c = 15}$

$\cancel{n_a + n_b + n_c = 16}$

$560 \times 9 = 5040$

$50550 \times 9 = 454950$

$k_a = 13$, $k_b = 1$, $k_c = 1$

$k_a = 12$, $k_b = 2; 1$, $k_c = 1; 2$

$k_a = 11$, $k_b = 1, 2, 3$, $k_c = 1, 2, 3$

$k_a = 10$, $k_b = 1, 2, 3, 4$, $k_c =$

$k_a = 1$, k_b

$1 + 2 + 3 + \ldots + 13$

$\frac{1+13}{2} \cdot 13 = 91$

$k_a = n_a = 14$

$n_b = 1$

$n_c = 1$

$3 \cdot 15 \cdot 15$

$k_a = 15$

$3 \cdot 14^2 + 1$

$3 \cdot 15^2$

$15 \cdot 15 \cdot 14$

15 15 15

$15 \cdot 15 \cdot 15$

$505500 - 50550 = 454950$

$n_a = 16$

$n_b = 1; 2; \ldots; 15$

$n_c = 1; 2; \ldots; 15$

$3 \cdot 15^2 + 1$

$630 + 54 = 684$

3000

76×5

76×9

4800

$76 \times 8 = 608$

$156 \times 3 = 588$

$225 \times 3 = 675$

676×589: 6084, 5408, 3380, 398164

$k_a = 15$, $k_a, k_b \leq 14$

$S = 3 \cdot 14^2 + 1 + 3 \cdot 14$

$56 + 15 = 71$

$710 \times 9 = 6390$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

13 14

42×15: 210, 42, 630

45×16: 270, 45, 720

21103138 (U323446 M1298444)

Задача 4 ~~Чистовик~~ Черновик

$a = 2^{k_a} \cdot 3^{n_a}$

$b = 2^{k_b} \cdot 3^{n_b}$

$c = 2^{k_c} \cdot 3^{n_c}$

т.к. НОД$(a,b,c) = 6$:

$k_a, k_b, k_c, n_a, n_b, n_c > 1$

т.к. НОК$(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

то всегда либо k_a либо k_b либо $k_c = 15$, а остальные ≤ 15

также всегда либо n_a либо n_b либо $n_c = 16$, а остальные ≤ 16

~~рассмотрим когда $k_a = k_b = k_c = 15$ выходит 1 случай для~~

рассмотрим случай когда один из $k = 15$, а остальные ≤ 14:

выходит таких случаев для k: $S_1 = 3 \cdot 14^2$

и еще есть случай $k_a = k_b = k_c = 15$, и есть

итого вариантов для k: $S_k = 3 \cdot 14^2 + 1$

аналогично для n:

$S_n = 3 \cdot 15^2 + 1$

Всего случаев:

$S = S_n \cdot S_k = 589 \cdot 676$

$a = 2\log_{5x+1} 4x+1$ $\qquad abc = \frac{1}{4}$

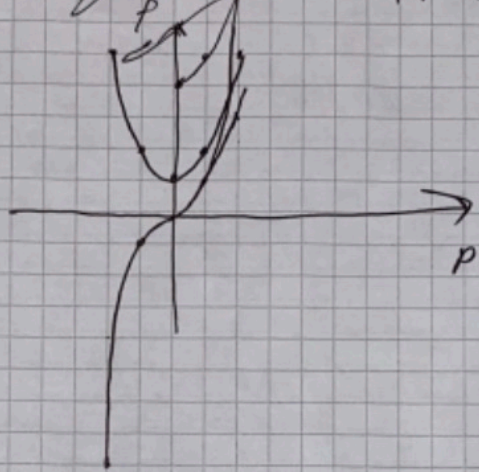
$b = 2\log_{4x+1} \frac{x}{2}+2$ $\qquad abc = 1$ $\qquad p^2 = \frac{1}{p-1}$

$c = \log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1$ $\qquad p^2(p-1) = 1$ $\qquad \frac{16}{9} = \frac{1}{}$

$4abc$ $\qquad p^3 - p^2 - 1 = 0$

$2a \cdot 2b \cdot c$ $\qquad p^3 = p^2 + 1$ $\qquad f_1(p) = p^3 \quad f_2(p) = p^2+1$

$p = 1 + \frac{1}{p^2}$



$2 \cdot 2 \cdot \log_{5x-1} 4x+1 \cdot \log_{4x+1} \frac{x}{2}+2 \cdot \log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1 = 4$

$abc = 4$

$p^2(p-1) = 4$ $\qquad \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3}$

$p = 2$

$p(p+1)^2 = 4$ $\qquad \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$

$p(p^2+2p+1) = 4$ $\qquad 2 \cdot \log_{\frac{11}{3}} \frac{7}{3}$

$p^3 + 2p^2 + p - 4 = 1$

5.

Черновик

1. $2\log_{5x-1}(4x+1) = 2\log_{4x+1}\frac{x}{2} + 2$

$$\frac{1}{\log_{4x+1}(5x-1)} = \log_{4x+1}\frac{x}{2} + 2$$