Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103118**

ID профиля: **802008**

Вариант 17

Чистовик

№1. Дано:

S_{10}

(a_n) - АП $\in \mathbb{Z}$

$a_6 a_{12} > S+1$ (1)

$a_7 a_{11} < S+17$ (2)

---

a_1 - ?

Решение

$a_n = a_1 + (n-1)d$

1) $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 =$

$= 45d + 10a_1$

2) $\left.\begin{aligned} a_6 &= a_1 + 5d \\ a_{12} &= a_1 + 11d \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_6 \cdot a_{12} = a_1^2 + 16da_1 + 55d^2$

$a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 45d + 10a_1 + 1$

3) $\left.\begin{aligned} a_7 &= a_1 + 6d \\ a_{11} &= a_1 + 10d \end{aligned}\right| \Rightarrow a_7 \cdot a_{11} = a_1^2 + 16da_1 + 60d^2$

$a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 45d + 10a_1 + 17$

4) $a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 - 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

прогрессия возр и $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow d > 0$ $d^2 < \frac{16}{5}$

$d = 1$

$0 < a < \frac{4}{\sqrt{5}}$

$a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$a_1 \neq -3$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$a_1 = -3 \pm \sqrt{7}$

$-3 - \sqrt{11} < a_1 < -3 + \sqrt{11}$

Подходят числа: $-5; -4; \overset{\text{нет}}{-3}; -2; -1$

- $a = -4$ $S = 5$ $a_6 \cdot a_{12} = 7$
  $a_7 \cdot a_{11} = 12$
- $a = -2$ $S = 25$ $a_6 \cdot a_{12} = 27$
  $a_7 \cdot a_{11} = 32$
- $a = -5$ $S = -5$ $a_6 \cdot a_{12} = 0$
  $a_7 \cdot a_{11} = 5$
- $a = -1$
  $S = 35$
  $a_6 \cdot a_{12} = 40$
  $a_7 a_{11} = 45$
- $a_1 = -6$
  $S = -15$
  $a_{12} a_6 = -5$
  $a_7 \cdot a_{11} = 0$
- $a_1 = 0$
  $S = 45$
  $a_6 \cdot a_{12} = 55$
  $a_7 \cdot a_{12} = 60$

1

$\boxed{№1}$

Чистовик

продолжение задачи №1

поскольку $a_1 \in Z$, то знаменатель прогрессии также обязан быть целым. $0 < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$:

$\frac{4}{\sqrt{5}} \vee 2$ $\qquad$ $\frac{4}{\sqrt{5}} \vee 1$

$\frac{16}{5} \vee 4$ $\qquad$ $\frac{16}{5} \vee 1$

$\frac{16}{5} < \frac{20}{5}$ $\qquad$ $\frac{16}{5} > \frac{5}{5}$ => единица подходит $d=1$

Подставим $d=1$ в условие (1) и (2)

$\cancel{a_1^2 + 16da_1 + 60d^2}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 46 + 10a_1 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 62 + 10a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq 3 \quad (*) \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \quad (3) \end{cases}$$

(3) $a_1 + 6a_1 - 2 < 0$

$-3-\sqrt{11} < a_1 < -3+\sqrt{11}$ $\qquad$ $-3+\sqrt{11} \vee 1$

$-3-\sqrt{11} \vee -6$ $\qquad$ $\sqrt{11} < 4 \Rightarrow +\sqrt{11} - 3 < 1$

$-\sqrt{11} < -3 \Rightarrow -\sqrt{11} - 3 < -6$

$-3-\sqrt{11} \vee -7$

$-\sqrt{11} > -4 \Rightarrow -3-\sqrt{11} > -7$

$-3+\sqrt{11} \vee 0$

$\sqrt{11} > 3 \Rightarrow -3+\sqrt{11} > 0$

Ответ: $a_1 = \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

-3 отпадает по условию системы $(*)$

2

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 2 \quad (1)\\ a^2+b^2 \leqslant \min(2a+2b, 2) \quad (2)\end{cases}$$

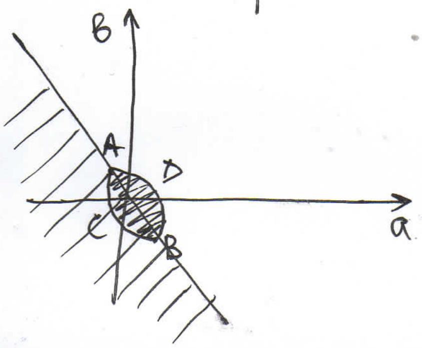
(1) уравнение окружности с центром $(a;b)$ и $R \leqslant \sqrt{2}$

(2) Попытаемся понять что это за фигура

$2a+2b \leqslant 2$

$a+b \leqslant 1$ Зададим декартову систему координат в координатах $(a;b)$ | $b \leqslant 1-a$, т.е. данная сист. к. это область под прямой $b=1-a$

В остальных случаях $a+b>1$



Таким образом

$a^2+b^2 \leqslant 2a+2b$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \leqslant 2$ при $a+b \leqslant 1$

– рисуем соотв. область в с.к. и $a^2+b^2 \leqslant 2$ при $a+b>1$

Соответственно изображению: получаем „своеобразный листочек")

Подставляем $b=1-a$ в ур-ие:

$(a-1)^2+(b-1)^2 \leqslant 2$

Получим точки $A\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

И совершенно очевидные точки из уравнений окружности: $C(0;0)$ и $D(1;1)$

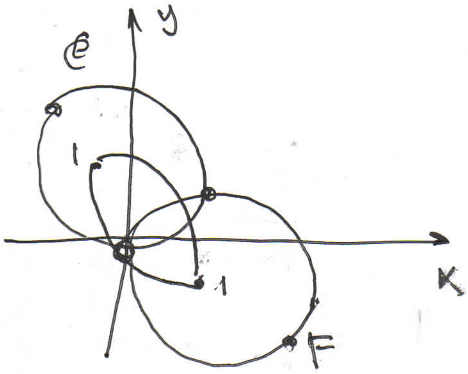
Далее имеем, что полученная область – область в которой каждая точка – центр круга из ур-я (1)

(Поскольку при изображении 1 в декартовой с.к. Oxy a и b – числовые параметры, на кот наложены дополнительные условия полученные в с.к. Oab, мы можем сказать, что фигура в Oab соответствует пространству центров круга (1) в Oxy.

Б

3

Чистовик
Продолжение №3
Постр. 2 окр. с центром A и B и $R=\sqrt{2}$



Заметим, что две самые удаленные точки это $C\left(-1+\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ 1-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$F\left(1+\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ -1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

И окружность построенная на этих 2 точках будет покрывать все маленькие круги с центром на „листочке“

При этом, еще из соображений симметрии C и F симметричны отн-но центра „листочка“, а значит в полученной окружности CF – диаметр

Тогда центр новой окр-ти $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Имеем: $\left(1+\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=R^2$

$R^2=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$R=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$

Тогда $S=\pi R^2=\pi\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\pi\left(2+\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)=\frac{7}{2}\pi+2\pi\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{7}{2}\pi+2\pi\sqrt{3}$

4

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103118**

ID профиля: **802008**

Вариант 17

Чистовик

$\boxed{№4}$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot3^{16} \end{cases}$$

а в $НОД(a;b;c)=2^1\cdot3^1$

Поскольку в НОК(a;b;c) входят степени двойки и тройки, то можно сделать вывод, что:

$$\begin{array}{l|l} a=2^{x_1}\cdot3^{y_1} & \min(x_1;x_2;x_3)=1 \\ b=2^{x_2}\cdot3^{y_2} & \min(y_1;y_2;y_3)=1 \\ c=2^{x_3}\cdot3^{y_3} & \max(x_1;x_2;x_3)=15 \\ & \max(y_1;y_2;y_3)=16 \end{array}$$

При этом $x_1=1$ или $x_2=1$ или $x_3=1$

Аналогично $x_1=15$ или $x_2=15$ или $x_3=15$ Аналогично с y

Тогда обязательно два значения для x и y заняты (под min и max)

Остаётся свободная переменная может быть от min до max.

Соответственно 15 и 16 вариантов. Следовательно получаем всего троек: $15\cdot16=240$

~~Ответ: 240~~

Поскольку тройки разные у нас есть варианты

1; 15; a

15; 1; a

a; 15; 1

a; 1; 15

15; a; 1

1; a; 15

Т.е. 6 вариаций переставления свободной степени

при $a\neq1$; $a\neq15$: $13\cdot6=78$ – вариантов

при $a=1$; 3 варианта

при $a=15$: 3 варианта

всего 84

Аналогично для y: $14\cdot6+3+3=90$

Таким образом $90\cdot84=7560$ троек.

Ответ: 7560

1

Чистовик

$\boxed{№5}$

Дано:

$\left.\begin{array}{l}\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\end{array}\right\}$ Какие-то 2 равны и больше 3го на 1

---

x – ?

$\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = \log_a b = A$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_b c^2 = 2\log_b c = B$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \log_c a^2 = 2\log_c a = C$

Найдем ABC:

$ABC = \log_a b \cdot 2\log_b c \cdot 2\log_c a = 4\log_a a = 4$

Пусть $t_1, t_2, t_3 = A, B, C$ причем: t_1 – меньшее из этих. Тогда

$t_1 + 1 = t_2 = t_3 \equiv t$

Следовательно,

$t_1 \cdot t_2 t_3 = 4$

$t^2(t-1) = 4$

$t^3 - t^2 - 4 = 0$

$t^3 - 2t^2 + t^2 - 2t + 2t - 4 = 0$

$t^2(t-2) + t(t-2) + 2(t-2) = 0$

$(t-2)(\underbrace{t^2+t+2}_{D>0}) = 0$

$\boxed{\begin{array}{l}t=2\\ t_1=1\\ t_2=t_3=2\end{array}}$

2

Чистовик

продолжение $\boxed{№5}$

1) $\begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_a b=1 \\ 2\log_b c=2 \\ 2\log_c a=2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=b \\ b=c \\ c=a \end{cases} \Rightarrow a=b=c$

$a=b \Rightarrow \sqrt{5x-1}=4x+1$

$5x-1=16x^2+8x+1$

$16x^2+3x+2=0$ нет решений

2) $\begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ C=2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_a b=2 \\ 2\log_b c=1 \\ \log_c a=2 \end{cases}$ $\begin{cases} b=a^2 \\ c=\sqrt{b} \\ a=c \end{cases} \Rightarrow b=a^2=c^2$

$a=c$

$b=a^2$

$4x+1=5x-1$ $\boxed{x=2}$

Тогда: $a=\sqrt{5x-1}=3$

$b=4x+1=9$

$c=\frac{x}{2}+2=3$

$\Rightarrow b=c^2=a^2 \Rightarrow$ подходит

3) $\begin{cases} A=2 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_a b=2 \\ 2\log_b c=2 \\ 2\log_c a=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b=a^2 \\ b=c \\ a=\sqrt{c} \end{cases} \Rightarrow b=c=a^2$

$b=c$

$4x+1=\frac{x}{2}+2 \Rightarrow 8x+2=x+4 \Rightarrow 7x=2$ $x=\frac{2}{7}$

Тогда: $a=\sqrt{5x-1}=\sqrt{\frac{3}{7}}$

$b=4x+1=\frac{15}{7}$

$c=\frac{x}{2}+2=\frac{15}{7}$

$b\neq a^2 \Rightarrow$ не подходит

3

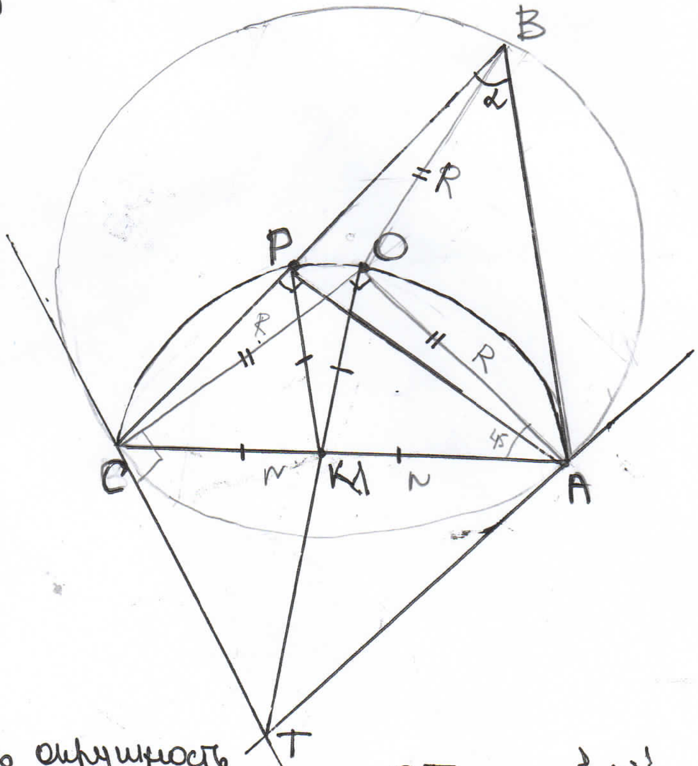
Ответ: $x=2$

Чистовик

№ 6

Дано: $\triangle ABC$ – остроуг. – впис. в ω
$\omega(O; R)$ окружность
$\{A, O; C\} \in \omega'$
$\omega' \cap BC = P$
AT и TC – касательные ω
$AT \cap TC = T$
$S_{APK} = 6$
$S_{CPK} = 4$

а) S_{ABC} – ? б) AC – ? $\operatorname{arctg}\frac{7}{5} = \angle ABC$



а) $TA \perp AO$
$CT \perp TO$

Около $CTAO$ можно описать окружность и это будет второй окружностью ω', где OT – диаметр ω' т.к. на него опир. прямой угол

$OT \perp AC \Rightarrow OT$ делит AC пополам в точке K

т.к. $\triangle OAC$ и $\triangle TCA$ р/б — высоты к основанию в 1 точке

$\angle CBA = \alpha \Rightarrow \angle MOA = \alpha = \angle COM$

$\angle TCM = \angle ABC$ (как между кас-ой и хордой)

$S_{APC} = 10$

Из т. P на AC будет единый перп.

Тогда: $\frac{CK}{AK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Пусть $CK = 4x$; $KM = x$ $MA = 5x$ (из соотн.)

$\angle APC = \angle AOC$ как оп. на AC

$\angle APC = 2\alpha \Rightarrow \angle APB = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle PAB = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APB$ – р/б и $PA = PB$

4

Чистовик продолжение № 8

$$S_{CPK} = \frac{CP \cdot PK \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$S_{APK} = \frac{AP \cdot PK \cdot \sin\alpha}{2} \Rightarrow \frac{CP}{AP} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CP}{BC} = \frac{2}{5}$$

$$S_{KCP} = \frac{CK \cdot PC \cdot \sin\alpha}{2}$$

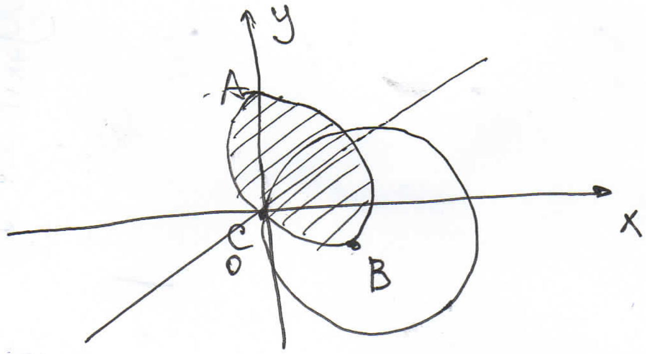
$$S_{ABC} = \frac{CA \cdot CB \sin\alpha}{2} = \frac{\frac{3}{2} Ck \cdot \frac{5}{2} PC \cdot \sin\alpha}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{15}{4} S_{CKP} = 15$$

Ответ: 15

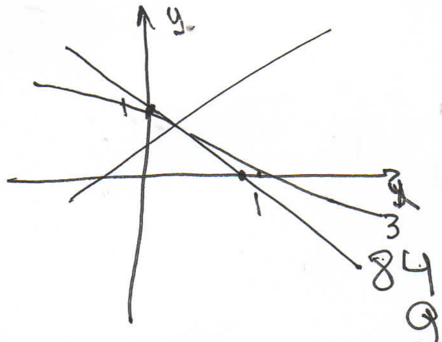
5

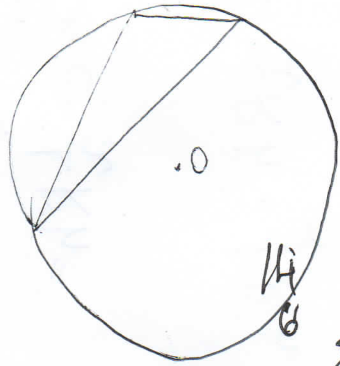
Построим 2 окружности с центром в A и B и $R=\sqrt{2}$

Черновик



Построим 2 окружности с центром в A и B и $R=\sqrt{2}$





90
84

84
9
7660

№4

(a,b,c)   НОД (a, b, c) = 6

$НОК (a, b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

наиб. общий делитель

Что это такое непонятно

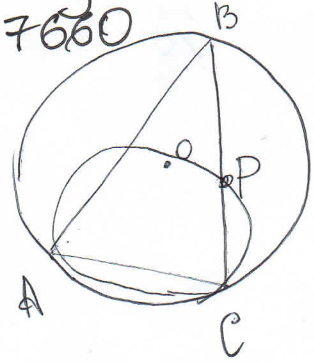
a

$2^{15} \cdot 3^{16}$

$2^{15} \cdot 3^{15} \cdot 3$

$(2 \cdot 3)^{15} \cdot 3$

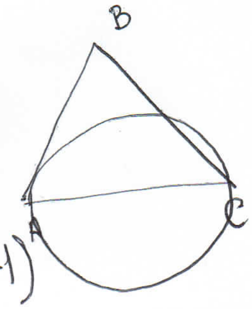
$\boxed{6^{15} \cdot 3}$



$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $\frac{\cancel{2}1}{\log 4x+1}$ — ?

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$



$\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 + \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\log_{5x-1^{\frac{1}{2}}} 4x+1 + 2\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2 + \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$2\log_{5x-1}\boxed{4x+1} + 2\log_{\boxed{4x+1}}\frac{x}{2}+2 + \log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1$

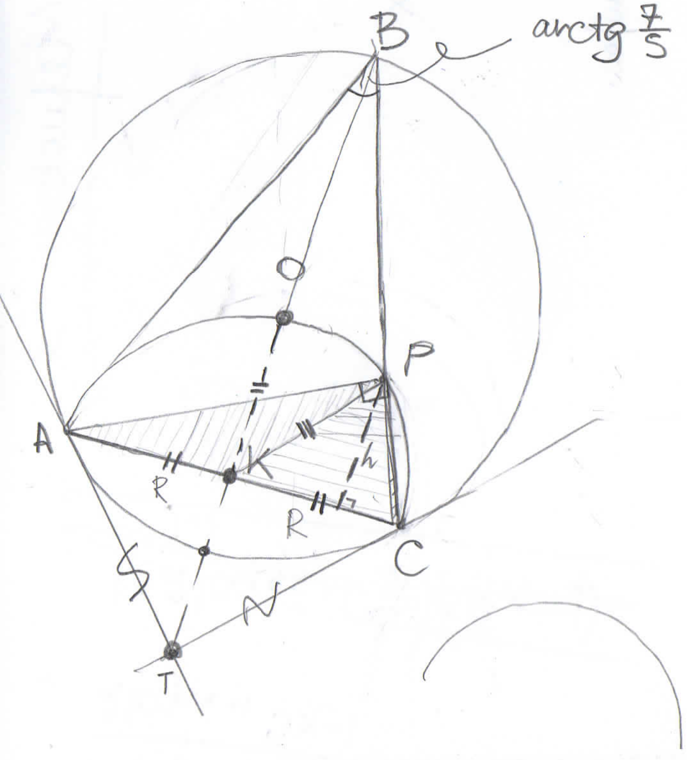
1   2   3

$\frac{1}{2\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}} + 2\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2 - \frac{2}{\log_{\frac{x}{2}+2}\sqrt{5x-1}} = 0$

$\frac{1}{2\log_{4x+1}(5x-1)} + 2\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2$

$$\frac{1}{2\log_{4x+1} 5x-1} + 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)(5x-1) - 2\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\,2\log_{4x+1} 5x-1 - 2\log_{4x+1} 5x-1 = 0$$

$$1 + 2\log_{4x+1}$$



S_{ABC}

$S_{APK} = \frac{1}{2}R \cdot h$

$S_{KPC} = \frac{1}{2}Rh =$

$\frac{1}{2} \cdot 2Rh = 6$

$Rh = 6$

$\frac{1}{2}hR = 4$

$hR = 8$

$S_{APK} = \frac{1}{2}R \cdot h + \frac{1}{2}R \cdot h =$

$R \cdot h = 10$

$\frac{abc}{4R} =$

$6 = \frac{1}{2}h2R$

$\begin{cases} 6 = hR \\ \end{cases}$

4

$\cancel{2\log_{5x-1} 4x+1 + 2\log x}$

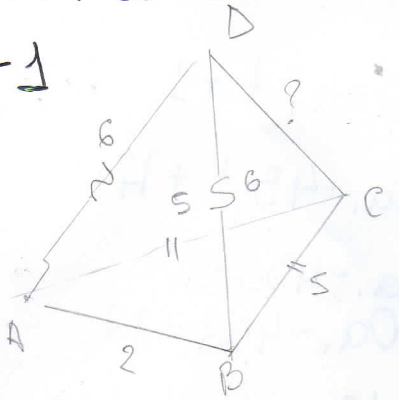
2

$$\frac{1}{2\log_{4x+1} 5x+1} + 2\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2 - 2\log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1 = 2$$

$$1 + 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)(5x-1) - 2\log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1 \cdot x = 2$$

$$x + x + 2x - 2 = 0$$

$$3x - 1$$



$\cancel{2\log_{5x-1}}$

1 2 1 3 3 2

1,2 $$\frac{1}{2\log_{4x+1} 5x-1} + 2\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2 - 2\log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1 = 0$$

$\cancel{2\log_{4x+1}}$

$$\frac{1}{2\log_{4x+1} 5x-1} + 2\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2 - 2\log_{\frac{x}{2}}+2$$

log

3
15
16
90
15
2240

Черновик

S_{10}
$a_1, a_2, a_3 \dots$
$a_6 a_{12} > S+1$
$a_7 a_{11} < S+17$

$a_1 - ?$

$$S_{1-10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10$$

$a_n = a_1 + d(n-1)$ $\quad a_{10} = a_1 + 9d$

$a_6 = a_1 + 5d$
$a_{12} = a_1 + 11d$
$a_7 = a_1 + 6d$
$a_{11} = a_1 + 10d$ $\quad (a_1+6d)(a_1+10d)$

$a_1^2 + 6da_1 + 10da_1 + 60d^2$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > (2a_1+9d) \cdot 5$

$a_1^2 + 5da_1 + 11a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

$a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$
$-a_1^2 - 16da_1 + 60d^2 > -10a_1 - 45d - 17$

$-5d^2 > -16$ $\quad (a_1+6d)(a_1+10d)$ по-ти

$5d^2 < 16$

$d^2 < 3{,}2$ $\quad d^2 - 3{,}2 < 0$

$4^2 \cdot 2$

$\left(d - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(d + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$$\begin{cases} d > -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ d < \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{2}{\sqrt{5}}$

$36 - 36$

6

$\frac{-5 - 5 + 9}{2} \cdot 10$

$-18 + 9$ $\quad -\frac{1}{2} \cdot 10 = -5$

$5 \cdot 5 \cdot 22$

$\frac{-4 + 9}{2} \cdot 10$