Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103050**

ID профиля: **852733**

Вариант 17

[redacted] <u>Чистовик</u>

№1 ~~т~~ <u>продолжение</u>

$d \in \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Но! $d>0$ и $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underline{\underline{d=1}}$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > S+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17 \end{cases}$$

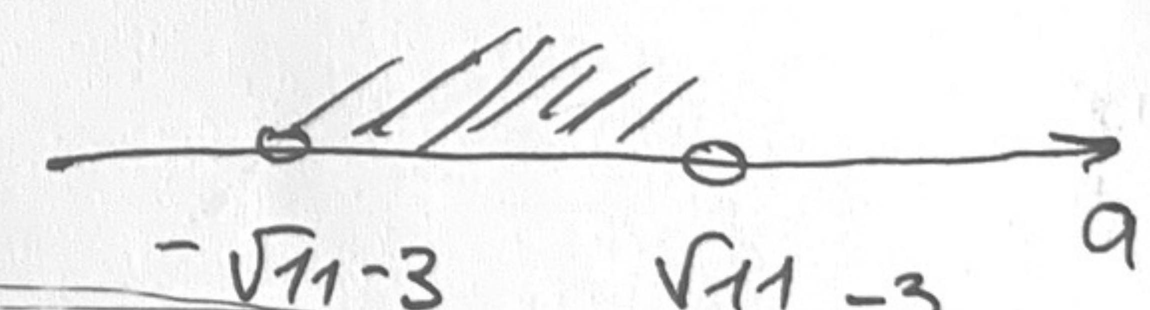
$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > S+1 \\ (a_1+6)(a_1+10) < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1^2 + 6a_1 + 9 - 11 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ (a_1+3)^2 - 11 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ (a_1 + 3 - \sqrt{11})(a_1 + 3 + \sqrt{11}) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in \{-\sqrt{11} - 3; \sqrt{11} - 3\} \end{cases}$$



! НО: $a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\boxed{a_1 \in \{-6\} \cup \{-5\} \cup \{-4\} \cup \{-2\} \cup \{-1\} \cup \{0\}}$

<u>Ответ</u>

№2 Черновик

Черновик

1) ...

№3 ~~Чистовик~~

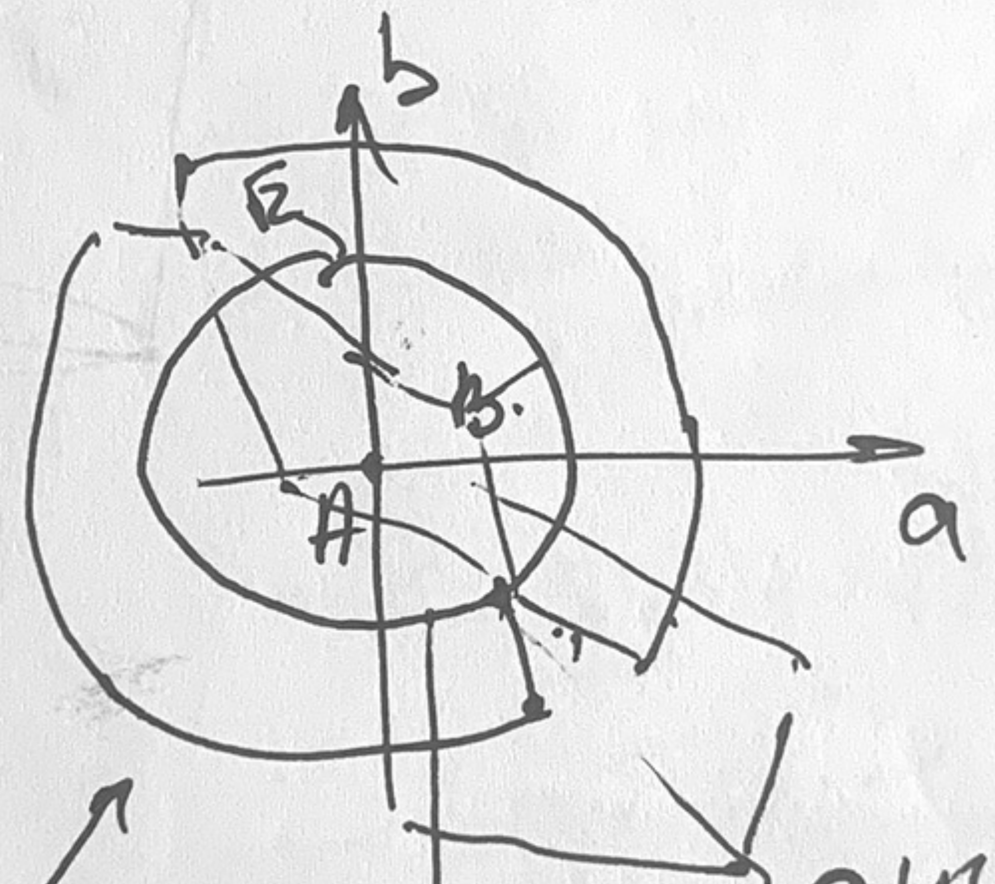
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 \quad (1)\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2) \quad (2)\end{cases}$$

(2) I) $\begin{cases}a^2+b^2\le 2a+2b\\ 2a+2b\le 2\end{cases}$ $\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2\le 2\\ a+b\le 1\end{cases}$ $B(1,1)$

II) $\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ 2a+2b>2\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a+b\ge 1\end{cases}$ $A(0;0)$

$R=\sqrt{2}$

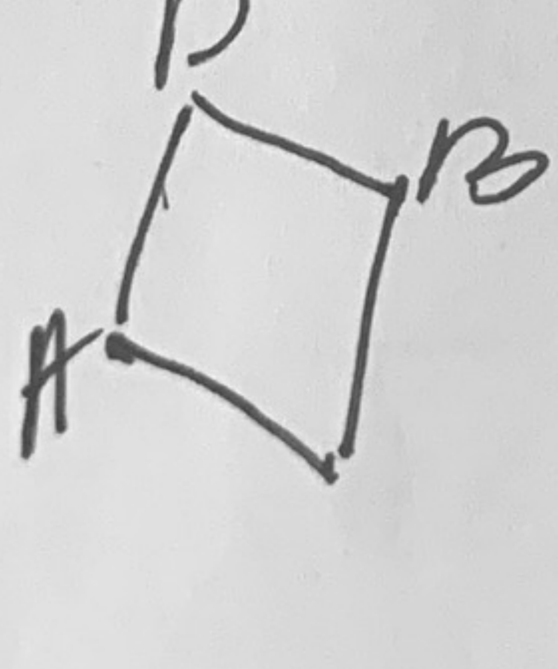
(1) $(a-x)^2+(b-y)^2\le 2$



Внутренняя окр с центром в т (x,y) и радиусом $\sqrt{2}$

дуги окр-тей с центрами A и B

множество центров окр $R=\sqrt{2}$ кас. дуг



(12) Черновик

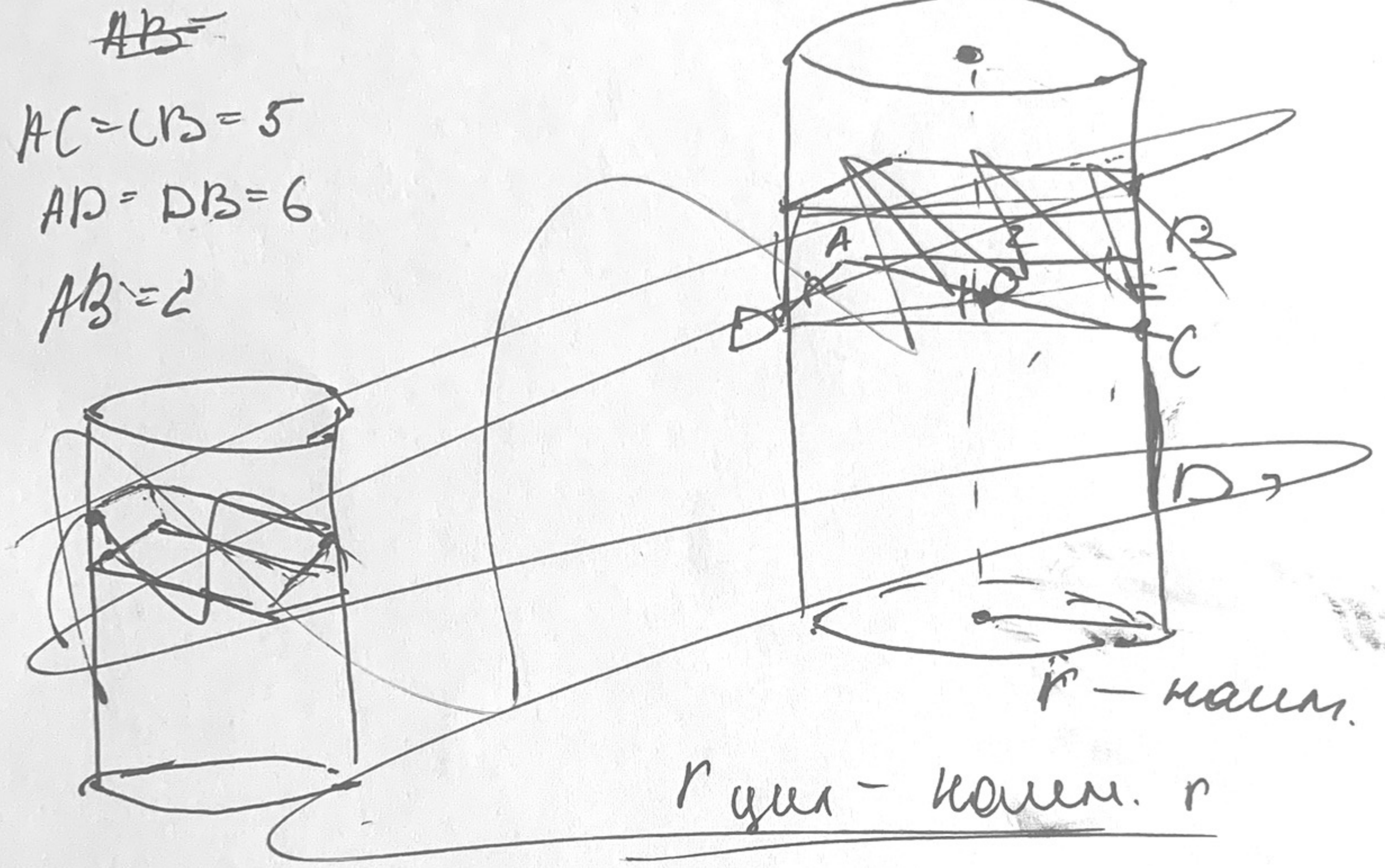
ABCD – тетраэдр

~~AB=~~

AC=CB=5

AD=DB=6

AB=2



r цил – наим. r

ΔACB – р/с

ΔAbc – р/с

OC – r. цилиндра

1)

№2

Черновик

Черновик

1) $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 +$

a_{10}

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$a_1 = ?$

$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 5(2a_1 + 9d) =$

$= 10a_1 + 45d$ — сумма первых 10-ти чл.

Z

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

13 14 15 16 17

$6 \cdot 12 > 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+1$

$72 > 56$

$7 \cdot 11 < 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+17$

$77 < 55+17 = 72$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 11d =$

$= a_{11} + d$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_6(a_{11}+d) > S+1 \\ (a_6+d)(a_{11}) < S+17 \end{cases}$$

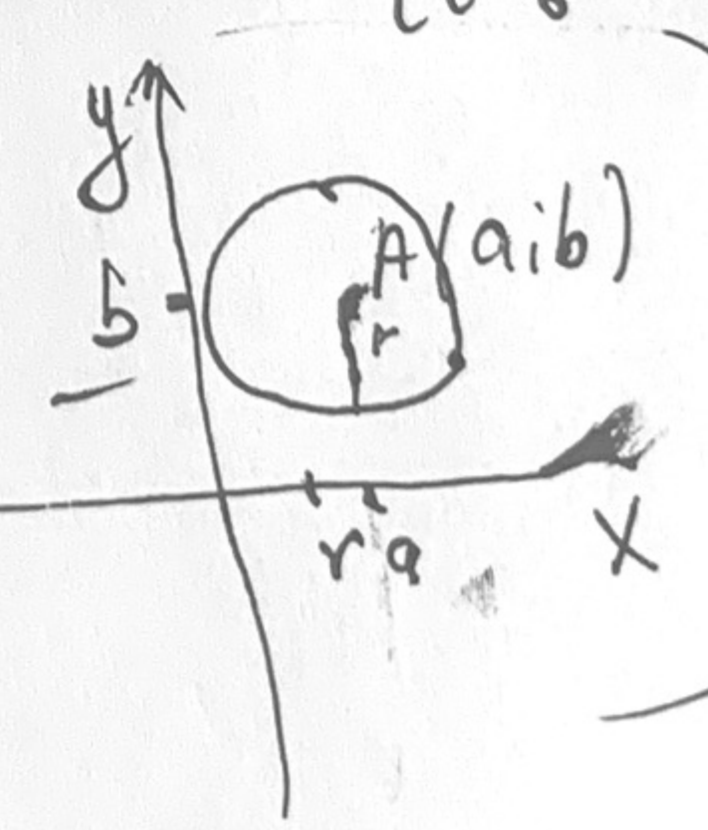
Декартовая плоскость

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2 \\ a^2 + b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$

$S = \pi R^2$

$R \le \sqrt{2}$



$d \in \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$d > 0$ и $d \in Z \Rightarrow d = 1$

2

~~Чистовик~~ Черновик

№1 продолжение

$d \in \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Но! $d>0$ и $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d=1$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > S+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17 \end{cases}$$

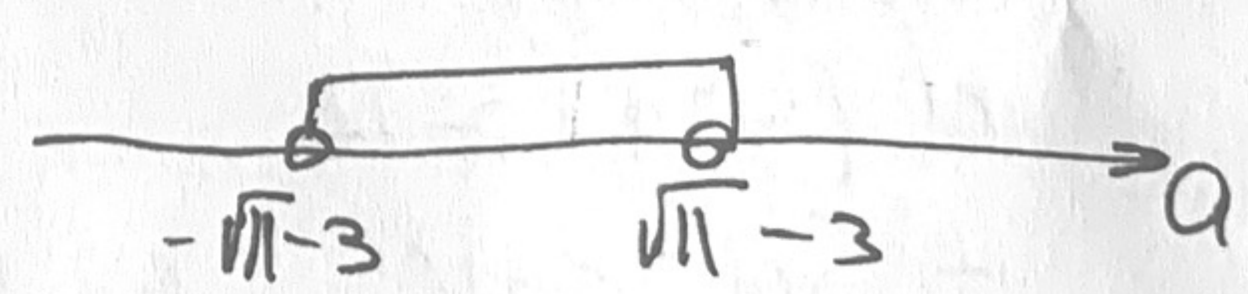
$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > S+1 \\ (a_1+6)(a_1+10) < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46 \\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ a_1^2+6a_1-2<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1^2+6a_1+9-11<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ (a_1+3)^2-11<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ (a_1+3-\sqrt{11})(a_1+3+\sqrt{11})<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in \{-\sqrt{11}-3; \sqrt{11}+3\} \end{cases}$$



Но! : $a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $a \in \{-6\} \cup \{-5\} \cup \{-4\} \cup \{-2\} \cup \{-1\} \cup \{0\}$.

стр. 2

ч

Чистовик

① Дано

~~S сумма арифм. прогрессии~~ S – сумма арифм. прогрессии

$n = 10$

$d > 0$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10} \in Z$

$a_6 a_{12} > S + 1$

$a_7 a_{11} < S + 17$

a_1 – ?

[redacted]

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 5(2a_1 + 9d) =$$

$= 10a_1 + 45d$ – сумма первых 10-ти членов.

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_1 + 11d = a_{11} + d$

$a_7 = a_1 + 6d = a_6 + d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S + 1 \\ a_7 a_{11} < S + 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_6 (a_{11} + d) > S + 1 \\ (a_6 + d)(a_{11}) < S + 17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_6 a_{11} + a_6 d > S + 1 \\ a_6 a_{11} + a_{11} d < S + 17 \end{cases} \Rightarrow a_6 a_{11} + a_6 d - a_6 a_{11} - a_{11} d > S + 1 - S - 17$$

$a_6 d - a_{11} d > -16$

$d(a_6 - a_{11}) > -16$

$d(-5d) > -16$

$-5d^2 > -16$

$5d^2 < 16$

$(\sqrt{5}d - 4)(\sqrt{5}d + 4) < 0$

$-\frac{4}{\sqrt{5}} \approx -1{,}8$ $\quad \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}8$ $\quad d$ $\quad \sqrt{5} \approx 2{,}23$

↓

~~Чистовик~~ Черновик

№ 1

Дано:

S – сумма арифм. прогрессии, $a_1 .. a_{10} \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$ $n = 10$, $d > 0$

a_1 – ?

Решение:

$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 5(2a_1 + 9d) =$

$= 10a_1 + 45d$ – сумма первых 10-ти членов

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_1 + 11d = a_{11} + d$

$a_7 = a_1 + 6d = a_6 + d$

[redacted]

$a_{11} = a_1 + 10d$

$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_6(a_{11}+d) > S+1 \\ (a_6+d)(a_{11}) < S+17 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_6 a_{11} + a_6 d > S+1 \\ a_6 a_{11} + a_{11} d < S+17 \end{cases} \Rightarrow a_6 a_{11} + a_6 d - a_6 a_{11} - a_{11} d > S+1-S-17$

$a_6 d - a_{11} d > -16$

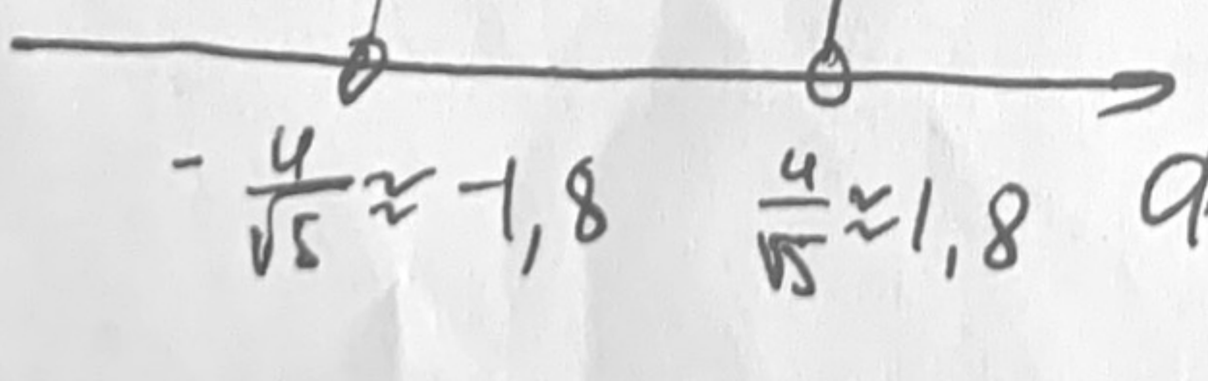
$d(a_6 - a_{11}) > -16$

$d(-5d) > -16$

$-5d^2 < -16$

$5d^2 < 16$

$(\sqrt{5}d - 4)(\sqrt{5}d + 4) < 0$

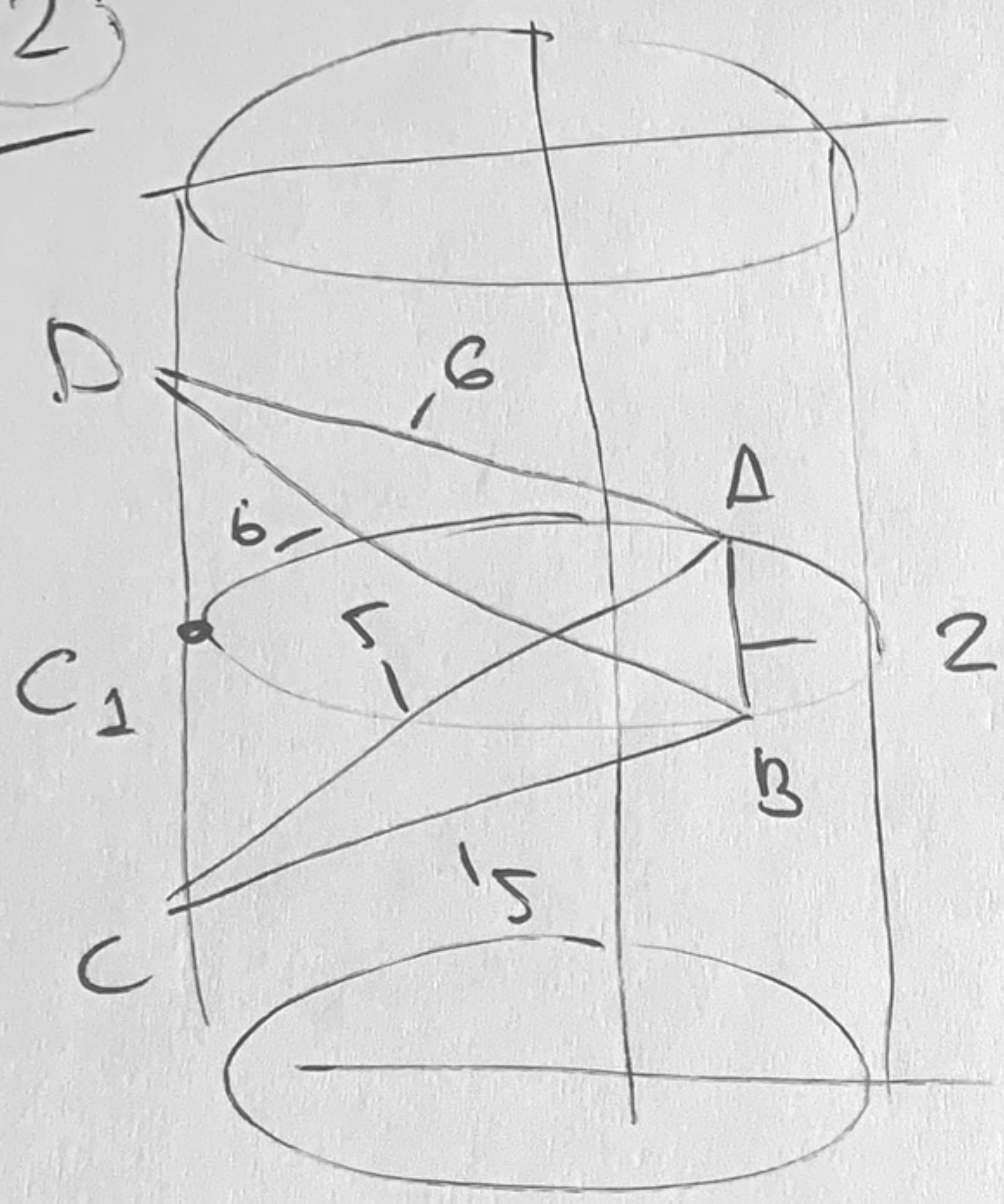


$\sqrt{5} \approx 2,23$

стр. 1

Чистовик

№2



Наименьший радиус будет у цилиндра, в котором т. C лежит в сечении, параллельном основанию, т.е. т. C

тогда $C_1D = \sqrt{DB^2 - CB^2} =$

$= \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$

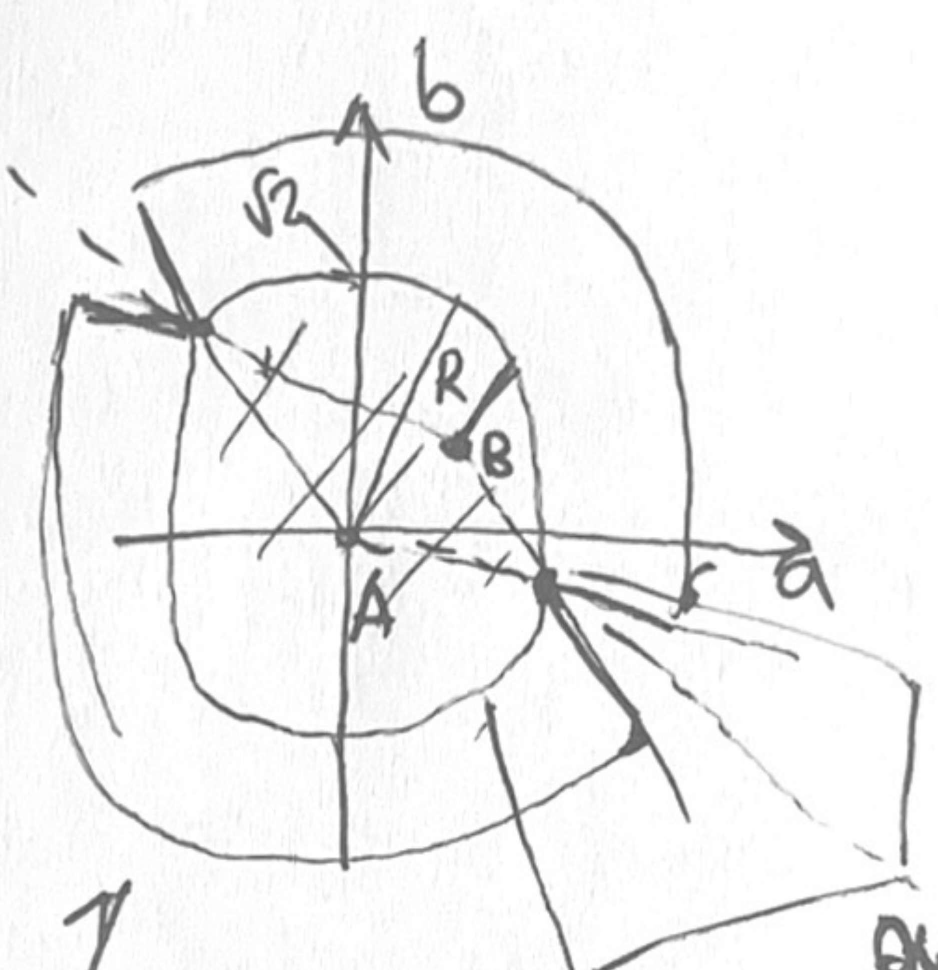
Стр. 3

№3 $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;\, 2) \quad (2) \end{cases}$

(2): I) $\begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b \\ 2a+2b \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \\ a+b \le 1 \end{cases}$ $B(1,1)$

II) $\begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ 2a+2b > 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ a+b \ge 1 \end{cases}$ $A(0,0)$

$R=\sqrt{2}$

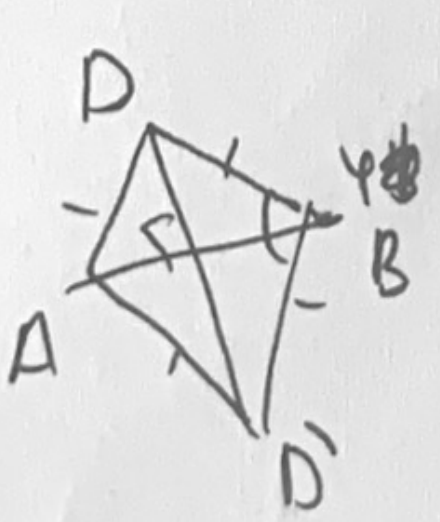


дуги окружностей с центрами A и B

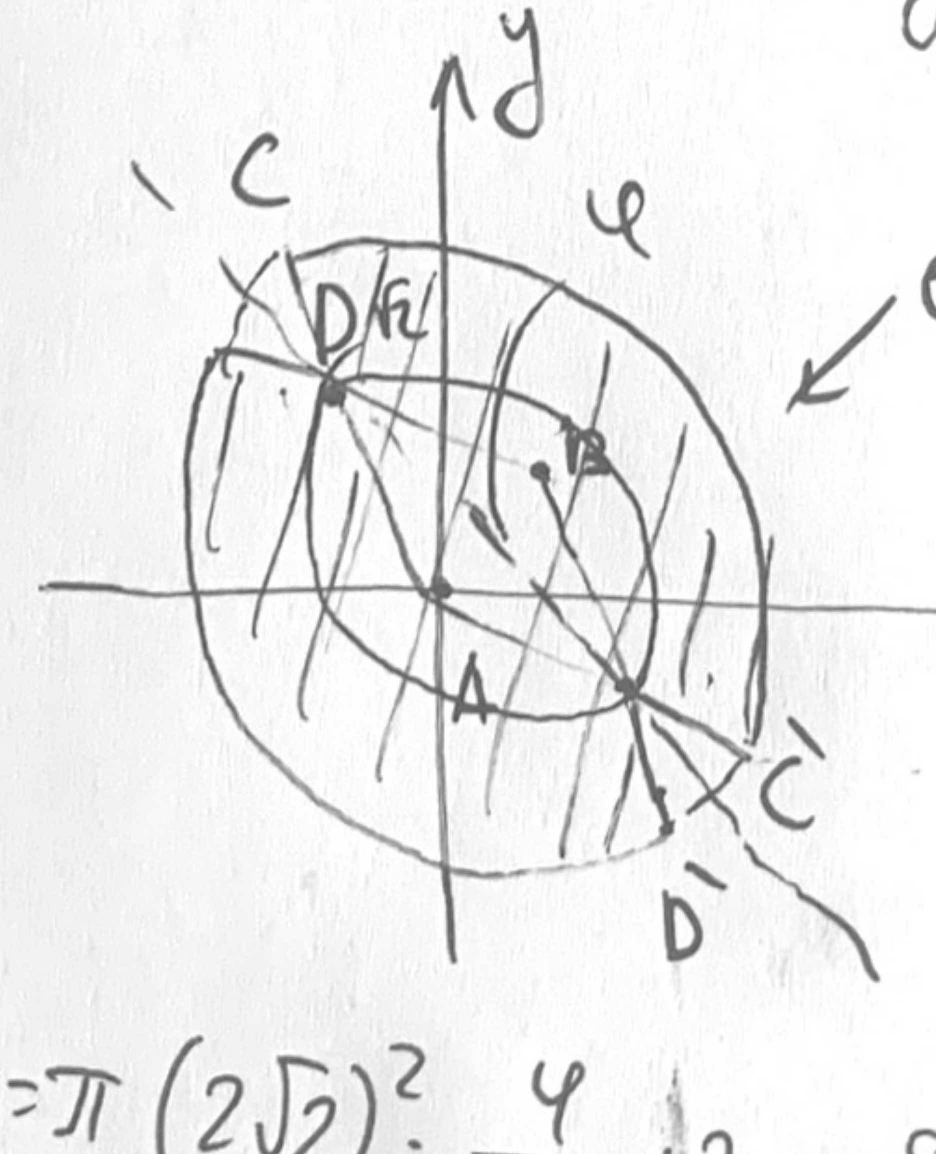
(1) $(a-x)^2+(b-y)^2 \le 2$

Множество центров окр. $R=\sqrt{2}$ кас. дуг.

Внутренняя окр. с центром в т. (x,y) и радиусом $\sqrt{2}$



$AB=\sqrt{2}$



Фигура M

Всея заштрихованная область и точки с $\widehat{C}$ — это решения

~~Вся заштрихованн~~

$S_M = \pi(2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\varphi}{360} \cdot 2 - S_{ADBD`}$

$(2\sqrt{2})^2$

⇓

$R\cos\left(\varphi\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{AB}{2}$

$\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{\varphi}{2}=60°$; $\varphi=120°$; $S_M=\pi\cdot 8\cdot\frac{120°}{360°}\cdot 2 - R^2\cdot\sin(120°) =$

$=\pi\cdot\frac{16}{3} - 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}}$ $\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

№2 Черновик

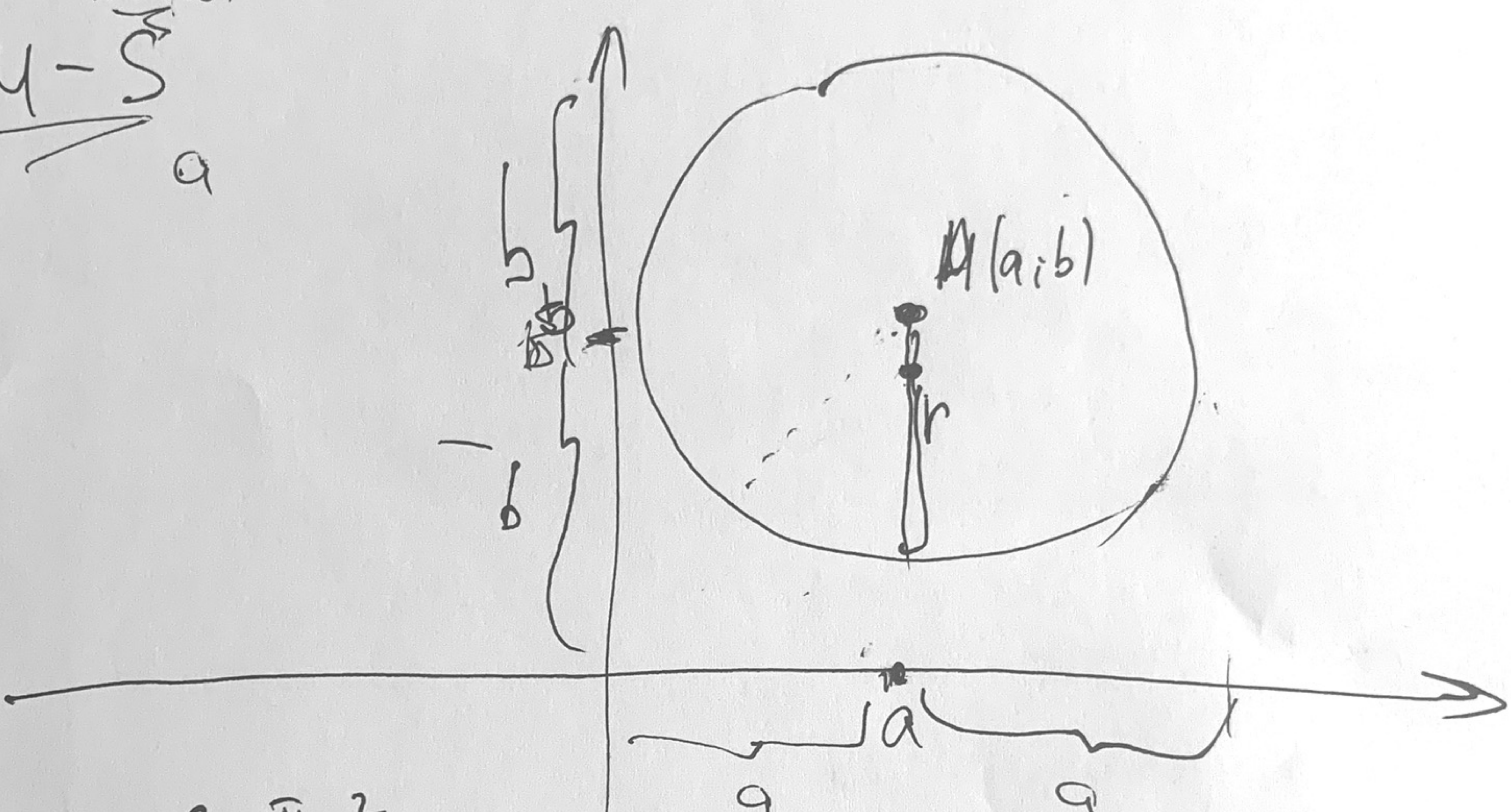
Черновик

№3

Дано:

$M - \tilde{S}$

a



$S = \pi r^2$

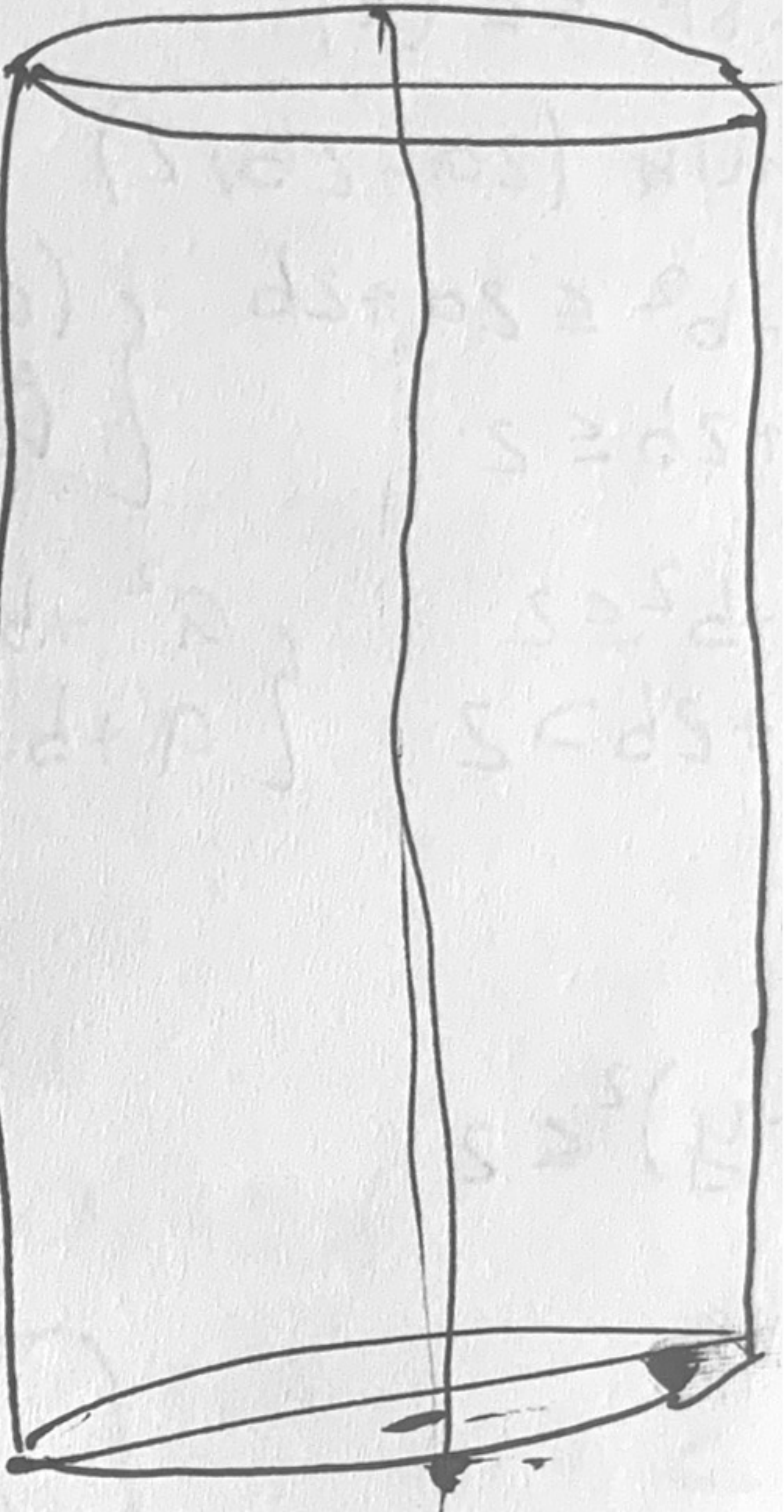
окружность

$R = \sqrt{2}$, A - центр

(a;b)

~~2a, 2b~~

диаметр?



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103050**

ID профиля: **852733**

Вариант 17

Черновик

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases} \quad a;b;c\in N$$

$$\begin{array}{r} \times 1024 \\ 32 \\ \hline 2048 \\ 3072 \\ \hline 32768 \end{array}$$

3^{16}

~~3 · 3 · 3 · 3 · 3 · 3 · 33~~

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 3 \\ \hline 81 \end{array}$$

81 · 81 · 81 · 81

$32768 = 2^{15}$

$43046721 = 3^{16}$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 81 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline \times 6561 \\ 81 \\ \hline 6561 \\ 52488 \\ \hline \times 531441 \\ 81 \\ \hline \end{array}$$

~~531441~~

~~4251528~~

~~53488~~

$$\begin{array}{r} \times 531441 \\ 81 \\ \hline 531441 \\ 4251528 \\ \hline 43046721 \end{array} = 3^{16}$$

Ответ:

№5

Чистовик

$$\left.\begin{aligned} a &= 4x+1 \\ b &= 5x-1 \\ c &= \frac{x}{2}+2 \end{aligned}\right\} \text{обознач.}$$

тогда $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x-1) = 2\log_{5x-1}(4x-1) = 2\log_b a = y_1$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_a c = y_2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \log_c b = y_3$

Пусть $\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1 - y_3 = 1 \\ y_2 - y_3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{2}\log_b a = \cancel{2}\log_a c \\ 2\log_b a - \log_c b = 1 \\ 2\log_a c - \log_c b = 1 \end{cases}$

Это возможно при $a = b = c$

Проверим: $4x+1 = 5x-1 \Rightarrow x = 2$

$5x-1 = \frac{x}{2}+2 \quad 9 \neq 3$ - не верно

Значит другой вариант:

$\begin{cases} y_1 = y_3 \\ y_1 - y_2 = 1 \\ y_3 - y_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\log_b a = \log_c b \\ 2\log_b a - 2\log_a c = 1 \\ \log_c b - 2\log_a c = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_b a^2 = \dfrac{1}{\log_b c} \\ \dfrac{2}{\log_a b} - 2\log_a c = \log_a a \\ \log_c b - 2\dfrac{1}{\log_c a} = \log_c c \end{cases}$$

[redacted] №5 ~~Черновик~~ Чистовик

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Найти x, при которых два из этих x чисел равны, а ~~второе~~ третье меньше их на 1.

Распишем ОДЗ:

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$:

$\begin{cases} \sqrt{5x-1} > 0 \Rightarrow \text{если корень сущ-ет} \Rightarrow \\ \sqrt{5x-1} \neq 1 \quad x \neq \frac{2}{5} \\ 5x-1 > 0 \quad 5x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$

$4x+1 > 0$:

$x > -\frac{1}{4}$

$x \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\begin{cases} 4x+1 > 0 \\ 4x+1 \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$ +

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 > 0$

$\frac{x}{2}+2 \neq 0$

$\frac{x}{2} = -2$

$x \neq -4$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$:

$\begin{cases} 5x-1 > 0 \\ x \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right) \\ \frac{x}{2}+2 > 0 \end{cases}$ $\quad \frac{x}{2}+2 \neq 1 \quad \begin{cases} x \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right) \\ x \neq -2 \end{cases}$

$\frac{x}{2} > -2$

$x > -4$

$\frac{x}{2}+2 \neq 1$

$x \neq -2$

[redacted]

[illegible] ~~[illegible]~~ часть 2 ~~Чист~~

№4 продолжение **ЧИСТОВИК**

a b c

" " "

15

2 2 2

16

3 3 3

выбор степени двойки

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 9 = 36$

выбор x (1 или 15) выбор y (1 или 16) выбор степени тройки

Итого: $6552 + 504 + 468 + 36 = 7560$

стр. 2

Ответ: 7560.

№ 3. Черновик

Дано:

$\triangle ABC$ – остроугольный

$\triangle ABC$ вписан в окр$(O; r)$ – ω-окр.

AT и AC – касат.

$S_{\triangle APK} = 6$

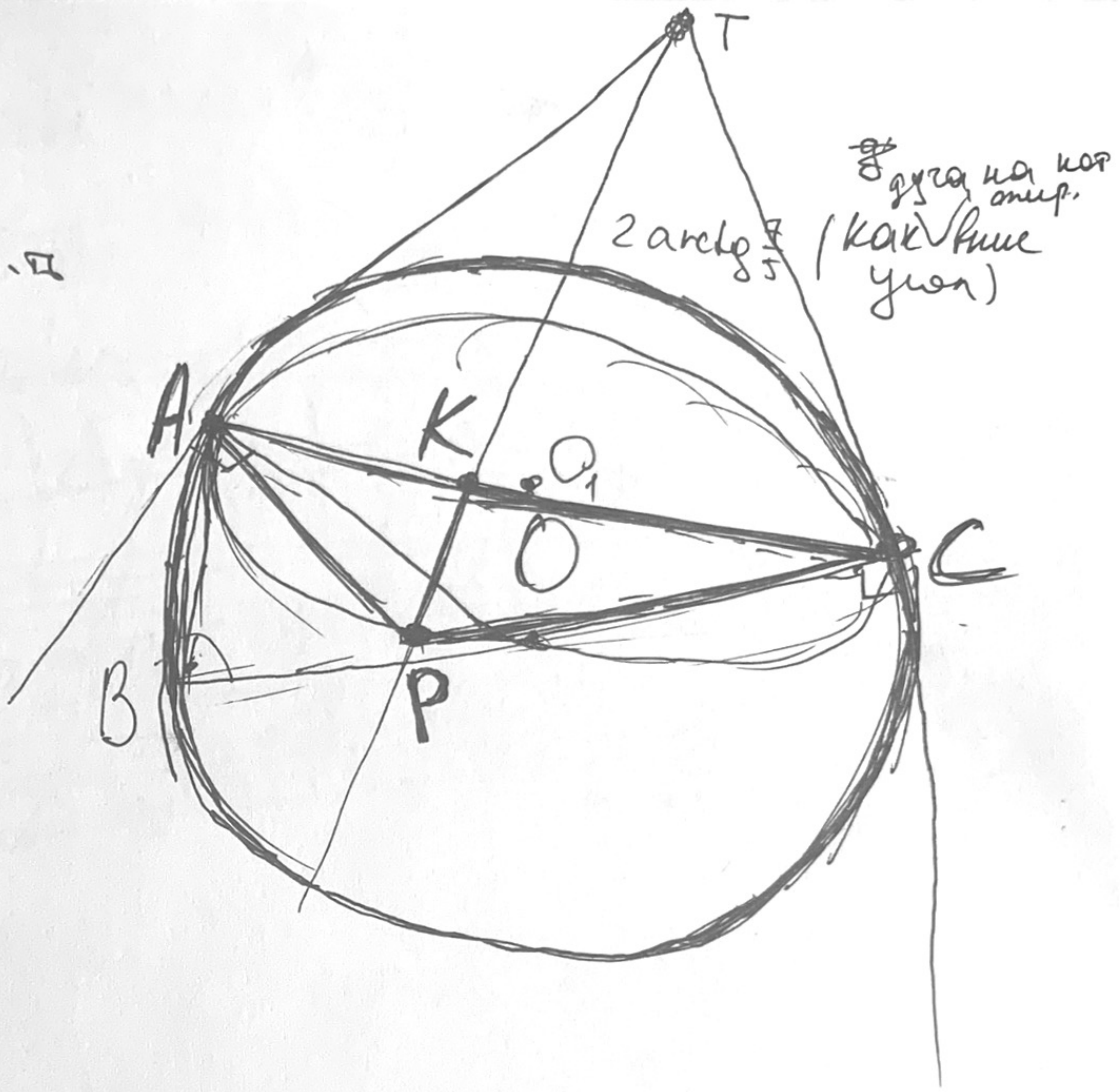
$S_{\triangle CPK} = 4$

Найти:

а) $S_{\triangle ABC}$

б) + $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{7}{5}$

⇓ Найти AC



Черновик

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

Допустим, что: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

~~$2\log_{4x}$~~

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \frac{1}{\log_{\sqrt{5x-1}}{}^2\left(\frac{x}{2}+2\right)}$$

$$\cancel{2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \frac{1}{\log_{\sqrt{5x-1}}{}^2\left(\frac{x}{2}+2\right)+1}}$$

$$\cancel{2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \frac{1}{\log_{\sqrt{5x-1}}{}^2\left(\frac{x}{2}+2\right)} + \log_{\sqrt{5x-1}}{}^2\left(\frac{x}{2}+2\right)+}$$

$$\cancel{2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$$

$+$

$$\cancel{2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)+}$$

Чистовик. стр. 1 часть 2. ЧИСТОВИК

(4) • НОД$(a,b,c)=6 \Rightarrow a\vdots 6,\ b\vdots 6,\ c\vdots 6,$

причем найдется такое число, степень двойки которого равно 1. И число, степень тройки которого равна 1

• НОК$(a,b,c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \Rightarrow$ Все числа которого можно ~~предста~~ представить, как $2^x\cdot 3^y$, где $x,y\in N$.

При этом есть число, степень ~~которого~~ двойки которого равна 15, + есть то, степень тройки которого равна 16

•
$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ \hline 2^1 & 2^x & 2^{15} \\ \hline 3^1 & 3^y & 3^{16} \end{array}$$

Пусть $x \neq \{1;15\}$, $y\neq\{1;16\}$

Тогда таких комбинация

$$\underset{\text{выбор степени двойки}}{3!}\cdot\underset{\text{выбор степени тройки}}{3!}\cdot\overset{\text{выбор } x}{13}\cdot\underset{\text{выбор } y}{14} = 6\cdot 6\cdot 13\cdot 14 = 6552$$

• Пуст $x=1$ или $x\neq 15$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ \hline 2 & 2 & 2^{15} \\ \hline 3 & 3^y & 3^{16} \end{array}$$

$$\underset{\text{выбор } x\ (2 \text{ или } 15)}{2}\cdot\underset{\text{выбор степени двойки}}{3}\cdot\underset{\text{выбор степени тройки}}{3!}\cdot\overset{\text{выбор } y}{14} = 6\cdot 6\cdot 14 = 504$$

• Пусть $y=1$ или $y=16$

$6\cdot 6\cdot 13 = 468$

• Пусть $x=1$ или 15, а $y=1$ или $y=16$