Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103032**

ID профиля: **170031**

Вариант 17

Чистовик

№1

$$S = a_1+a_2+\ldots+a_{10} = \frac{a_1+a_1+9d}{2}\cdot 10 = (2a_1+9d)\cdot 5$$

$$\begin{cases} a_6\, a_{12} > S+1, \\ a_7\, a_{11} < S+17; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > (2a_1+9d)5+1, \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < (2a_1+9d)5+17; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16da_1+55d^2 > (2a_1+9d)5+1, \\ a_1^2+16da_1+60d^2 < (2a_1+9d)5+17; \end{cases}$$

сложим нер-ва учитывая знак:

$$\underline{\underline{a_1^2}}+\underline{16da_1}+55d^2+\underline{(2a_1+9d)5}+17 > \underline{(2a_1+9d)5}+1+\underline{\underline{a_1^2}}+\underline{16da_1}+60d^2;$$

$$55d^2+17 > 1+60d^2$$

$$16 > 5d^2;$$

Т.к. члены прогрессии целые и прогрессия возрастающая, то $d=1$.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > (2a_1+9)5+1, \\ a_1^2+16a_1+60 < (2a_1+9\cancel{d})5+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0; \\ a_1^2+6a_1-2<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2>0; \\ (a_1-(-3-\sqrt{11}))(a_1-(-3+\sqrt{11}))<0; \end{cases}$$

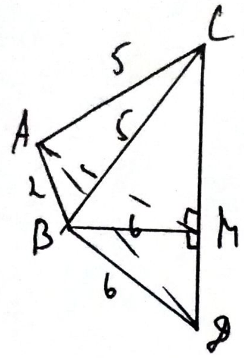
$$\begin{cases} a_1 \neq -3, \\ a_1 \in [-6;0] \end{cases}$$

$$a_1 \in \{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$$

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$.

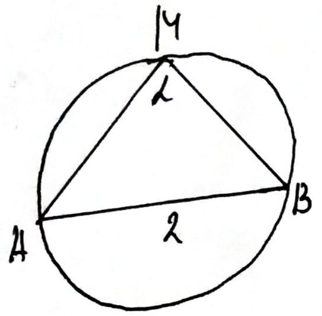
Чистовик

№2



1) Д.п. $BM \perp CD$, т.к $\triangle ACD = \triangle BCD$ (по трём сторонам) то если опустить перпендикуляр на CD из т. A он пересечёт CD в т. M

2) Т.к. $AM \perp CD$, $BM \perp CD$, CD параллельно оси цилиндра, то $\triangle ABM$ вписан в сечение цилиндра, параллельное основанию цилиндра



3) Чтобы радиус цилиндра был минимален запишем следующее:

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R \quad , \alpha = \angle AMB$$

Из этого следует что R минимален, когда $\sin\alpha$ максимален, поэтому $\sin\alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $R = 1 \Rightarrow AM = MB = \sqrt{2}$ (по т. Пифагора)

4) $\triangle MBD$ – прямоугольный $BM = \sqrt{2}$, $BD = 6 \Rightarrow MD = \sqrt{34}$ (из т. Пифагора)

5) $\triangle BMC$ – прямоугольный $BM = \sqrt{2}$, $BC = 5 \Rightarrow CM = \sqrt{23}$ (из т. Пифагора)

6) $CD = CM + MD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{23}$

Чистовик

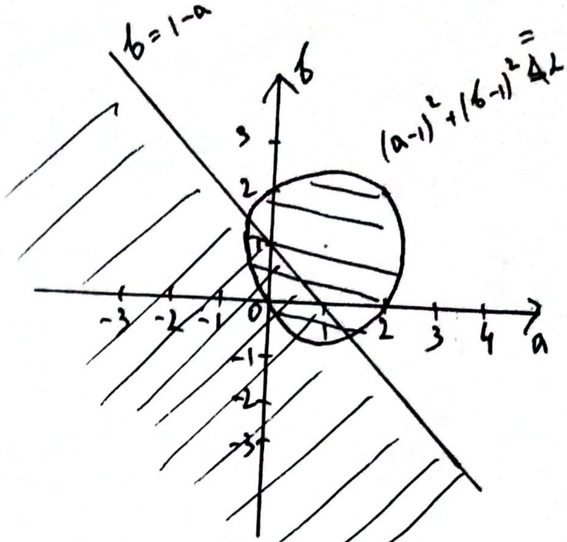
№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2, \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2); \ (1) \end{cases}$$

1) $a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2);$

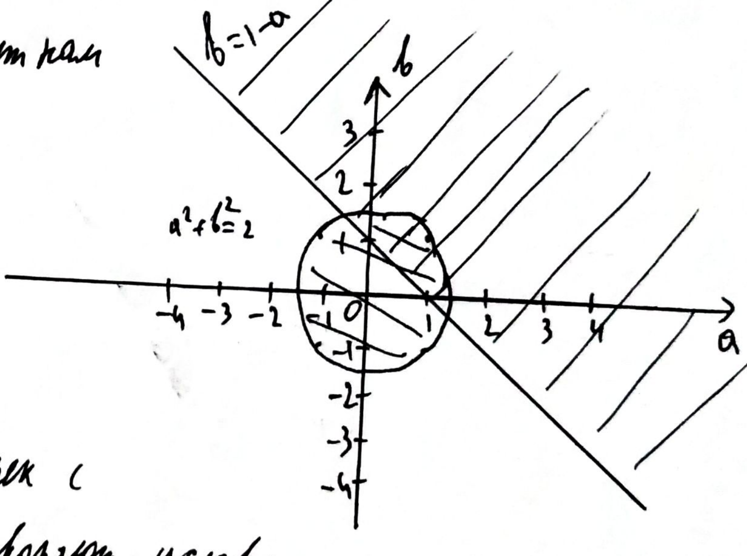
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b, \\ 2a+2b \le 2, \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 2; \\ 2a+2b \ge 2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2, \\ a+b \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 2, \\ a+b \ge 1; \end{cases} \end{array}\right.$$



Изобразим графики данных неравенств:

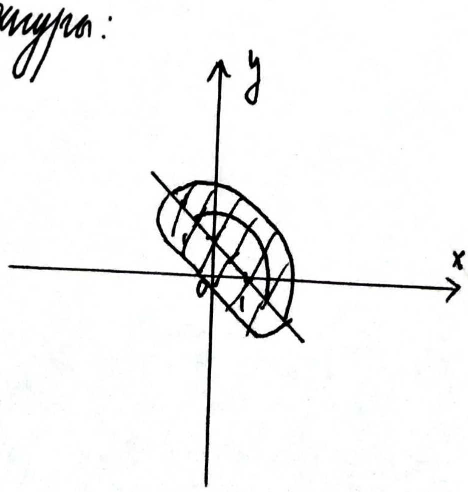
То, что закрашено дважды подходит нам

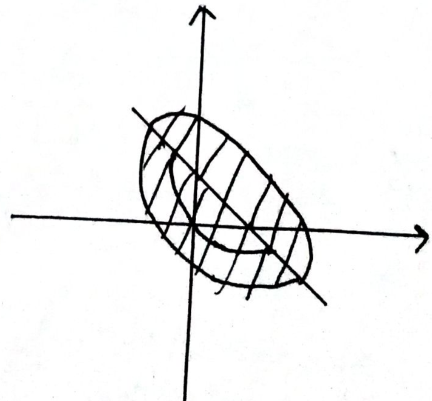


Теперь мы получили множество точек с координатами $(a;b)$ которые удовлетворяют условию.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$, означает, что мы берём каждую точку которая нам подходит и изображаем круг с радиусом $\sqrt{2}$ и центром в этой точке.

Получим следующие фигуры:

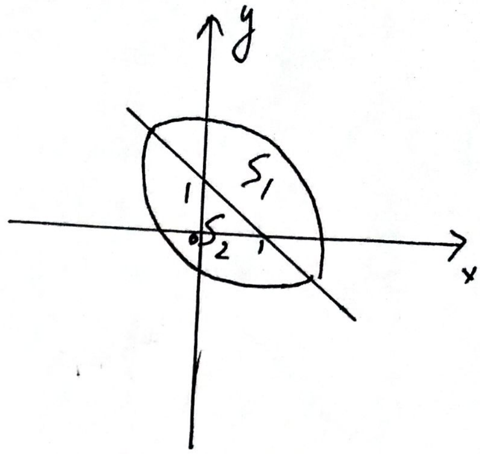




Чистовик

Также, отметим что эти две фигуры имеют одинаковую площадь, а при соединении в одну мы получим это:

Также $S_1 = S_2$ поэтому найдём площадь только одной из половинок



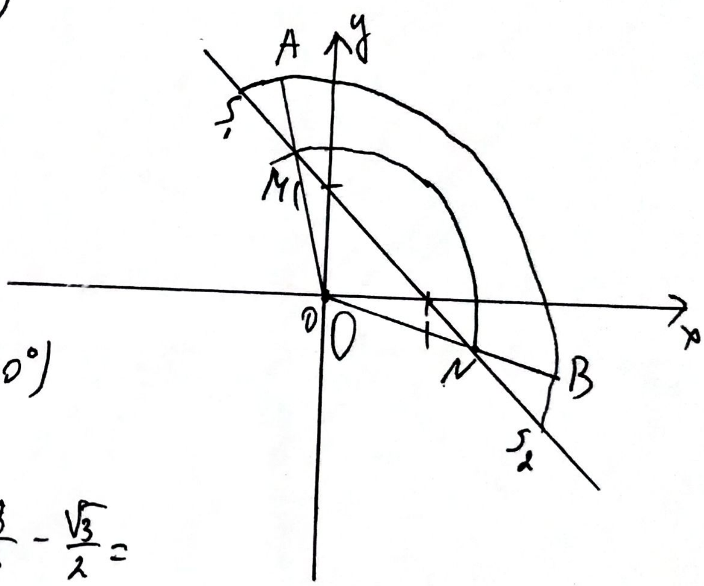
Заметим, что ~~AB~~ AOB — сектор круга с центром в $(0;0)$ и $R = 2\sqrt{2}$

Площадь куска входящего в этот сектор:

$S = S_{AOB} - S_{MON}$

$\angle MON = 120^\circ$ (из т. косинусов для $\triangle MON$)

$S = \frac{(2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{2\pi}{3}}{2\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\cdot 2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$



Также S_1MA — сектор ~~окр~~ круга с радиусом $\sqrt{2}$ и центром в $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\angle S_1MA = 30^\circ$ ($\angle S_1MA = \angle OMN = \frac{180-120}{2} = 30^\circ$)

$S_{S_1MA} = \frac{(\sqrt{2})^2 \frac{2\pi}{12}}{2\pi} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Общая площадь: $2S_{S_1MA} + S = \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{9}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Теперь посчитаем площадь 2-ух частей:

$S_{фиг} = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2 = 6 - \sqrt{3}$

Ответ: $6 - \sqrt{3}$

$S = a_1 + \dots a_{10} = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (2a_1 + 9d)5$ Чернови

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > (2a_1 + 9d)5 + 1, \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < (2a_1 + 9d)5 + 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 12 \end{cases}$$

$$\cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 d} + \cancel{55d^2} + \cancel{10a_1} + \cancel{45d} + \cancel{12} > \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 d} + \cancel{60d^2} + 10a_1 + 45d + \cancel{1}$$

$16 > 5d^2$

$\frac{16}{5} > d^2$

$\sqrt{\frac{16}{5}} > d$ $\frac{16}{5} \approx 3$

$d = 1$ $d = 2$

$16 > 4 \cdot 5$

$a^2 + \cancel{16}a_1 + \cancel{55} > \cancel{10a_1} + \cancel{45+1}$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$(a_1 + 3)^2 > 0$

$a_1 \neq -3$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 12$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$a_1^2 + \cancel{16}a_1 + 60 < \cancel{10a_1} + 45 \cancel{8} + 12$

$a_1^2 + 6a_1 + 2 < 0$ $D = 36 + 8 = 44$

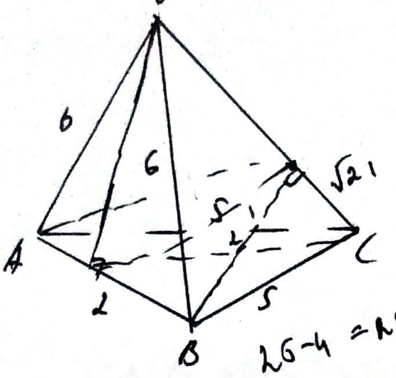
$D = 36 + 4 \cdot 2 = 44$ -6

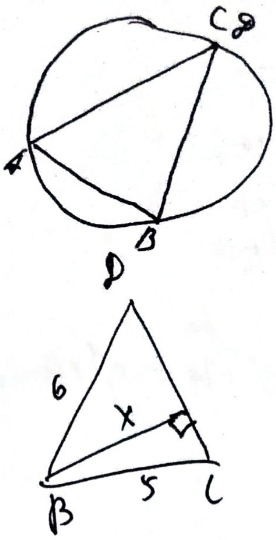
$a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

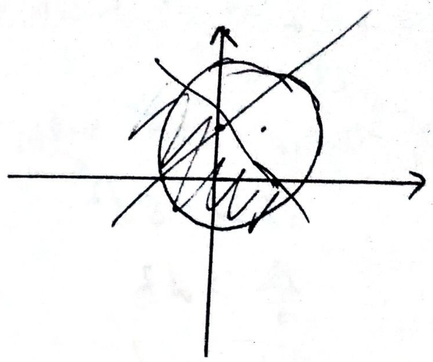
$-3 - \sqrt{11} \quad \dots \quad -3 + \sqrt{11}$

$-6 \quad -5 \dots -3 \quad 0$

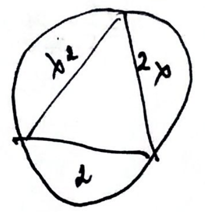
Черновик







$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)\end{cases}$$



$a^2+b^2\le 2a+2b$

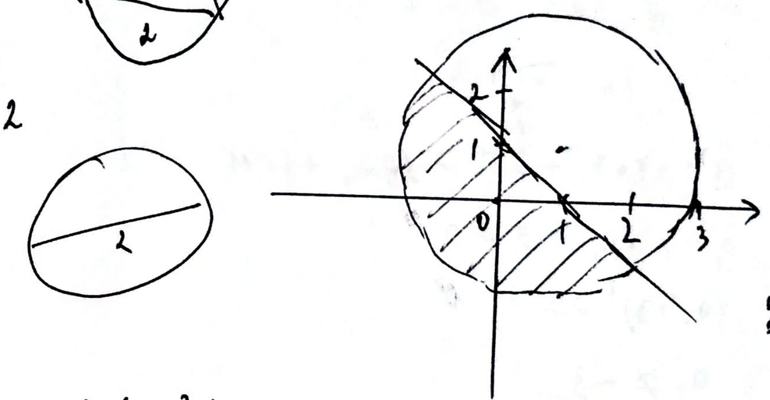
$2a+2b<2$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1\le 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$

$a+b<1$

$a^2+b^2\le 2$

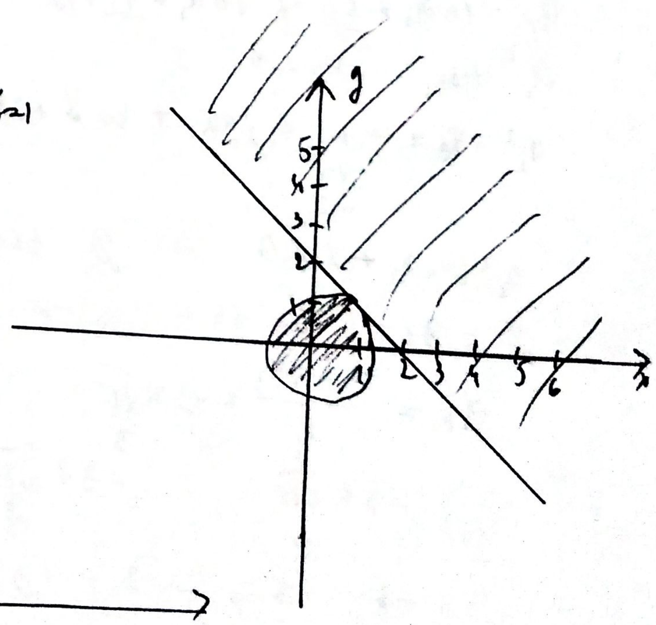


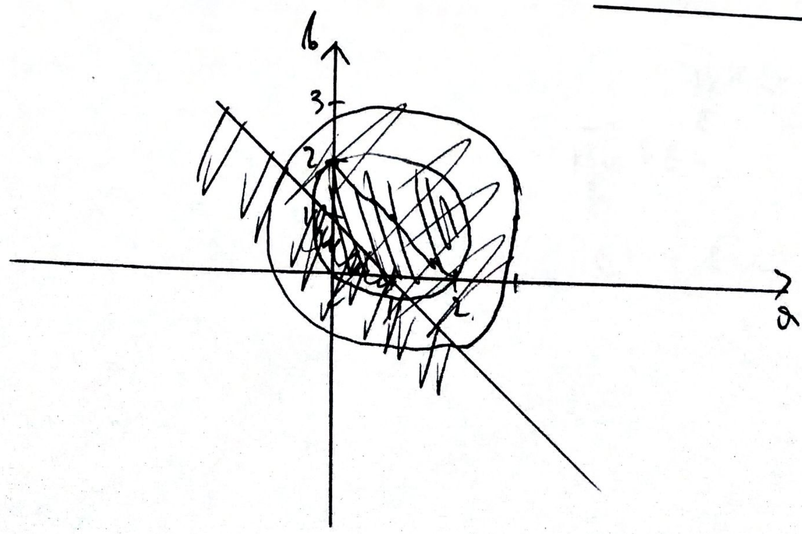
$\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 2a+2b\\ 2a+2b\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ 2a+2b>2\end{cases}\end{array}\right.$$

$a=b=1$

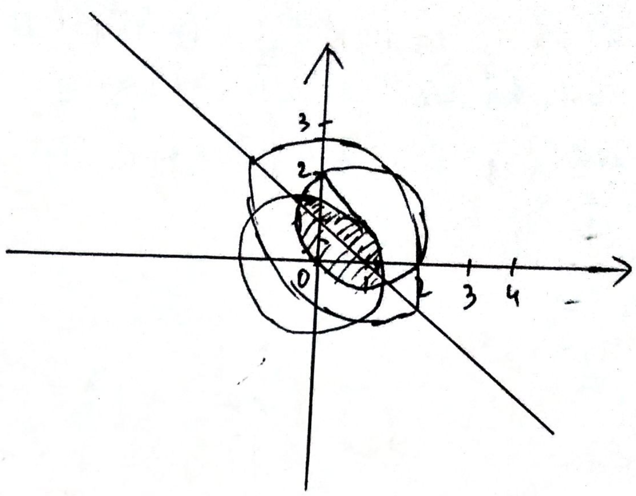
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2\le 2\\ a+b\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a+b\ge 2\end{cases}\end{array}\right.$$ $a=b=1$





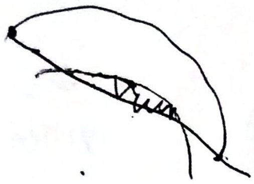
Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2)\ (1)\end{cases}$$



(1) $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 2a+2b\\ 2a+2b\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ 2a+2b\ge 2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2\le 2\\ a+b\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a+b\ge 1\end{cases}\end{array}\right.$$



$a+b=1$

$a=-b+1$

$(a-1)^2+(b-1)^2=2$

$a+b=1$

$a=1-b$

$(1-b-1)^2+(b-1)^2=2$

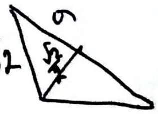
$b^2+(b-1)^2=2$

$2b^2-2b-1=0$

$D=4+8=12$

$b=\frac{2\pm2\sqrt3}{4}=\frac{1\pm\sqrt3}{2}$

$\frac{1-\sqrt3}{2}$ $\frac{1+\sqrt3}{2}$



$a^2=2-\frac12=\frac32 \Rightarrow a=\frac{\sqrt3}{\sqrt2}$

$\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt3}{2}$

$\left(2\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\right)^2=2+2-2\cdot2\cdot\cos\alpha$ S

$4\cdot\frac32=4-4\cos\alpha$

$\frac32=1-\cos\alpha$

$\cos\alpha=1-\frac32=-\frac12$

$\alpha=120^\circ$

$\frac12\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot2=\frac{\sqrt3}{2}$

$\frac{\pi}{6}$

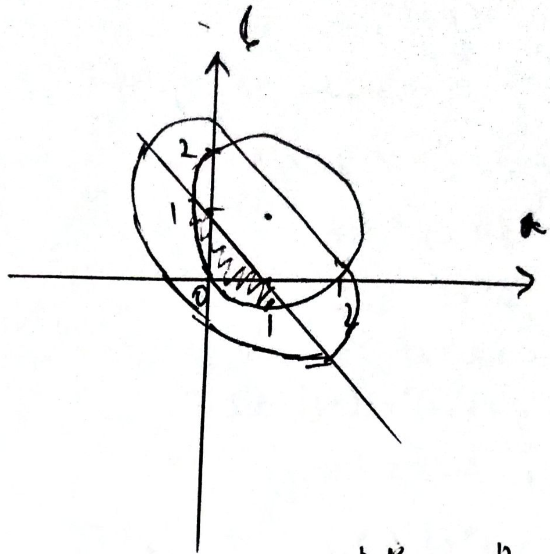
$\frac{360}{30}$

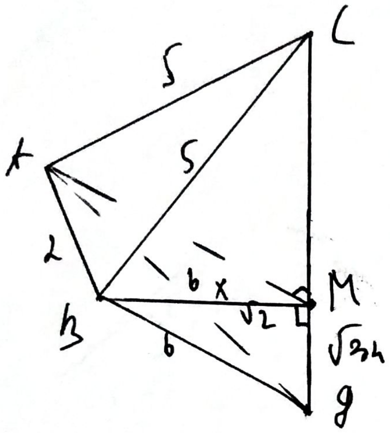
$\frac{100}{6}=20$

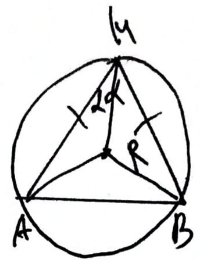
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2,\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;\ 2);\end{cases}$$

Черновик

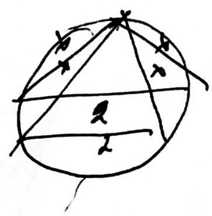
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2 \le 2a+2b\\ 2a+2b \le 2\end{cases}\\ a+b=1\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2\\ a+b \le 1\end{cases}\\ a+b=1\end{array}\right.$$

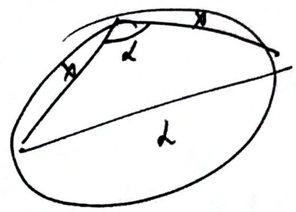






$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{MB}{\sin(90-\alpha)} = \frac{MB}{\cos\alpha} = 2R$$



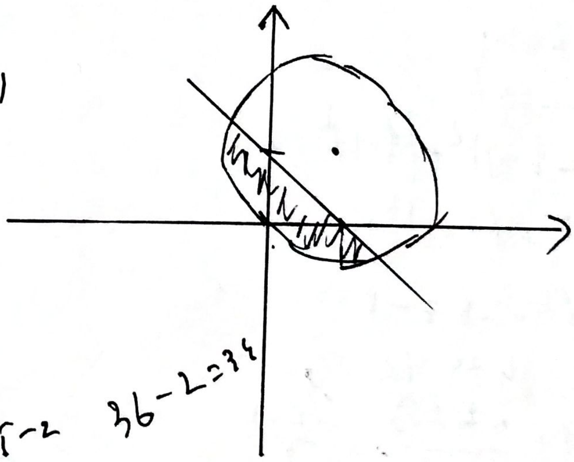


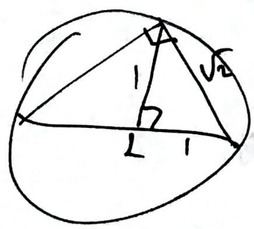
$2R = \dfrac{2}{\sin\alpha} = 2R = 1$

$\sin\alpha = 1$

2

$36-2=34$





$25-2 \quad 36-2=34$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103032**

ID профиля: **170031**

Вариант 17

$\sqrt{5x-1}=a$ $\qquad \sqrt{5x-1}=4x+1$ $\qquad x=2$ $\qquad$ Чеулобин

$4x+1=b$ $\qquad 5x-1=16x^2+8x+1$

$\frac{x}{2}+2=c$ $\qquad 0=16x^2+3x+2$

$a^x=b$

$b^y=c^2$

$c^{\frac{z}{2}}=a^2$

$a^{t^2}=1$

$a^{t^2(\frac{t-1}{2})}$

$a^{xy}=c^2$

$a^{\frac{xyz}{2}}=a^2$

$\frac{xyz}{2}=2$

$xyz=4$

$t=2$

$20y^2$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{4\cdot 2\cdot 5\cdot 2}{25}=\frac{35}{38}$

$20x^2=13y^2-12y^2\cos 2\alpha$

$20x^2=2y^2(13-\frac{12\cdot 5\cdot 2}{24})$

$\frac{540}{25}$

$\frac{540}{21}=\frac{90}{3}=\frac{16}{3\cdot 5}=\frac{16}{15}$

$\sin\alpha\, 5=2\cos\alpha$

$\sin^2\alpha\, 25=4(49-49\sin^2\alpha)$

$24\sin^2\alpha=49$

$\sin^2\alpha=\frac{49}{24}$

$24-4=20$

$\frac{5\cdot 2}{24}$

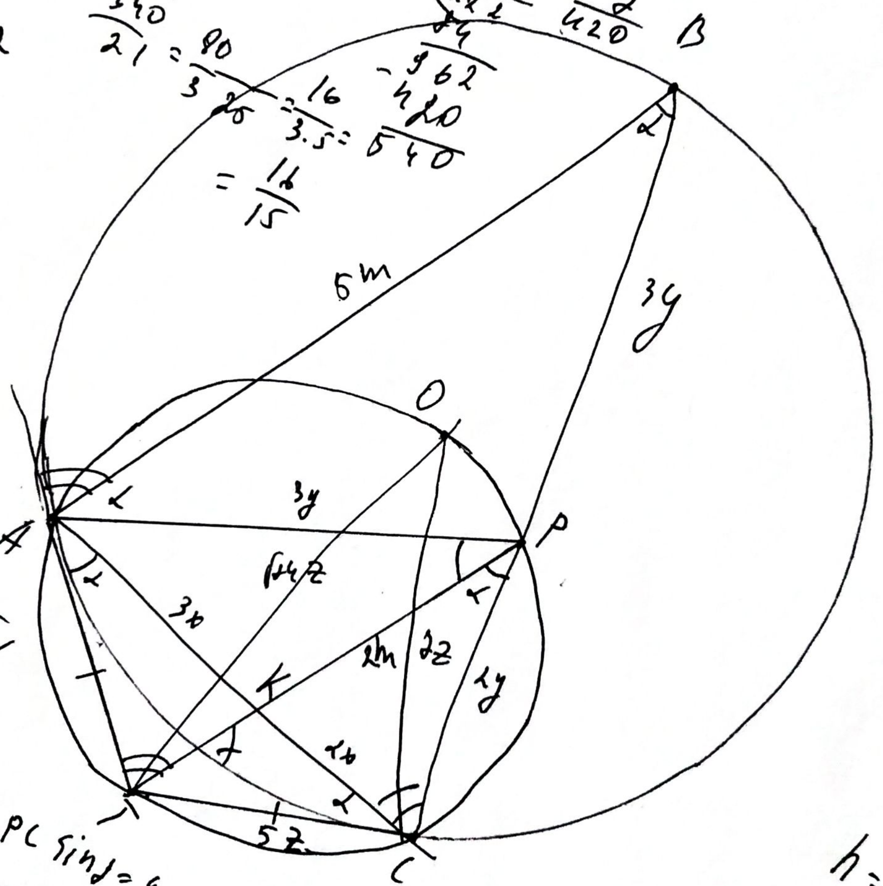
$\frac{1\ 24}{13}$ $\qquad \frac{260}{420}$

$\frac{21}{840}$ $\qquad 312$

$\frac{13}{22}$

$\frac{24}{312}$

$\angle ABC=\operatorname{arcctg}\frac{2}{5}$



$\frac{\sqrt{24}\,z}{2}=\frac{5x}{\sin 2\alpha\cdot 2}$

$z=\frac{5x}{\sin 2\alpha\sqrt{24}}$

$\frac{1}{2}KP\cdot PC\sin\alpha=4$

$\frac{1}{2}KP\,PH\sin\alpha=6$

$\frac{PC}{PH}=\frac{2}{3}$

$\triangle APK=6$

$\triangle CPK=4$

$\triangle PKH$

$h=\frac{5}{\frac{1}{2}4}=\frac{10}{\frac{1}{2}5x}=\frac{4}{x}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x}\cdot 2x=4$

$\frac{24}{14}$ $\qquad \frac{2}{38}$ $\qquad \frac{5}{2}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{5}$

$\frac{24}{13}$ $\qquad \frac{26}{+26}$

$25+49=24$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$10=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot 6y^2$

$5\sin\alpha=2\cos\alpha$

$5\sin\alpha=2\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$25\sin^2\alpha=49-49\sin^2\alpha$

$24\sin^2\alpha=49$

$\frac{24}{21}$ $\qquad \frac{10\cdot 24}{2\cdot 8\cdot 3}=y^2$ $\qquad \sin^2\alpha=\frac{49}{24}$ $\qquad 24$

Черновик

$25x^2 = g^2(13 - 2\cdot 6\cdot \frac{5\cdot 7}{74})$

$25x^2 = \frac{74}{21}(13 - \frac{2\cdot 6\cdot 5\cdot 7}{74})$

$25x^2 = \frac{\cancel{74}}{21}(\frac{962 - 542}{\cancel{74}})$;

$25x^2 = \frac{420}{21} = 20$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times\ 13 \\ \hline 222 \\ 74 \\ \hline 962 \\ -\ 420 \\ \hline 542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 35 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ \times\ 7 \\ \hline 420 \end{array}$$

Чуньовик

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=t$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=t$

$\frac{x}{2}$

$\log_{\frac{x}{2}+2}5x-1=t-1$

$\sqrt{5x-1}^{\,t}=4x+1 \Rightarrow (5x-1)^{\frac{t}{2}}=4x+1$

$(4x+1)^t=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \quad (5x-1)^{\frac{t^2}{2}}=\frac{x}{2}+2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^{t-1}=5x-1 \quad \left(\frac{x}{2}+2\right)^{(t-1)\frac{t^2}{2}}=\frac{x}{2}+2$

$(t-1)\frac{t^2}{2}=1$

$(t-1)t^2=2$

$t^3-t^2-2=0 \qquad t>0$

$1 \quad -1 \quad 0 \quad 2 \quad -2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^{\cancel{x}(t-1)\frac{t}{2}}=4x+1$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^{(t-1)\frac{\cancel{x}}{2}\cdot t}=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$(t-1)\frac{t}{2}\cdot t=2$

$(t-1)t^2=4$

$t^3-t^2=4$

$t^3-t^2-4=0$

$t=2$

$t-2$

$t^2(t-2)+t(t-2)+2(t-2)$

$t^3-2t^2+t^2-2t+2t-4$

$(t-2)(t^2+t+2)=0 \qquad D=1-4\cdot2<0$

$t=2$

$\sqrt{5x-1}^{\,\cancel{t}}=4x+1$

$5x-1=16x^2+8x+1$

$0=16x^2+3x+2$

$D=9-4\cdot2\cdot16$

$t=2$

$(5x-1)^{\frac{t}{2}}=4x+1$

$x=2$

$(4x+1)^{t2}=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^{\cancel{t}\,2\,1}=5x-1$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1$

$\frac{x}{2}+2=5x-1$

$4x+1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$9=$

$5x-1=4x+1$

$\cancel{5x}\,x=2$

$\sqrt{5x-1}^{\,t-1}=4x+1$

$(4x+1)^t=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^t=5x-1$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^{\frac{\cancel{t-1}}{2}\cdot t}=4x+1$

$\frac{\cancel{t-1}}{2}\cdot t^2=\cancel{\frac{x}{2}+2}\;2$

$t=2$

$4x+1=\frac{x}{2}+2$

$\frac{7}{2}x=1$

$x=\frac{2}{7}$

$5x-1=16x^2+8x+1$

$0=16y^2+3y+2$

$9-4\cdot2\cdot16$

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 1 \\ НОК(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a = 6a_1$

$b = 6a_2$

$c = 6a_3$

$6 a_1 a_2 a_3 = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$a_1 a_2 a_3 = 2^{14} \cdot 3^{15}$

$C_{16}^2 \cdot C_{17}^2$

14

$\log_{\sqrt{5x-1}} (4x+1)$ log

$a_1 = 1$

2^{14}

3^{16}

a	b	c
1	2^{14}	3^{16}
2	2^{13}	3^{16}
...		
2^{13}	1	3^{16}

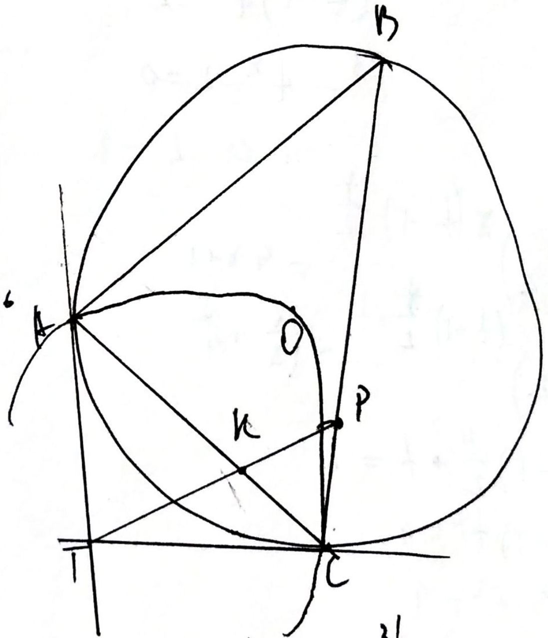
$1 \quad 1 \quad 2^{14} 3^{16}$

$1 \quad 3^{15} \quad 2^{14}$

$3^{15} \quad 1 \quad 16 + 15 = 31$

$32 \cdot 3 - 6$

$30 \cdot 3 = 90$



$C_3^1 \quad \frac{3!}{1! \, 2!}$

$C_3^1 \cdot C_2^1 = 6$

Чистовик

4) $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{\frac{1}{2} PK\, AP \sin\alpha}{\frac{1}{2} PK\, PC \sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2} AK\, h_p}{\frac{1}{2} KC\, h_p} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}$

Пусть $KC = 2x$, тогда $AK = 3x$. Пусть $PC = 2y$, тогда $AP = 3y$

5) $\angle ABP = \angle KPC \Rightarrow AB \parallel KP \Rightarrow$ из т. Фалеса $BP = 2y \cdot \frac{3x}{2x} = 3y$

$AB \parallel KP \Rightarrow \angle BAP = \angle APT = \alpha \Rightarrow \triangle ABP$ - равнобедренный $\Rightarrow AP = 3y$

6) $\triangle ABC \sim \triangle KPC$, $k = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{25 S_{KPC}}{4} = 25$

7) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{7}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{49}{74}}$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{74}}$

8) $S_{APC} = 10 = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot 6y^2$;

$20 = 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot 6y^2$;

$10 = \frac{7 \cdot 5}{74} \cdot 6y^2$;

$\frac{5\ 74 \cdot 2}{7 \cdot \cancel{5} \cdot 6} = y^2$;

$y = \sqrt{\frac{74}{21}}$;

9) Пусть $AT = \cancel{5z}$, тогда $AO = \cancel{7}\,5\, z$ $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5}\right)$ $\triangle AOT$ - прямоугольный т.к AO - радиус ω AT - касательная; $OT = \sqrt{74}\, z$, OT - диаметр

$2R = \sqrt{74}\, z = \frac{5x}{\sin 2\alpha} \Rightarrow z = \frac{5x}{\sin 2\alpha \sqrt{74}}$

10) т. косинусов для $\triangle APC$:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$

$25x^2 = 9y^2 + 4y^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot y^2\, \frac{7 \cdot 5 \cdot 2}{74}$;

$25x^2 = 9\,\frac{74}{21} + 4\,\frac{74}{21} - 4 \cdot 3\, \cancel{\frac{74}{21}}\, \cancel{\frac{7 \cdot 5 \cdot 2}{74}}$;

$25x^2 = 13\,\frac{74}{21} - 40$

$x^2 = \frac{13 \cdot 74 - 40}{21}$

$25x^2 = y^2 \left(\cancel{13} - \frac{420}{21}\right)$

$5x = \sqrt{20}$

$25x^2 = y^2 \left(13 - \frac{12 \cdot 5 \cdot 7}{74}\right)$;

$x^2 = \frac{16}{15}$;

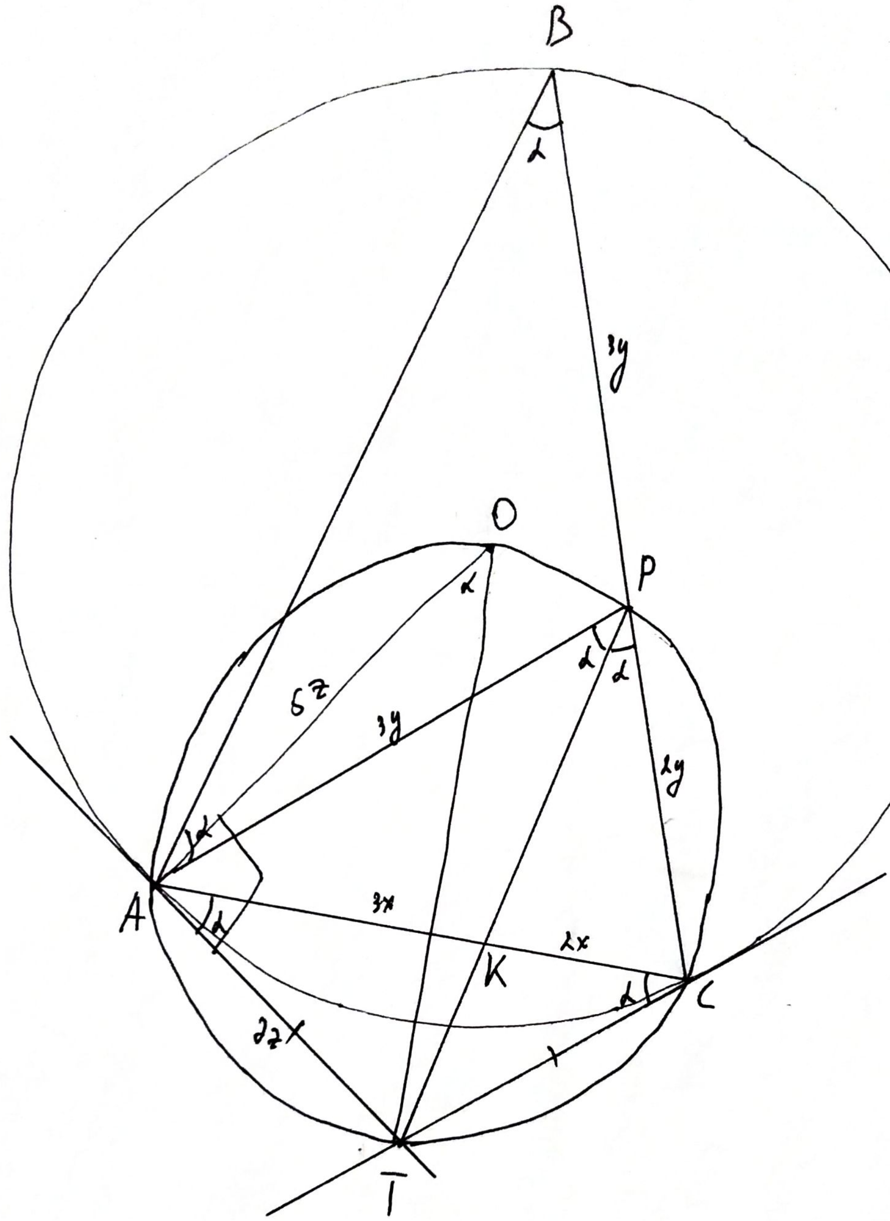
$x = \frac{4}{\sqrt{15}} \Rightarrow 5x = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\cancel{\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}$ $\sqrt{20}$

4

Чистовик

№6



1) Т.к. CT, AT — касательные к ω, то $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ \Rightarrow OATC$ — вписанный, P — лежит на той же окружности что и $O\,A\,C\,T$

2) $AT = CT$ как отрезки касательных проведённых из одной точки $\Rightarrow$
$\Rightarrow \smile AT = \smile TC \Rightarrow \angle APT = \angle TPC$, пусть $\angle APT = \alpha$, тогда $\angle TPC = \alpha$
т.к. $\angle TAC$ опирается на $\smile TC$, то $\angle TAC = \alpha$; т.к. $\angle ACT$ опирается на $\smile AT$ то $\angle ACT = \alpha$

3) $\angle ABC$ опирается на дугу $\smile AC$ окружности ω, $\angle CAT$ опирается на $\smile AC$ окружности $\omega \Rightarrow \angle ABC = \angle TAC = \alpha$

Чистовик

№5

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

2) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

3) $\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)} 5x-1$

Пусть 1-ый и 2-ой логарифмы равны t, 3-ий равен $t-1$, тогда:

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1}^{\,t} = 4x+1, \\ (4x+1)^t = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2, \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^{t-1} = 5x-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{5x-1}^{\,t} = 4x+1, \\ \left(\sqrt{5x-1}\right)^{t^2} = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2; \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^{t-1} = 5x-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{5x-1}^{\,t} = 4x+1, \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^{\frac{t-1}{2}t^2} = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \quad (1) \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^{t-1} = 5x-1 \end{cases}$$

1) $\left(\frac{x}{2}+2\right)^{t^2\frac{t-1}{2}} = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2;$

$\frac{x}{2}+2=1$ или $t^2(t-1)=4$

т.к. основание логарифма не равно 1 это решение не подходит

$t=2$ или $t^2+t+2=0$

Действительных корней нету

Подставив $t=2$ получим $x=2$, однако это значение не подходит под 3-ий логарифм.

Теперь если ~~$\sqrt{5x-1}$~~ равны 1-ый и 3-ий а 2-ой на 1 меньше получим также как и в предыдущем случае $t=2, x=2$ и на этот раз $x=2$ подходит

Теперь если 1-ый на 1 меньше 2-го и 3-го логарифмов получим аналогично предыдущим пунктам $t=2$, однако для 1-го логарифма такого x не существует

Ответ: 2

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 6, \\ НОК(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}; \end{cases}$$

Т.к. $НОД(a; b; c) = 6$, то пусть $a = 6a_1$ $b = 6b_1$ $c = 6c_1$, $НОД(a_1; b_1; c_1) = 1$

Тогда $НОК(a; b; c) = 6 \cdot a_1 b_1 c_1 = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$$a_1 b_1 c_1 = 2^{14} \cdot 3^{16}$$

Далее рассмотрим случаи:

1) Если одно из чисел равно $2^{\cancel{15}\,14} \cdot 3^{\cancel{16}\,15}$, то такое количество троек 3.

2) Если одно из чисел равно 2^{14} то троек $16 \cdot C_3^1 = 16 \cdot 3$

3) Если одно из чисел равно 3^{15} то троек $16 \cdot C_3^1 = 15 \cdot 3$

4) Если одно из чисел равно 1 а два других 2^{14} и 3^{15} то таких троек $C_3^1 C_2^1 = 6$

Таким образом надо сложить результаты из 1, 2, 3 пунктов и отнять 4 пункт т.к во 2 и 3 есть общие случаи и их количество посчитано в 4 пункте

$$16 \cdot 3 + 15 \cdot 3 + 3 - 6 = 90$$

Ответ: 90