Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102948**

ID профиля: **829790**

Вариант 17

Чистовик

№1

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{2a_1+9d}{2}\cdot 10+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < \frac{2a_1+9d}{2}\cdot 10+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16da_1+55d > 10a_1+45d+1 \\ a_1^2+16da_1+60d < 10a_1+45d+17 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 10a_1-15d+17 > 10a_1-10d+1$$

$$16 > 5d$$

$$d < \frac{16}{5}$$

Т.к. прогрессия состоит из целых чисел $a_n \in \mathbb{Z}$ и $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$$ Т.к. $d>0$, то

$d = 1; 2; 3$

1) $d=1$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+45+1 \\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+45+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9 > 0 \\ a_1^2+6a_1-2 < 0 \end{cases}$$

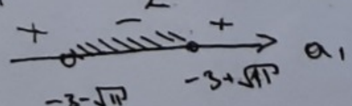
$$(a_1+3)^2 > 0$$

$$a_1 \neq -3$$

$$a_1^2+6a_1-2<0$$

$$D_a = 36+8 = 4\cdot 11$$

$$a_1 = \frac{-6\pm 2\sqrt{11}}{2} = -3\pm\sqrt{11}$$



$$a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$$

Смотри стр. 2

Чистовик

2) $d=2$

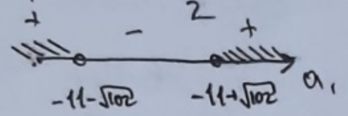
$$\begin{cases} a_1^2 + 32a_1 + 110 > 10a_1 + 90 + 1 \\ a_1^2 + 32a_1 + 120 < 10a_1 + 90 + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \; a_1^2 + 22a_1 + 19 > 0 \\ ② \; a_1^2 + 22a_1 + 13 < 0 \end{cases}$$

① $a_1^2 + 22a_1 + 19 > 0$

$D_a = 22^2 - 4\cdot 19 = 4(121-19) = 4\cdot 102$

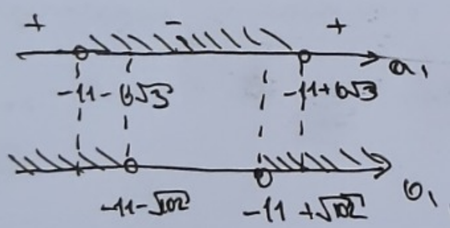
$a_1 = \frac{-22 \pm 2\sqrt{102}}{2} = -11 \pm \sqrt{102}$



② $a_1^2 + 22a_1 + 13 < 0$

$D_{a_1} = 22^2 - 4\cdot 13 = 4(121-13) = 4\cdot 108$

$a_1 = \frac{-22 \pm 2\sqrt{108}}{2} = -11 \pm \sqrt{4\cdot 27} = -11 \pm 6\sqrt{3}$



$-11 - 6\sqrt{3} < -11 - \sqrt{102}$

$6\sqrt{3} > \sqrt{102}$

$108 > 102$ – верно

$-11 + 6\sqrt{3} > -11 + \sqrt{102}$

$108 > 102$ – верно

$-11 - 6\sqrt{3} > -22$

$6\sqrt{3} < 11$ – верно

$-11 - \sqrt{102} < -21$

$102 > 100$ – верно

$\Rightarrow$ между ними нет целых a_1

$-11 + 6\sqrt{3} < 0$

$11 > 6\sqrt{3}$

$121 > 108$ – верно

$-11 + \sqrt{102} > -1$

$102 > 100$ – верно

$\Rightarrow$ между ними нет $a_1 \in \mathbb{Z}$

3) $d=3$.

$$\begin{cases} a_1^2 + 48a_1 + 165 > 10a_1 + 135 + 1 \\ a_1^2 + 48a_1 + 180 < 10a_1 + 135 + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \; a_1^2 + 38a_1 + 29 > 0 \\ ② \; a^2 + 38a_1 + 28 < 0 \end{cases}$$

① $a_1^2 + 38a_1 + 29 > 0$

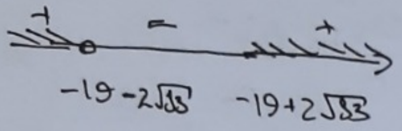
$D_{a_1} = 38^2 - 4\cdot 29 = 4(19^2 - 29) = 4(361-29) = 4\cdot 332 = 16\cdot 83$

②

См. на странице 3

Чистовик

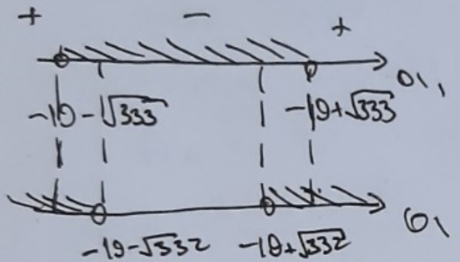
$$a_1 = \frac{-38 \pm 4\sqrt{83}}{2} = -19 \pm 2\sqrt{83}$$



б) $a_1^2 + 38a_1 + 28 < 0$

$D_{a_1} = 38^2 - 4\cdot 28 = 4(361-28) = 4\cdot 333 = 4\cdot 9\cdot 37$

$$a_1 = \frac{-38 \pm 6\sqrt{37}}{2} = -19 \pm 3\sqrt{37}$$



$-19-\sqrt{333} < -19-\sqrt{332}$

$333 > 332$

$-19+\sqrt{333} > -19+\sqrt{332}$

$333 > 332$

$-19-\sqrt{333} > -38$

$19 > \sqrt{333}$ - верно

$-19-\sqrt{332} < -37$

$332 > 324$

$\Rightarrow$ нет целых a_1 на промежутке

$-19+\sqrt{332} > -1$

$332 > 324$ - верно

$-19+\sqrt{333} < 0$

$333 < 361$ - верно

$\Rightarrow$ нет целых a_1

Ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

3

3 ~~8~~

№3 Чистовик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) & (2) \end{cases}$$

При $a+b \ge 1$

$2a+2b \ge 2 \Rightarrow \min(2a+2b; 2) = 2$

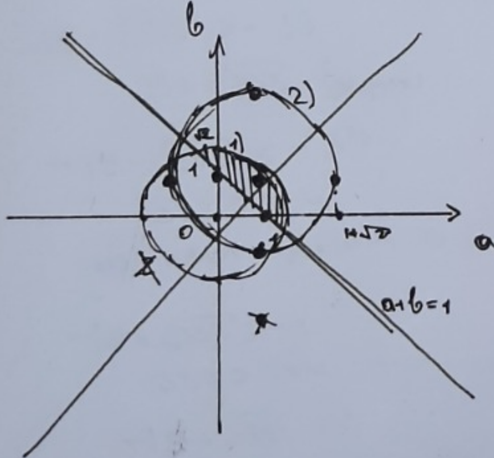
При $a+b<1$

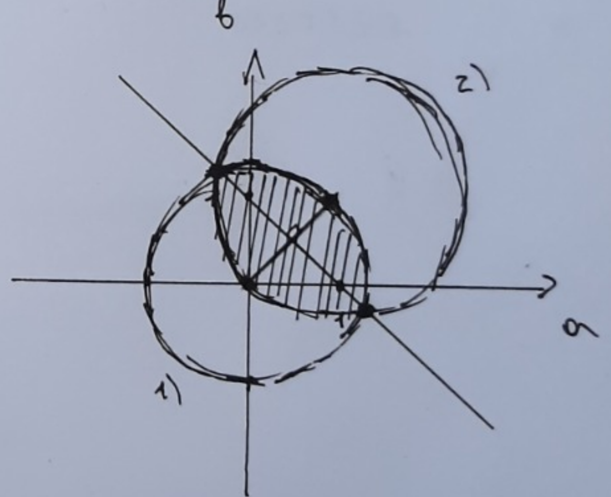
$2a+2b<2 \Rightarrow \min(2a+2b; 2) = 2a+2b$

Рассмотрим графики неравенств в осях Oa и Ob

(2) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b \ge 1 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b<1 \\ a^2+b^2 \le 2a+2b \quad |+2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 1) \begin{cases} a+b \ge 1 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \text{ — } \sout{\text{Окружность}} \text{ круг с центром в } (0;0) \text{ и радиусом } \sqrt{2} \\ 2) \begin{cases} a+b<1 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \end{cases} \text{ — круг с центром в } (1;1) \text{ и радиусом } \sqrt{2} \end{array}\right.$





~~Найдем точки пересечения окружностей с прямой~~

Проведем линию центров, это прямая $b=a$

$\Rightarrow a+b=1 \perp a-b=0$ Они пересекаются в $a=b=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a+b=1$ — общая хорда.

(1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \Leftrightarrow (a-x)^2+(b-y)^2 \le 2$ — круг с центром в $(x;y)$ и радиусом $\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ исходная система имеет решения, если (1) пересекает (2)

1) $\begin{cases} \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \le 2\sqrt{2} \\ x+y \ge 1 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \le 2\sqrt{2} \\ x+y<1 \end{cases}$

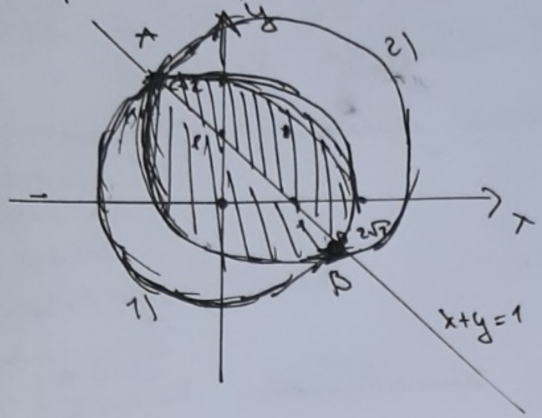
(4)

См. на стр. 5.

Чистовик

1) $\begin{cases} x^2+y^2 \le 8 \\ x+y \ge 1 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \le 8 \\ x+y \le 1 \end{cases}$

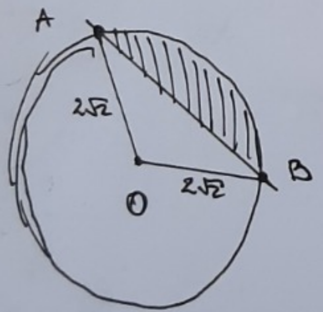
Рассмотрим графики в осях $(x;y)$



$x+y=1$ - общая хорда, аналогично: проведём линию центров, они перпендикулярны и $x+y=1$ делит её пополам.

$\Rightarrow$ M - получившаяся фигура

Найдем площадь половины и умножим на 2



Координаты A и B удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1-x \\ x^2+1-2x+x^2=8 \end{cases}$$

$$2x^2-2x-7=0$$

$$D_x = 4+4\cdot 2\cdot 7 = 4\cdot 15$$

$$x = \frac{2\pm 2\sqrt{15}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{15}}{2} \quad y = \frac{1\mp\sqrt{15}}{2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2} = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{15}-1-\sqrt{15}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{15}-1+\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{4}+\frac{15}{4}} = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

По т. косинусов для $\triangle AOB$:

$$AB^2 = OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$$

$$\frac{15}{2} = 16-16\cos\angle AOB$$

$$\cos\angle AOB = \frac{17}{32} \Rightarrow \sin\angle AOB = \sqrt{1-\left(\frac{17}{32}\right)^2}$$

$$\angle AOB = \arccos\frac{17}{32} \quad \sin\angle AOB = \frac{7\sqrt{15}}{32}$$

$$S_M = 2\left(\frac{\pi\cdot 8\arccos\frac{17}{32}}{2\pi\ \cancel{D30}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{7\sqrt{15}}{32}\cdot 8\right)$$

$$S_M = 8\arccos\frac{17}{32} - \frac{7\sqrt{15}}{4}$$

Ответ: $S_M = 8\arccos\frac{17}{32} - \frac{7\sqrt{15}}{4}$ 5

Черновик.

№3
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 2\\ a^2+b^2\leq \min(2a+2b,2)\end{cases}$$

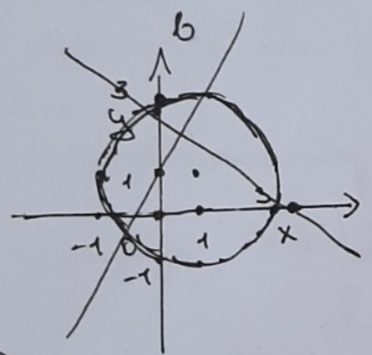
$2(a+b) \vee 2$

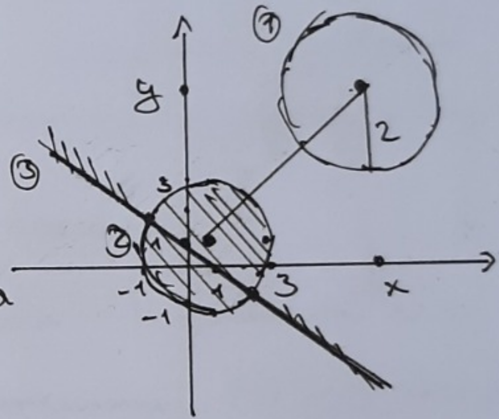
$a+b \vee 1 \Rightarrow$ Если $a+b\geq 1$, то $\min(2a+2b;2)=2a+2b$

Если $a+b<1$, то $\min(2a+2b,2)=2$

1) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 2\\ a^2+b^2\leq 2a+2b \quad 1+2\\ \cancel{a+b\geq 1}\ a+b\geq 1\end{cases}$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 2 & (1)\\ (a-1)^2+(b-1)^2\leq 2 & (2)\\ a+b\geq 1 & (3)\end{cases}$$





$\Rightarrow$ Решения системы существуют, когда (1), (2) и (3) пересекаются $\Rightarrow$ либо окружность (2) касается окружности (1), ~~либо~~ или пересекает её выше прямой (3), либо (3) касается (1) или пересекает её и точка касания принадлежит (2)

$\cancel{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\leq 4}$

$\cancel{(x-1)^2+(y-1)^2\leq 16}$ ~~тогда~~

~~При Если когда~~

~~При чем $x+y\geq 1$~~

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\leq 16\\ x+y\geq 1\end{cases}$$ или $$\begin{cases}x+y<1\\ \end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=2\\ a+b=1\end{cases}$$

$a=1-b$

$b^2-2b+1+b^2=2$

$2b^2-2b-1=0$

$b^2-b-\frac{1}{2}=0$

~~$b=1\quad b=-\frac{1}{2}$~~

$D=1+2=3$

$b=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$a=\cancel{\sqrt{3}}\ \frac{1}{2}$

21102948 (U829790 M1303054)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102948**

ID профиля: **829790**

Вариант 17

№4 Чистовик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 = 2\cdot 3 \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

Очевидно, что в разложение на простые множители чисел a, b и c могут входить только степени "2" и "3", иначе бы ~~другая степень простого~~ степень другого простого числа входила бы в НОК(a;b;c)

Минимум одно из чисел включает в себя 3^1 и 2^1, иначе:
Если ни одно не включает в себя 3^1 и 2^1, тогда

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}$ $b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}$ $c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}$ $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1 \neq 1$ $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2 \neq 1$

$$НОД(a;b;c) = 2^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 3^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)} = 2\cdot 3$$

$$\begin{cases} \min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1) = 1 \\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2) = 1 \end{cases}$$ Но ни одно не равно 1. Противоречие

Аналогично минимум 1 включает в себя 3^{16} и 2^{15}, иначе:

$$НОК(a;b;c) = 2^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 3^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)} = 3^{16}\cdot 2^{15}$$

$$\begin{cases} \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1) = 15 \\ \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2) = 16 \end{cases}$$ Противоречие

1) Расставим степени "2" по a; b; c
=> в одном 2^1 – 3 способа выбрать
в другом 2^{15} – 2 способа выбрать
в последнем числе любая степень "2" от 2^1 до 2^{15}, если степень меньше, то 2^1 – не минимальное => НОД другой, если больше, то 2^{15} – не максимальное => НОК другой => 15 способов

2) Расставим степени "3":
Аналогично в одном 3^1 – 3 способа, в другом 3^{16} – 2 способа
в третьем любая степень от 1 до 16 – 16 способов
Все получившиеся числа перемножаем т.к. они не зависят друг от друга.
Итого: $(3\cdot 2\cdot 15)\cdot(3\cdot 2\cdot 16) = 9\cdot 4\cdot 15\cdot 16 = 8640$

<u>Ответ</u>: 8640

1

№5 Числами.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Ограничения:

$x>\frac{1}{5}$ $x\neq 0$

$x>-\frac{1}{4}$ $x\neq\frac{2}{5}$

$x\neq -2$

$x>-4$

$\Downarrow$

$x>\frac{1}{5}$ $x\neq\frac{2}{5}$

$5x-1=a$

$4x+1=b>1$

$\frac{x}{2}+2=c>1$

Это есть исходные числа равны:

$2\log_a b$; $2\log_b c$; $\log_c a$

1) $\begin{cases}\log_a b=\log_b c\\ \log_c a+1=2\log_b c\end{cases}$

$c=b^{\log_a b}$

$\log_{b^{\log_a b}}(a)+1=2\log_b b^{\log_a b}$

$\frac{\log_b a}{\log_a b}+1=2\log_a b$

Пусть $\log_a b=t$

$\frac{1}{t^2}+1=2t$ $t\neq 0$ т.к. $b>1$

$1+t^2=2t^3$

$2t^3-t^2-1=0$

$(t-1)(2t^2+t+1)=0$

$t=1$ или $2t^2+t+1=0$

$D_t=1-8<0$

$\log_a b=1$

$b=a$

~~$c=b^{\log_a b}=b=a$~~ $c=b^{\log_a b}=b$

$5x-1=4x+1$

$x=2$

$\frac{x}{2}+2=4x+1$

$x+4=8x+2$

$7x=2$!?

$\Rightarrow$ данный случай невозможен

См. на стр. 3

Числитель

2) $\begin{cases} 2\log_a b = \log_c a \\ 2\log_b c + 1 = \log_c a \end{cases}$

$b^2 = a^{\log_c a}$

$b = a^{\frac{\log_c a}{2}}$

$2\log_b c^{2} + 1 = \log_c a$

$\log_{a^{\frac{\log_c a}{2}}} c^2 + 1 = \log_c a$

$\frac{4\log_a c}{\log_c a} + 1 = \log_c a$

Пусть $\log_c a = t$

$\frac{4}{t^2} + 1 = t$

$4 + t^2 = t^3$

$t^3 - t^2 - 4 = 0$

$(t-2)(t^2+t+2) = 0$

$t = 2$ или $t^2 + t + 2 = 0$

$\Rightarrow$ $D_t = 1 - 8 < 0$

$a = c^2 \Rightarrow b = a$

$5x - 1 = (\frac{x}{2} + 2)^2$

$20x - 4 = (x+4)^2$

$20x - 4 = x^2 + 8x + 16$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$x = 2$ или $x = 10$

$5x - 1 = 4x + 1$

$x = 2$ $\Rightarrow$ $x = 10$ не подходит

3) $\begin{cases} 2\log_b c = \log_c a \\ 2\log_a b + 1 = \log_c a \end{cases}$

~~$c = b^{\log}$~~

$a = c^{2\log_b c}$

$2\log_{c^{2\log_b c}} b + 1 = 2\log_b c$

См. стр. 4

Чистовик

$$\frac{\log_c b}{\log_b c} + 1 = 2\log_b c$$

Пусть $\log_b c = t$

$$\frac{1}{t^2} + 1 = 2t$$

$$1 + t^2 = 2t^3$$

$$2t^3 - t^2 - 1 = 0$$

$t = 1$ или $2t^2 + t + 1 = 0$

$D = 1 - 8 < 0$

$\Rightarrow c = b$

$a = b^2$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 2 = \cancel{5x-1}\ 4x+1 \\ 5x - 1 = (4x+1)^2 \end{cases}$$

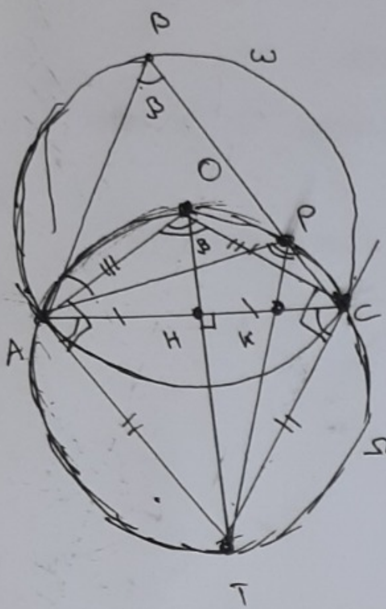
$$x + 4 = 4x + 1$$

$$x = 1$$

$5 - 1 = (4+1)^2$ - неверно $\Rightarrow$ решений нет.

<u>Ответ:</u> $x = 2$

№6 Чистовик



Дано.

ω - описана вокруг ABC

AOPC - вписанный в Ω

$S_{\Delta APK}=6 \quad S_{\Delta CPK}=4$

Решение:

$\angle AOC = 2\beta$ - центральный

$\angle APC = \angle AOC$ - опираются на $\overset{\frown}{AC}$ и AOPC - вписанный

$\angle TAC = \angle TCA = \beta$ - углы между хордой AC и касательными AT и CT соответственно равны вписанному $\angle ABC$ опир. на $\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow AT=TC$ и ΔATC - равнобедр.

$\Rightarrow \angle ATC = 180-2\beta$

$\angle ATC + \angle APC = 180^\circ \Rightarrow T \in \Omega$

$AO=OC=R_\omega \Rightarrow \Delta AOC$ - равнобедр. $\Rightarrow \Delta TAO = \Delta TCO$ по 2ум сторонам и углу между ними $\Rightarrow \angle ATO = \angle OTC = 90-\beta$

$\Rightarrow \angle THC = 180-90+\beta-\beta = 90 \Rightarrow AH=HC$

$\angle TAC = \angle TPC = \beta$ т.к. APCT - вписанный

$\Rightarrow \angle APK = 2\beta-\beta=\beta \Rightarrow PT$ - биссектриса

Пусть $PC = x$, тогда $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{\Delta APK}}{S_{\Delta CPK}} = \frac{6}{4} = \frac{AP}{PC} \Rightarrow AP = \frac{6}{4}x$

$S_{\Delta APC} = 4+6=10 = \frac{1}{2}AP\cdot PC\cdot \sin\angle APC = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{4}\cdot x^2\cdot\sin 2\beta$

$x^2\cdot\sin 2\beta = \frac{80}{6} = \frac{40}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{80}{6\sin 2\beta}$

Пусть $\angle CAB = \alpha \quad \angle ACB = \gamma$

$180-\beta = \alpha+\gamma$

$180-2\beta = \gamma + \angle CAP \qquad \alpha+\gamma-\beta = \gamma+\angle CAP \Rightarrow \angle CAP = \alpha-\beta$

$\Rightarrow \angle BAP = \alpha-\alpha+\beta = \beta \Rightarrow \Delta PAB$ - равнобедр.

$\Rightarrow BP = \frac{6}{4}x \Rightarrow BC = \frac{10}{4}x$

см. стр.6 $AB^2 = BP^2+AP^2 \mp 2BP\cdot AP\cos(180-2\beta)$

$AB^2 = \frac{36}{8}x^2 + \frac{36}{8}x^2\cos 2\beta = \frac{36}{8}x^2(\cos 2\beta+1) = \frac{36}{4}x^2\cos^2\beta$ 5

$\Rightarrow AB = \frac{6}{4} x \cos\beta$. т.к. $\cos\beta > 0$ т.к. $\beta < 90$ Числодика.

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4} x \cos\beta \cdot \frac{10}{4} x \cdot \sin\beta$

$= \frac{60}{32} x^2 \cdot \cos\beta \sin\beta = \frac{60}{32} \cdot \frac{80}{6 \cdot 2} \frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{60 \cdot 80}{32 \cdot 12}$

Ответ: а) $S_{\triangle ABC} = \frac{60 \cdot 80}{32 \cdot 12} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 5}{16 \cdot 2 \cdot 12} = 12{,}5$

Черновик.

№4 $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 = 2\cdot 3 \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$

$\cancel{abc = 2^{16}\, 3^{17}}$

$(3\cdot 2\cdot 15)\cdot(3\cdot 2\cdot 16) = 9\cdot 4\cdot 15\cdot 16$

$36 \times 16 = 216 + 36 = 576$

$576 \times 15 = 2880 + 576 = 8640$

№5 $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$2\log_a b$ $2\log_b c$ $\log_c a$

1) $\log_a b = \log_b c$ $\log_c a\cdot c = 2\log_b c$

$\cancel{\log_a b} = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$x \neq 0; 2$

$x > -\frac{1}{4}$

$x > \frac{1}{5}$

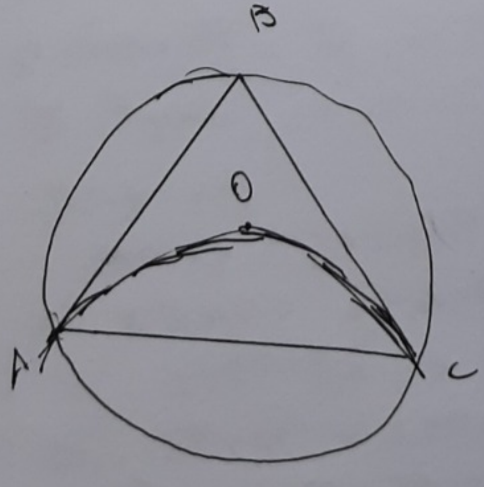
$x > -4$

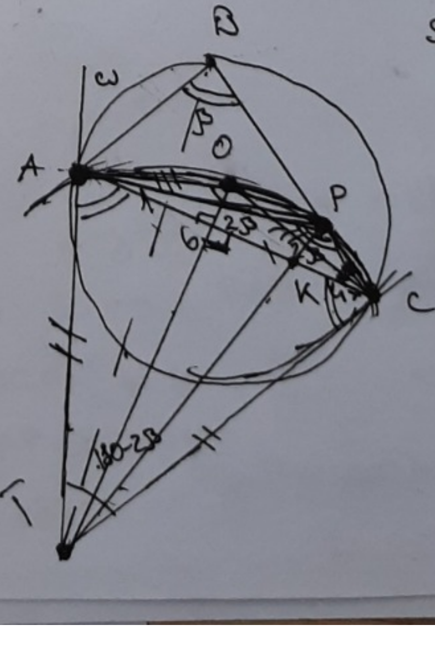
$\begin{cases} \log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \\ 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \log_{\frac{x}{2}+2}\left((5x-1)\left(\frac{x}{2}+2\right)\right) \end{cases}$

$AP = \frac{6}{4}PC = \frac{6}{4}x$

$10 = \frac{6}{8}x^2 \sin 2\beta$

№6





$S_{\triangle APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

$\frac{AP}{PC} = \frac{6}{4}$

21102948 (U829790 M1303055)