

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102926**

ID профиля: **857132**

Вариант 17

Задача 1.

В условии задачи $a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{Z}$
 Пусть d - разность арифметич. прогрессии.

тогда $S = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$.

$a_6 a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 16a_1d + 55d^2$

$a_7 a_{11} = (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$

тогда справедлива система:

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1, \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17. \end{cases}$$

т.е. $a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 + 16 > 10a_1 + 45d + 17 > a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$

$\Rightarrow 16 > 5d^2$

Реш $d \geq 2 \quad 5d^2 \geq 20$

\Rightarrow т.к. $d \in \mathbb{N}$, то $d = 1$.

т.е. система:

$$\begin{cases} a_1 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46, \\ a_1 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17. \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3 - \sqrt{7}; \sqrt{7} - 3). \end{cases}$

Оценим:

$-6 < -3 - \sqrt{7} < -5$

$-1 < \sqrt{7} - 3 < 0$

т.е. $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

Ответ: $\{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Задача 13.

Поймём, что такое $a^2 + b^2 \leq \min(2a + 2b, 2)$, потому что первое неравенство в системе известно и задаёт круг с центром в точке $(a; b)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

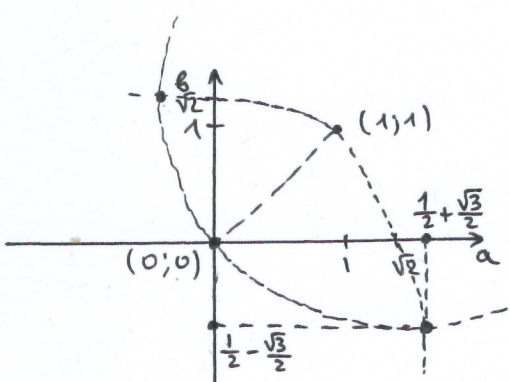
1 случай $a + b \leq 1 \Rightarrow 2a + 2b \leq 2$
 $\Rightarrow a^2 + b^2 \leq 2a + 2b \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2$
 Круг с центром в $(1; 1)$ относительно координат a, b и радиусом $\sqrt{2}$.

2 случай $a + b \geq 1$
 $\Rightarrow 2a + 2b \geq 2$
 $\Rightarrow a^2 + b^2 \leq 2$ - окр с центром в $(0; 0)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

1) Точки пересечения:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

~~т.е. необходимо понятие ГМТ точек, удалённых от где $x=a$ $y=b$.~~



2) По сути необходимо понять ГМТ, что все точки удалены на расстояние меньше $\sqrt{2}$ (не превосходящ.) от Φ , где Φ - множество точек $(x \neq a, y \neq b)$ заключённых между дугами окруж.

3) Пусть верхняя точка пересечения A , нижняя - B
 $C(0; 0); D(1; 1)$
 $\angle ADC = 60^\circ; \angle BDC = 60^\circ$, т.к. $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ - равносторонние.

$\Rightarrow \angle ADB = 120^\circ$

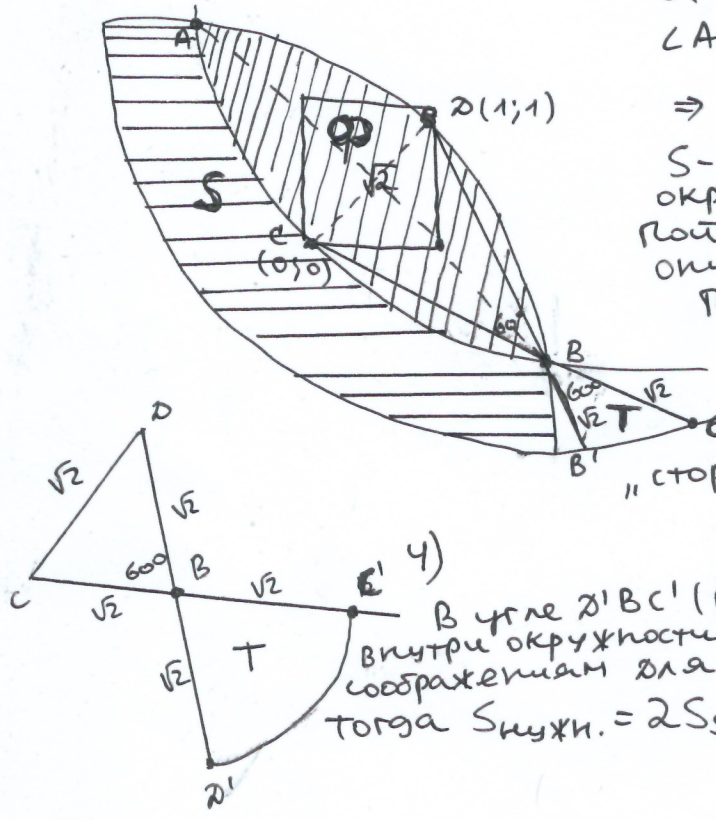
S - множество точек пересечения "угла" ADB и окружности в т. D и радиуса $2\sqrt{2}$.

Поймём, что в угле ADB S - ГМТ таких, что они ~~попадают~~ и только они ~~попадают~~.

Пусть $X \in ADB$ (просто плоскостному углу).

Тогда $R_X = |XD - \sqrt{2}|$; R_X - расстояние от X до Φ ,

но $|XD - \sqrt{2}|$ это и есть что-то в пределах S , аналогично с другой "стороны" (полуплоскости отн. ADB).



В угле $D'BC'$ (множество T) подходящие точки лежат внутри окружности с центром в т. B и радиусом $\sqrt{2}$, затем же ~~соображениям~~ для т. A аналогично
 тогда $S_{\text{нужн.}} = 2S_S - S_{\Phi} + 2S_T = M$;

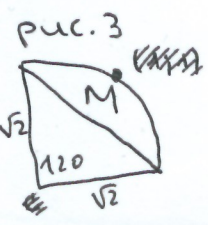
$$S_S = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{8\pi}{3}$$

$$S_T = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

$$S_{\Phi} = 2 \cdot S_M = 2\pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

(см. рис. 3)

тогда $S_{\text{нужн.}} = 6\pi - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{14\pi}{3} + \sqrt{3}$.



Ответ: $\frac{14\pi}{3} + \sqrt{3}$.

3

$S < \dots -1$
 $S > \dots -17$

$a_1 - ?$

① $S = \text{sum } 1 \dots 10$
 $a_1, a_2 \dots \in \mathbb{Z}$

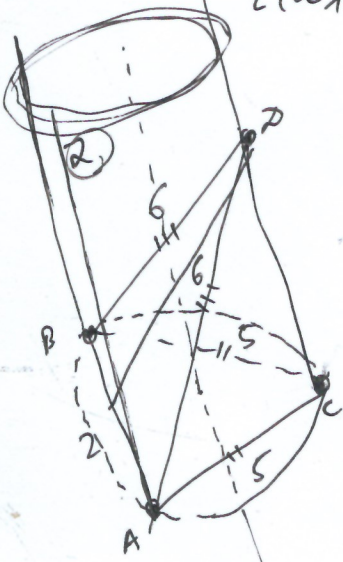
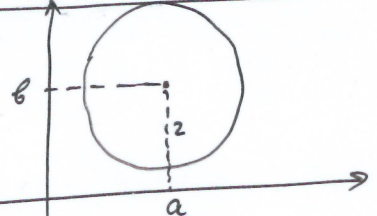
$a_6 = a_1 + 5d$
 $a_{12} = a_1 + 11d$
 $a_7 = a_1 + 6d$
 $a_{11} = a_1 + 10d$

$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > S + 1 \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S + 17 \end{cases}$

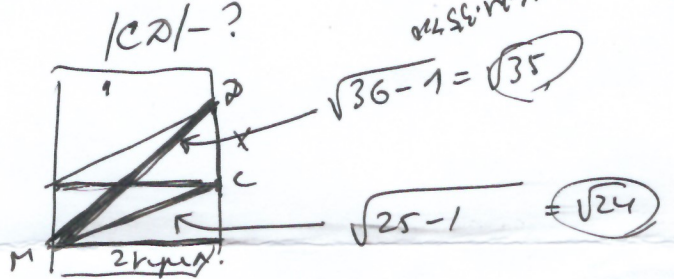
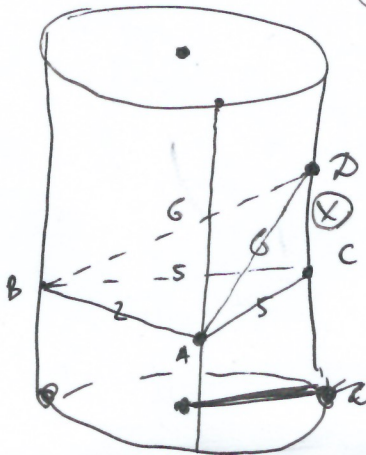
(a) $S = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$

(a) $\begin{cases} a_1^2 + a_1 \cdot 16d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + a_1 \cdot 16d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$

$5d^2 \geq 20$
 $d \geq 2$
 $16 \geq 5d^2$
 $d = 1$



$(CD) \parallel (OO_1)$



$24 \cdot 59 \cdot 91 + 2 \cdot 181 = 118$

$S = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot k \cdot x = k^2 \cdot x$

$S = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}k^2x = 9k^2$

$= \frac{1}{4} \sqrt{24 \cdot 4 \cdot 35 - (24 + 35 - x^2)^2}$

$9k^2x^2 = \sqrt{24 \cdot 4 \cdot 35 - (59 - x^2)^2}$

$24 \cdot 4 \cdot 35 - 59^2 - x^4 + 2 \cdot 59x^2 - 9k^2x^2 = 0$
 $x^4 + x^2(9k^2 - 2 \cdot 59) + 59^2 - 24 \cdot 4 \cdot 35 = 0$

$x^4 + x^2(9k^2 - 2 \cdot 59) + 59^2 - 24 \cdot 4 \cdot 35 = 0$

$x^2 = \frac{2 \cdot 59 - 9k^2 \pm \sqrt{(\dots)^2 - 4(59^2 - 24 \cdot 4 \cdot 35)}}{2}$

$(a-1)$
 $a^2 - 2at + 4 + b^2 - 2bt + 1 \leq 2$
 $a^2 + b^2$
 $24b = 1$
 $a^2 + b^2 = 2$

$59 \cdot 2 \cdot 91 + 2 \cdot 181 = 118$

$9k^2 \sqrt{59} \cdot 2$

$\sqrt{2} \sqrt{59 \cdot 2}$

$814 - 2 \cdot 91 \cdot 2 \cdot 59 + 16 \cdot 2$

$814 + 16 \cdot 2 - 2 \cdot 91 \cdot 2 \cdot 59 - 4 \cdot 59^2 + 16 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 35 > 0$

$2 \cdot 59 - 9k^2 > 0$
 $(2 \cdot 59 - 9k^2)^2 - 4 \cdot (59^2 - 24 \cdot 4 \cdot 35) > 0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102926**

ID профиля: **857132**

Вариант 17

Задача 4:

Работаем в области натуральных значений

$$\text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \Rightarrow 2^{15} \cdot 3^{16}; a, b, c \Rightarrow a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2}$$

т.к. $a, b, c : 6$, то $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \geq 1$

т.к. $\text{НОД}(a; b; c) = 6$, то какое-то из этих чисел равно $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 1$, а остальные ≥ 1 . Аналогично для $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = 1$.

$\text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$, то одно из $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ равно 15, а остальные меньше 15 (не строго меньше), аналогично для $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = 16$, а остальные ≤ 16 .

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — это перестановки чисел 1, x, 15, где $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 15$.

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — перестановки 1, y, 16, $y \in \mathbb{N}$, $y \leq 16$.

1 случай: Если $x \in \{2; 14\}$, $y \in \{2; 15\}$, то подходит любое разбиение на пары, т.е. способов $13 \cdot 14 \cdot 3! = 1092$.

2 случай: $x = 2$ или $x = 15$, $y \in \{2; 15\}$, то способов разбить на пары 3.
 \Rightarrow способов $3 \cdot 2 \cdot 14 = 84$.

3 случай: $y = 1$ или $y = 16$. аналогично: способов $3 \cdot 2 \cdot 13 = 78$.
 $x \in \{2; 14\}$

4 случай: $x \in \{1; 15\}$, $y \in \{1; 16\}$. Спосособов разбить на пары 2.
 т.е. всего $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$$\text{Итого: } 1092 + 84 + 78 + 8 = \underline{1262}$$

Ответ: 1262.

Задача 5:

Для полного и подробного решения необходимо рассмотреть 3 варианта, при этом область определения учитывается для системы в целом. или воспользоваться (*).

т.е. интегралы определены:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 2 > 0 \\ 4x + 1 > 0 \\ 5x - 1 > 0 \end{cases}$$

Пусть два из этих чисел равны t , а оставшееся число равно $t-1$.
при этом есть форма задачи:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow t^2(t-1) = 4 \quad \leftarrow \text{из степеней и на ОДЗ.}$$

т.е. $t^3 - t^2 - 4 = 0$
 $(t-2)(t^2+t+2) = 0$ — имеет в области действительных значений только корень $t=2$.

т.е. какие-то два числа должны быть равны 2, а оставшееся равно 1.

$$2 \log_{5x-1}(4x+1) = 2 \Leftrightarrow 5x-1 = 4x+1 \Rightarrow x=2 \quad (\text{подходит в ОДЗ})$$

$$2 \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \quad (\text{подходит в ОДЗ})$$

1) $x = \frac{2}{7} \Rightarrow 2 \log_{5x-1}(4x+1) = 2 \log_{\frac{15}{7}} \frac{15}{7} \rightarrow$ это не 1 и не 2 \rightarrow т.е. $x \neq \frac{2}{7}$.
 и $\log_{\frac{2}{7}} \left(\frac{2}{7} + 2\right) \neq 1, \neq 2$.

2) $x=2$
 $\Rightarrow \log\left(\frac{x}{2}+2\right)(5x-1) = \log_3 9 = 2$
 $2 \log(4x+1)\left(\frac{x}{2}+2\right) = 2 \log_9 3 = 1$ } т.е. $x=2$ — подходит.

т.е. единственное значение, при котором это выполняется $x=2$.

Ответ: {2}.

Задача 6.

а)

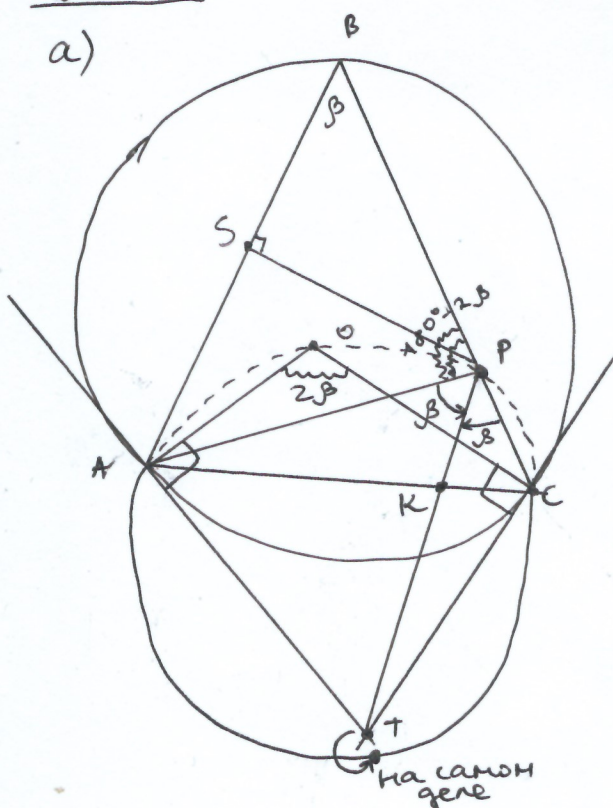


Рисунок соответствует условиям.
 $\angle OAT = \angle OCT = \frac{\pi}{2}$ (касание)
 $\Rightarrow A, O, C, T$ - лежат на одной окружности
 A, O, C, P тоже лежат на одной окружности,
 но окружность по точкам A, O, C единственная,
 тогда T, A, O, C, P лежат на одной окружности.
 $\Rightarrow \angle APT = \angle TPC = \beta$ (т.к. $|TA| = |TC|$ по теореме
 о касательных,
 проходящих из одной
 точки).

$\Rightarrow PT$ - биссектриса угла \widehat{APC} . ← условие
 $\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{|AK| \cdot \rho(P; (AC))}{|KC| \cdot \rho(P; (AC))} = \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
 ↑ расстояние от T, P до прямой (AC) .

Пусть $|AK| = 3x$
 $|KC| = 2x$
 $\angle AOC = \angle APC = 2\beta$ (опираются на AC).

$\Rightarrow \angle ABC = \beta$ (как вписанный)
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ (по трём углам: $\angle ABC = \angle KPC$, $\angle C$ - общий).
 и коэффициент подобия: $k = \frac{|CK|}{|AC|} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

тогда $S(ABC) = \frac{1}{k^2} \cdot S(KPC) = \frac{25}{4} \cdot 4 = 25$.

Ответ: а) 25.

б) известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{7}{5}$.
 Найти $|AC|$.

из уже найденного: $S_{BAP} = S_{ABC} - S_{APK} - S_{KPC} = 25 - 6 - 4 = 15$.
 Пусть PS - высота в $\triangle APB$. ($\angle BAP = \angle APC - \angle ABC = \beta$
 $\Rightarrow \triangle APB$ - равнобедренный; S - середина AB).
 $S_{BAP} = \frac{1}{2} \cdot |PS| \cdot |AB| = |PS| \cdot |BS| = 15$ и условие: $\frac{|PS|}{|BS|} = \tg \widehat{ABP} = \frac{7}{5}$.

$\Rightarrow \begin{cases} |BS| = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \\ |PS| = \sqrt{21} \end{cases}$

$|BP| = \sqrt{|BS|^2 + |PS|^2} = \sqrt{21 + \frac{25 \cdot 3}{7}} = \sqrt{\frac{222}{7}}$

т.к. PK - биссектриса $\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{|AK|}{|CK|} = \frac{3}{2}$

$\rightarrow |AP| = |BP| = \frac{2}{3} |PC| = \frac{3}{2} |PC|$
 $|PC| = \frac{2}{3} |AP| = \frac{2}{3} |BP| = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{222}{7}}$

$|BC| = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{222}{7}}$
 $|AB| = 2 \cdot |BS| = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{ABC}} = \sqrt{\frac{300}{7} + \frac{25 \cdot 222}{9 \cdot 7} - 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot 5 \sqrt{\frac{222}{7}} \cdot \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}}$
 $= \sqrt{\frac{300 \cdot 9 + 25 \cdot 222}{7 \cdot 9} - 2 \cdot \frac{250}{7}} = \sqrt{\frac{5550 + 5550}{7 \cdot 9} - \frac{500}{7}} = \sqrt{\frac{450}{9 \cdot 7}}$

Ответ: б) $\frac{25\sqrt{6}}{3\sqrt{7}}$; а) 25.

8-4-4 (t-2) $\frac{7}{7} \frac{2}{7} \frac{2}{7}$ ЧЕРНОВИК

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$
 $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$
 $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$
 $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$

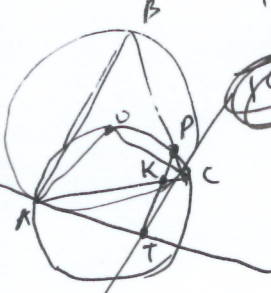
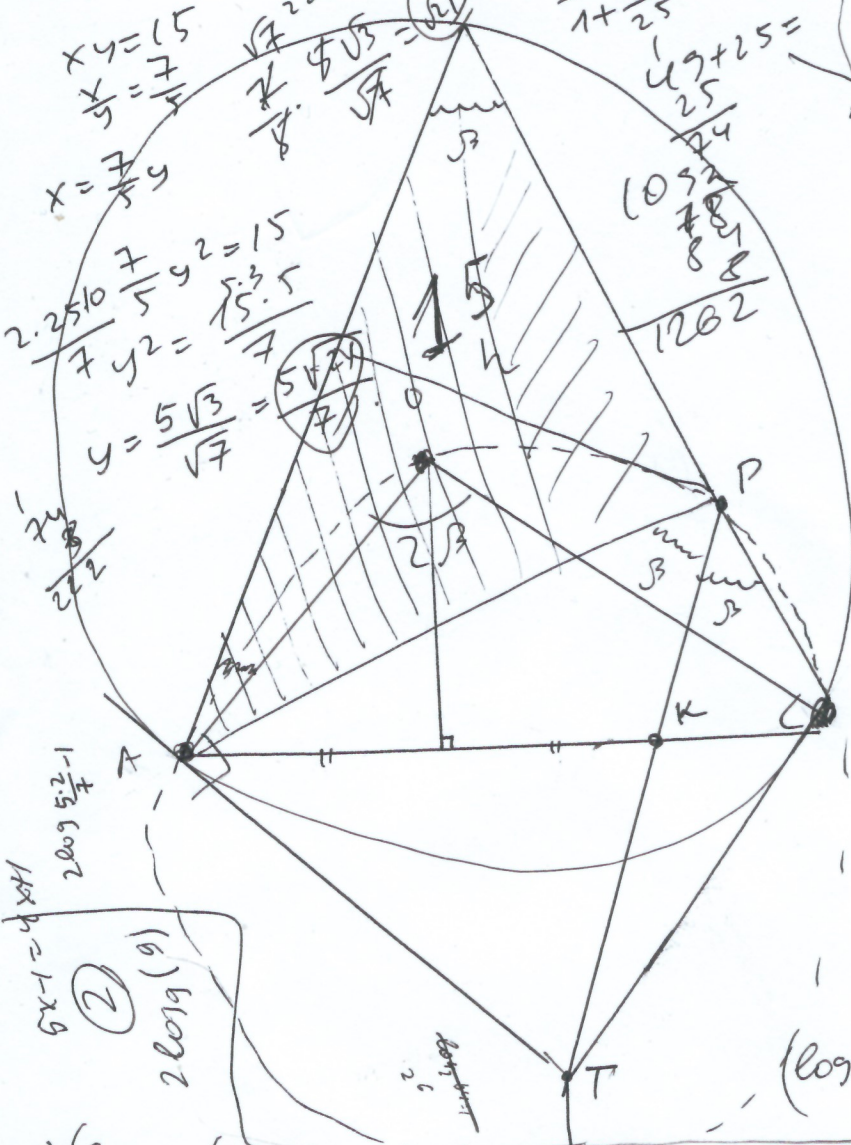
4) $\text{НОД}(a; b; c) = 6$
 $\text{НОК}(a; b; c) = 2 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 16$

5) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$
 $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$
 $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

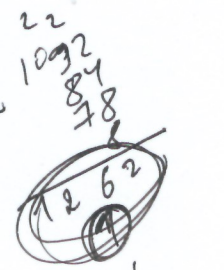
III) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$1 + \cos^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha}$

$5x-1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{5}$
 $4x+1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{4}$
 $\frac{x}{2}+2 > 0 \rightarrow x > -4$
 $5x-1 \neq 1$



SAPK = 6
 SEPK = 4
 SABC = ?



$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$
 $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$
 $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$

I) $13 \cdot 3 \cdot 14$
 II) $3 \cdot 2 \cdot 14 = 84$
 III) $3 \cdot 2 \cdot 13 = 78$
 IV) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$\frac{5850}{7.9} - \frac{500.9}{7.9}$
 $\frac{5850 - 4500}{7.9} = \frac{1350}{7.9}$
 $\frac{5550 + 2700 - 4500}{9.7} = \frac{3750}{9.7}$

2) $2 \log_9(9)$
 I) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$
 $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x-1$
 $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$
 $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x-1$
 $\frac{x}{2} + 2 = 5x-1$
 $\frac{x}{2} - 3x + 5 = 0$
 $\frac{x}{2} + 2 = 5x-1$