Часть 1

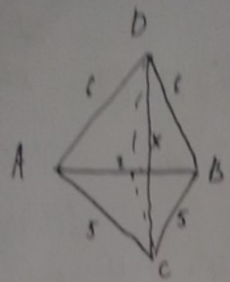
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

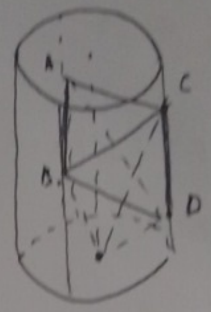
Шифр: **21102923**

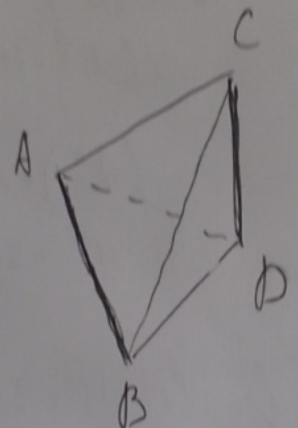
ID профиля: **176459**

Вариант 17

Черновик

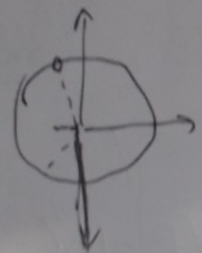






$O_1B = \sqrt{r^2 + H_B^2}$

$O_1I = \sqrt{r^2 + H_I^2}$



O_1

$OB^* = \sqrt{r^2 + h^2}$

$OA^2 = r^2 + h^2$

$OD^2 = r^2 + H^2$

$OC^2 = r^2 + (H + l)^2$

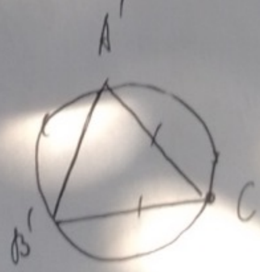
Черновик

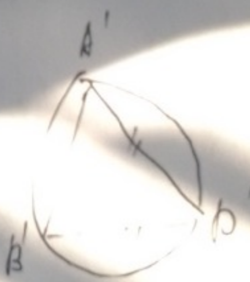
$A(k; r; h)$

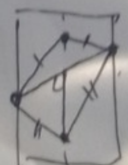
$B(k; -r; h)$

$D(r; 0; H)$

$C(r; 0; H + l)$







~~$\vec{OB}(r; h)$~~

~~$\vec{OA}(-r; h)$~~

$|\vec{AC}| = |\vec{CB}| = 5$

$(r-k)^2 + r^2 + (H+l-h)^2 = (r-k)^2 + r^2 + (H+l-h)^2 = 25$

$|\vec{OB}| = |\vec{OA}|$

$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{AB}$

$$\begin{cases} x^2=1 \\ (r-k)^2+(l-H)^2=24 \\ (r-k)^2+H^2=35 \end{cases}$$

$x^2+k^2=r^2$

$k^2=r^2-1$

$\underbrace{k^2+1=r^2}$

$-k^2=1-r^2$

$r^2-2rk+r^2-1+H^2=35$

$f(x)=2r^2-2rk+H^2-36=0$

$\cancel{f'=4r-x}$

$2a+2b>a^2+b^2?$

$2a+2ab+2b>(a+b)^2$

$r^2-1-k^2=0$

$2r=0 \Leftrightarrow r=0$

$l^2-2lH=-11$

$l^2-2lH+11=0$

$D=4H^2-44$

$l^2-2lH+H^2=H^2-11$

$(l-H)^2=H^2-11$

$2k=2r$

$k=r$

$1=0$

$f(k)=k^2+1$

$f_{min}=1$

$\boxed{r:=1}$ $k:=0$

$\cancel{(-k^2)=\cos^2 x}$

$\cancel{r^2=\sin^2 x}$

$\cancel{x\in[\tfrac{\pi}{2};\pi]}$

$2(r^2-2rk+k^2)+H^2+l^2-2lH+H^2=59$

$2r^2-2rk+2r^2-2+2H^2+l^2-2lH=59$

$4r^2-2r\sqrt{r^2-1}$

$\frac{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{6}}{4}=$

Черновик $=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{cases} 1+(l-H)^2=24 \\ 1+H^2=35 \end{cases}$$

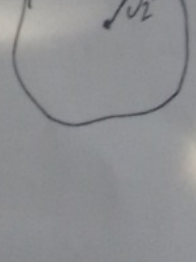
$H^2=34$

$a^2+b^2\geqslant 2ab$

$2a+2b\geqslant 4\sqrt{ab}$

$l^2-2lH+11=0$

$18\cdot 3-18\cdot 2=\frac{18}{3}$



Черновик

Черновик

$d>0,\ d\in Z,\ a_1\in Z$

$S = \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10 = \frac{a_1+a_1+9d}{2}\cdot 10 = (2a_1+9d)5 = 10a_1+45d$

$\begin{cases} S = 10a_1+45d \\ a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$

$a_6 = a_1+5d$
$a_7 = a_1+6d$
$a_{11} = a_1+10d$
$a_{12} = a_1+11d$

$(a_1+5d)\cdot(a_1+11d) > 10a_1+45d+1$

$(a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1+45d+17$

$a_1^2+16ad+55d^2 > 10a_1+45d+1$

$a^2+16ad+60d^2 < 10a_1+45d+17$

$55+17$, $65+7$, 72

$-3+\sqrt{11}>1$

$\sqrt{11}>4$ $\quad x \Rightarrow -8+\sqrt{11}<1$ $\quad \cancel{< S+17 < a^2+16ad+60d^2}$

$-3-\sqrt{11}>-7$ $\quad a^2+16ad+60d^2 < S+17 < a^2+16ad+55d^2+16$

$-6\ldots 0$ $\quad a^2+60d^2 < S+17-16ad < a^2+55d^2+16$

$5d^2 < \underbrace{S+17-a^2-55d^2-16ad}_{A} < 16$

$d\in N$ $\quad a:=1,\ldots 6$

$5 < A < 16$

$\begin{cases} a^2+6a-7 > -16 \\ a^2+6a-7 < -5 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+6a+9 > 0 \\ a^2+6a-2 < 0 \end{cases}$

$D = 36-36 = 0$ $\quad (a+3)^2$ $\quad -3$ $\quad$ Чтобы $\exists A$ $\quad d=1$

$D = 36+8 = 44 = 2\sqrt{11}$ $\quad -3-\sqrt{11}$ $\quad -3+\sqrt{11}$

$5 < 10a+45-a^2-55-16a+17 < 16$

$\sqrt{11}>3$ $\quad 5 < -a^2-6a+7 < 16$ $\quad -5 > a^2+6a-7 > -16$

$3+\sqrt{11}<7$ $\quad 3+\sqrt{11}>6$ $\quad D = 36-40 < 0$ $\quad D = 36+28 = 56+8 = 64$

$\sqrt{11}<4$ $\quad \sqrt{11}>3$

$11<16$ ✓ $\quad 11>9$ ✓

$\frac{-6\pm 8}{2} = 1,$

21102923 (U176459 M1302976)

$2H^2-4Hh+2h^2+l^2+2l(H-h)+2+2(r-k)^2=61$ $\quad r:=\frac{k}{2}$

$k^2+1=r^2 \quad r:=k/2$

$2H^2-2Hh+2h^2+l^2+2l(H-h)+2+2\cdot\frac{9}{4}k^2=61$

$r^2-2rk+const=0 \quad k:=0$

$$\begin{cases} \cancel{(r-k)^2+r^2+(H+l-h)^2=25} \\ \cancel{(r-k)^2+r^2+(H-h)^2=36} \\ \cancel{4r^2=4} \end{cases}$$

$H^2-2Hh+h^2+H^2+2Hl+l^2-2Hh-2lh+h^2=$
$=2H^2-4Hh+2h^2+l^2+2l(H-h)$

$k^2+1=\frac{k^2}{4}$

$3k^2+4=0$

$r=\pm 1$

$\cancel{(H+l-h)^2+(H+h)^2}$

$k^2=-\frac{4}{3}$

$k^2=\frac{k^2}{4}-1$

$\cancel{(H-h)^2-(H+l-h)^2=11}$

$4k^2=k^2-4$

$H^2-2Hh+h^2+(H+l)^2+2(H+l)h+h^2$

$3k^2+4=0$

Черновик

$\cancel{(H-h+H+l-h)(H-h-H-l+h)=11}$

$r^2-(k^2+1)=0$

$\cancel{(2H-2h+l)(-l)=11}$ $\quad l(2h-H-l)=11$

$-l^2-2(H-h)l-11=0$ $\quad 4r-2k=0$

$r^2-2rk+k^2\ldots\ldots$

$l^2+2(H-h)l+11=0$ $\quad 2r-k=0$

$2r-2k=0$

$r:=k$

$r:=\frac{k}{2}$

$D=4H^2-8Hh+4h^2-44$

$- \quad \frac{k}{2} \quad +$

min

$A(k;x;h) \quad C(r;0;H+l)$

$B(k;-x;h) \quad D(0;0;H)$

$$\begin{cases} (r-k)^2+x^2+(H-h)^2=36 \\ (r-k)^2+x^2+(H+l-h)^2=25 \\ 4x^2=4 \\ k^2+x^2=r^2 \end{cases}$$

$(H+l-h)^2-(H-h)^2=-11$

$(H-h-H-l+h)(H-h+H+l-h)=11$

$l(2(h-H)-l)=11$

$x=\pm 1$

$k^2=r^2-1$

$k=\sqrt{r^2-1}$

$(H+l-h)^2+2r^2-2rk=25$

$2r^2-2rk+(H+l-h)^2-25=0$

$(H-h)^2+r^2+2rk+k^2=35$

$(H-h)^2-2rk+r^2+r^2-1=35$

$(H-h)^2+2r^2-2rk=36$

Чистовик (5)

Г3 **Ответ: $6\pi - 9\sqrt{3}$**

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;\,2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 2 & \text{— ~~окруж~~ (1)}\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;\,2) & (2)\end{cases}$$

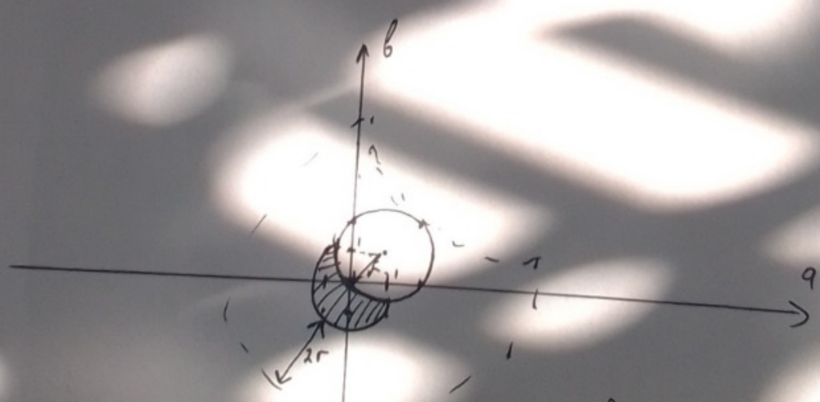
(1) это круг с ц. в т. $(x;y)$ и $r=\sqrt{2}$

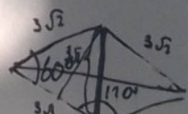
(2) это ~~окруж~~ круг с $r=\sqrt{2}$ (и центром $(0;0)$) в котором выколот круг с $R=\sqrt{2}$, где R мы нашли из

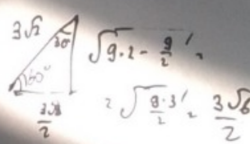
$$2a+2b > a^2+b^2$$
$$a^2-2a+1+b^2-2b+1<2$$
$$(a^2-1)+(b^2-1)<2$$

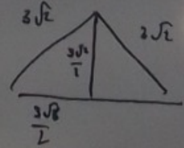
а центра выколотого круга в т. $(1;1)$

т.е. фигура Г2 – „полумесяц"









Значит, множество M, – это „полумесяц", подобный полумесяцу Г2, но с $R = 3\sqrt{2}$. $\Rightarrow S = \left(\pi R^2 - \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)\cdot 2\right) =$

$$= 18\pi - \left(\frac{18\pi}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2 = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

Чистовик

Чистовик

(4)

$x^2 = 1$

$k^2 + 1 = r^2$

$f(k) = k^2 + 1$

$f' = 2k$

$$\xrightarrow[\searrow \ \min \ \nearrow]{- \ 0 \ +} \operatorname{sgn}(f'(k))$$

$r_{min} = 1$ при $k = 0$.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 2 + (l - H)^2 = 25 \\ 2 + H^2 = 36 \end{cases}$$

$H = \sqrt{34}$

$l^2 - 2\sqrt{34}\,l + 36 = 25$

$l^2 - 2\sqrt{34}\,l + 11 = 0$

$D = 4 \cdot 34 - 44 = 4(34 - 11) = 4 \cdot 23$

$CD = l = \dfrac{2\sqrt{34} \pm 2\sqrt{23}}{2} = \sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

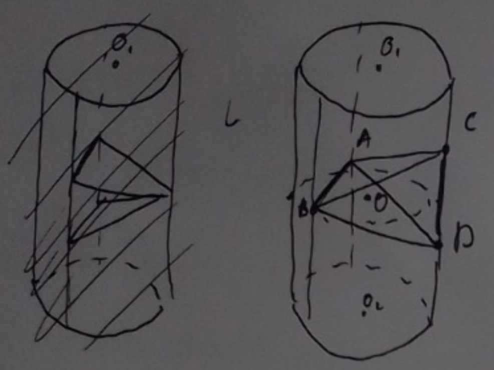
Ответ: $CB = \sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

Чистовик

Чистовик (3)

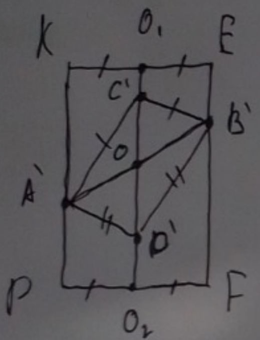
№2.

Докажем, что $AB \perp O_1O_2$



Проведём плоскость α через O_1, O_2 так, что $\alpha \perp$ пл-ти нижнего и верхнего осн-й цилиндра.

Спроецируем на α вершины тетраэдра и Д-м что AB не $\perp O_1O_2$



$AC = CB \Rightarrow A'C' = C'B'$
$BD = DA \Rightarrow B'D' = B'A'$
~~Отсюда~~
$KP \parallel EF$ и $KO_1 = O_1E \Rightarrow$

$\Rightarrow C'O = OD'$, $A'O = OB'$
$\Downarrow$
т.к. $\triangle A'D'B'$ равнобед.й $\Rightarrow D'O \perp A'B' \Rightarrow$
$\Rightarrow AB \perp O_1O_2$

Пусть т. O лежит в пл-ти β, где β такова, что $A \in \beta$, $B \in \beta$, $\beta \parallel$ осн-м цилиндра. Введём систему координат с началом в т. O, Ox совп-й с проекцией высоты из в. C. Д-ка $\triangle CAB$ на β, Oy ~~совп-й~~ сонапр-й с BA, Oz сонапр-й с O_1O_2. Тогда

$A(+k; -x; 0)$ $\quad$ $C(r; 0; \cancel{l}-H)$
$B(+k; x; 0)$ $\quad$ $D(r; 0; H)$.

где k – перп.-р из т. O на AB, l – длина CD. ~~(CD делит CD пополам, т.к. это следует из Th о 3-х перп-х)~~.

$4x^2 = 4$
~~$(r-k)^2 + x^2 + \frac{l^2}{4} = 25$~~
~~$(r-k)^2 + x^2 + \ldots$~~

H – расст-е от β до D.

$$\begin{cases} 4x^2 = 4 \\ (r-k)^2 + x^2 + (l-H)^2 = 25 \\ (r-k)^2 + x^2 + H^2 = 36 \\ x^2 + k^2 = r^2 \end{cases}$$

г1 (Продолж-е)

Пп $\sqrt{11}-3>1$

$\sqrt{11}>4$

$11>16$ Пр-е $\Rightarrow$ $\sqrt{11}-3<1$

Пп $-\sqrt{11}-3<-7$

$-\sqrt{11}<-4$

$\sqrt{11}>4$

$11>16$ Пр-е $\Rightarrow$ $-\sqrt{11}-3>-7$

Пп

$\sqrt{11}-3>0$

$\sqrt{11}>3$

$11>9$ ✓ верно

Пп $-\sqrt{11}-3<-6$

$-\sqrt{11}<-3$

$\sqrt{11}>3$

$11>9$ ✓ верно

2

$\Downarrow a\in\mathbb{Z}$

$a=-6;-5;-4;-2;-1;0$

Ответ: $a_1:=-6;-5;-4;-2;-1;0.$

Чистовик!

(2)

Чистовик

№1

Пусть $a_1 := a$, $a \in \mathbb{Z}$. $d > 0$, т.к. прогрессия возр-я и $d \in \mathbb{Z}$, т.к. прогрессия сост. из целых чисел. $\Rightarrow d \in \mathbb{N}$.

$$S = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a + 45d$$

$$a_6 = a + 5d$$

$$a_7 = a + 6d$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$a_{12} = a + 11d$$

1

Имеем $\begin{cases} a_6 a_{12} > S + 1 \\ a_7 a_{11} < S + 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 16ad + 55d^2 > S + 1 \\ a^2 + 16ad + 60d^2 < S + 17. \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 16ad + 60d^2 < S + 17 < a^2 + 16ad + 55d^2 + 16$$

$$5d^2 < (S+17) - (a^2 + 16ad + 55d^2) < 16$$

$A = (S+17) - (a^2 + 16ad + 55d^2)$ т.к. $d \in \mathbb{N}$. $d \geq 1$.

$d := 1 \Rightarrow 5 < A < 16$

$d := 2 \Rightarrow 20 < A < 16 \Rightarrow A \in \varnothing$

...

$\Rightarrow \underline{d := 1}$ иначе нет реш-й.

$$5 < (10a + 45 + 17) - (a^2 + 16a + 55) < 16$$

$5 < -a^2 - 6a + 7 < 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 6a - 7 > 16 \\ a^2 + 6a - 7 < -5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 6a + 9 > 0 \\ a^2 + 6a - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty) \\ a \in (-3-\sqrt{11}; \sqrt{11} - 3) \end{cases}$

$D = 36 + 8 = 44$

$a := \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2}$

$-3-\sqrt{11}$ $\sqrt{11}-3$

$+$ $-$ $+$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102923**

ID профиля: **176459**

Вариант 17

Черновик.

$5x-1=16x^2+8x+1$

$16x^2+3x+2$

$D=9-$ НОД$(a, b, c)=6$

НОК$(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$

$4t^3-2t^2+2t^2-\cancel{t}+2t-1$

ac ac $a=6\cdot a_1$ $a-c$ $a=2\cdot 3\cdot 3^{15}$ $\ln\sqrt{\frac{3}{7}}$

ac ad $b=6\cdot b_1$ a/k $b=2\cdot 3\cdot 2^{14}$ $3\cdot 2\cdot 1$ $\ln$

bd bc $c=6\cdot c_1$ b d $c=2\cdot 3:$ $3\cdot 2$

ad

bc

ac

$6^3\cdot 15\cdot 16-3\cdot 2\cdot 2\cdot 2-4$

разложении $6^3\cdot 15\cdot 16-6\cdot 4-4$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{1}-1$

$2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}$

НОД$(a;b;c)=6 \Rightarrow$ в ~~составе~~ каждого числа есть 2 и 3,

$6^3\cdot 15\cdot 16-3\cdot(3\cdot 2\cdot 2+3\cdot 2\cdot 2+$

НОК$(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16} \Rightarrow$ в разложении хотя бы одного есть 2^{15} и/или 3^{16}, а в остальных не более 2^{15} и 2^{16} Но!

$1\cdot 2\cdot 1+1=3$

$\ln\frac{15}{7}=2\ln\sqrt{\frac{3}{7}}$ $\frac{8}{7}+1=\frac{15}{7}$ $\frac{1}{7}+2=\frac{15}{7}$

$a=2^{i_1}\cdot 3^{j_1}$

$b=2^{i_2}\cdot 3^{j_2}$

$c=2^{i_3}\cdot 3^{j_3}$

aab

ccd

Среди i_1, i_2, i_3 ~~хотя бы~~ есть $i=1$, остальные ≥ 1, но ≤ 15 хотя бы одно равно 15.

$x^2+8x+16=16x+4$ $\frac{5\cdot 2}{7}-1$ 15 шт

$x^2-8x+12=0$ $\frac{10-7}{7}=\frac{3}{7}$ 16 шт.

$D=64-48=16$

$2\cdot 3$ $3\cdot 2^{15}$ $3\cdot 2^{15}$

$\frac{8\pm 4}{2}=6; 2$ $b=c$

1 ... ? ... 15

1 ... ? ... 16

1 .. 15

1 .. 16

$2\cdot C_3^2\cdot C$

$2\cdot 6\cdot 15\cdot 16-2\cdot 6\cdot 2\cdot 26\cdot(15\cdot 16-1$

$a=b$ $b=c$ $a=c$ $14\cdot 13+14\cdot 2$

$=14\cdot 15$

$36\cdot 210$

$14\cdot 15=210$

Черновик

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$

$\log_3 9 = \log_3 ...$

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\cancel{(4x+1)^{\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)} = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2}$

$\ln x = 4$

$\log_e x = 4$

$5x-1>0$ $\quad 4x+1>0$ $\quad \frac{x}{2}+2>0$ $\quad e^4 = x$

$5x-1 \neq 1$ $\quad 4x+1 \neq 1$ $\quad \frac{x}{2}+2 \neq 1$ $\quad x = e$

$x > \frac{1}{5}$ $\quad x > -\frac{1}{4}$ $\quad x > -4$

$x \neq \frac{2}{5}$ $\quad x \neq 0$ $\quad x \neq -2$

$A = 1$

$B = 2$ $\quad \ln a = 1$

$C = 2$ $\quad \ln\sqrt{5x-1} = 1$ $\quad x > \frac{1}{5}$ $\quad x \neq \frac{2}{5}$ $\quad \frac{8}{5}+1 = \frac{13}{5}$

$\ln b = 2$ $\quad 5x-1 = e^2$ $\quad \frac{e^2+1}{5} = \frac{e^2-1}{4}$ $\quad 4e^2+4 = 5e^2-1$

$x = \frac{e^2+1}{5}$ $\quad A = \frac{C}{2}$

$\log_{\sqrt{5x-1}}$ $\quad \sqrt{5x-1} = a$ $\quad (4x+1) = b>$ $\quad \left(\frac{x}{2}+2\right) = c$

$t^3 - t^2 + t^2 + t ...$

1) $\log$ $\quad \frac{x}{2}+2 = e^2$ $\quad b > \frac{9}{5}$ $\quad c > \frac{21}{10}$

$\ln(4x+1) = 2$ $\quad x = 2(e^2-2)$ $\quad b \neq \frac{13}{5}$ $\quad c \neq \frac{18}{5}$ $\quad t^3+t-2=0$

$4x+1 = e^2$ $\quad t=1$

$4x = \frac{e^2-1}{4}$

1) $\log_a b = \log_b c^2 = \log_c (a^2) + 1$ $\quad \ln a = A$ $\quad (t-1)(t^2+t+2)=0$

$\log_a b = 2\log_b c = 2\log_c a + 1$ $\quad \ln b = B$ $\quad D = 1-8$

$\ln c = C$ $\quad t = 1$

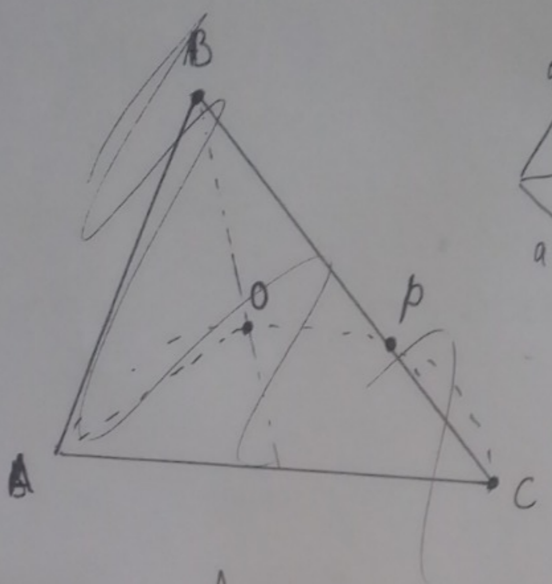
$\frac{B}{A} = 2 = \frac{2A+C}{2}$ $\quad \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{2\ln c}{\ln b} = \frac{2\ln a + \ln c}{\ln c}$

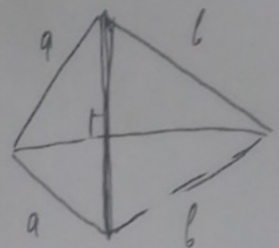
$\begin{cases} B = \sqrt{2AC} \quad A = \frac{B^2}{2C} \\ \frac{B^2+c^2}{c^2} = \frac{2C}{B} \\ B^3 + BC^2 - 2C^3 = 0 \end{cases}$ $\quad \frac{B^3}{C^3} = 1$ $\quad B^3 = C^3$

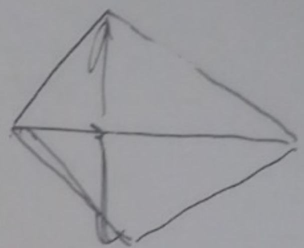
$4 = 2A + C$ $\quad \frac{B}{A} = \frac{2C}{B} = \frac{2A+C}{C}$

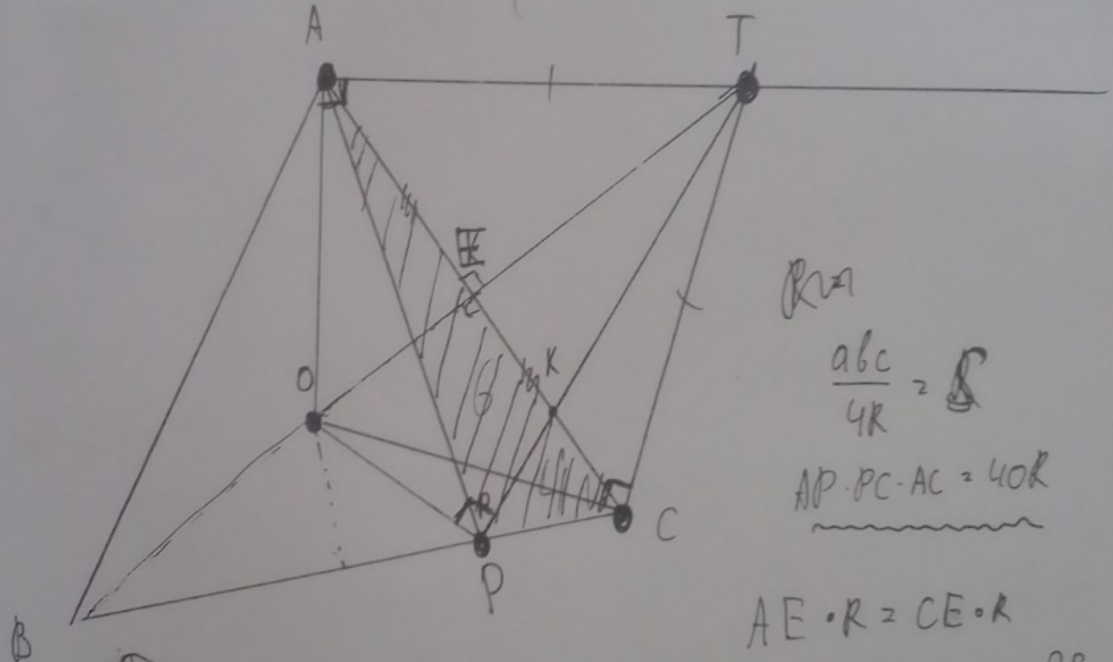
$C = 2A$

$4 = 2C \Rightarrow C=2$ $\quad B=2$ $\quad A=1$









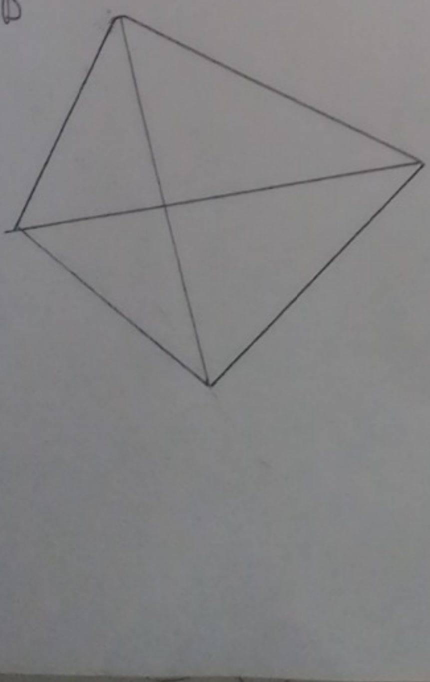
$R = ?$

$$\frac{abc}{4R} = S$$

$AP \cdot PC \cdot AC = 4OR$

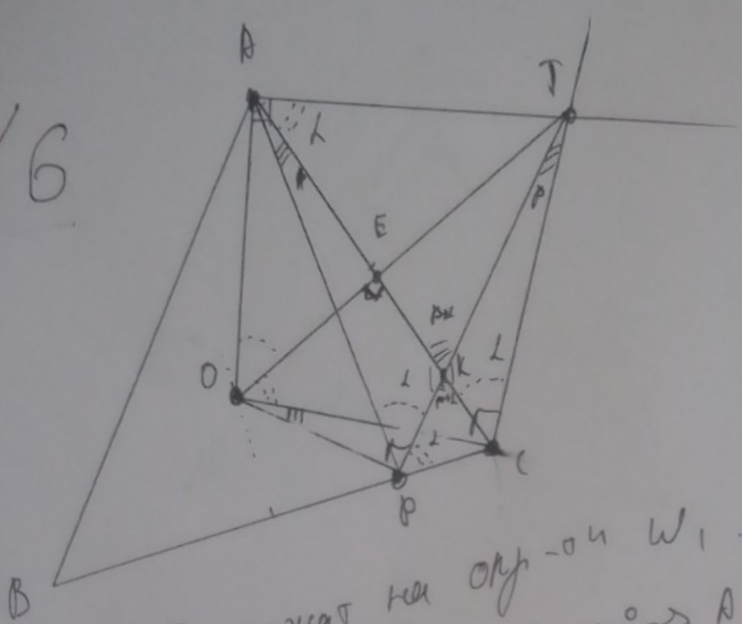
$AE \cdot R = CE \cdot R$

$AC \cdot R = 2CE \cdot R = 2S_{AOT}$



Чистовик ⑤

№6



а) A, O, C, P лежат на окр-ти W_1.

$\angle OAT + \angle OCT = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow A, O, C, T$ лежат на 1-й окр-ти, но т.к. $A, O, C \in W_1 \Rightarrow T \in W_1 \Rightarrow \angle OPT = 90^\circ$.

$TA = TC$, $AO = OC$ — р-ва, OT общ. $\Rightarrow \triangle AOT = \triangle OCT \Rightarrow$ ~~AE⊥EC~~

$\Rightarrow AC \perp OT$. $\Rightarrow AE = EC$

~~Рассм. $\triangle AOE$ и $\triangle OEC$.~~
~~$\angle AEO = \angle OEC = 90^\circ$~~
~~OE общ~~
~~$OA = OC$ как рад-сы ω~~
~~$\} \triangle OEA = \triangle OEC \Rightarrow AE = EC \Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow OATC$ - ромб $\Rightarrow OA = AT = CT = OC$.~~

~~$\angle AOT = 45^\circ \Rightarrow$ из $W_1 \Rightarrow \angle APT = 45^\circ = \angle OPA$~~

если $\angle CAT = \angle$ то $\angle TPC = \angle$ и $\angle TCA = \angle$ (т.к. $TC = AT$)

~~если~~ $\Rightarrow \angle APT = \angle$

если $\angle PTC = \beta$ то $\angle PAC = \beta$ и $\angle POC = \beta$

$\angle TOC = \angle$ т.к. опир. на $\overset{\smile}{CT}$.

$\triangle PKC \sim \triangle KAT$
$\triangle PAK \sim \triangle KTC$

Чистовик 4

$$\begin{cases} 8x+2=x+4 \\ 16x^2+3x+2=0 \\ x>\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x\in\varnothing \\ x>\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \underline{x\in\varnothing}$$

Ответ: $x=2$

Чистовик (3)

$$\frac{B}{A} = \frac{2C}{B} + 1 = \frac{2A}{C}$$

$$C = \frac{2A^2}{B}$$

$$\frac{4A^2}{B^2} + 1 = \frac{B}{A}$$

$$4A^3 + AB^2 - B^3 = 0 \qquad t = \frac{A}{B}$$

$$4t^3 + t - 1 = 0$$

$t := \frac{1}{2}$ - решение

$$\frac{1}{2}(2t-1)(2t^2 + t + 1) = 0$$

$$D = 1 - 8 < 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{2} \Rightarrow A \neq 0 \quad B = 2A, \quad C = \frac{2A^2}{2A} = A$$

$$B = 2A = 2C$$

$$\ln(4x+1) = \ln(5x-1) = \ln\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$$\begin{cases} 4x+1 = 5x-1 \\ 4x+1 = \frac{x^2}{4} + 2x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \quad x := 2$$ - решение

3) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) + 1 = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$$\frac{B}{A} + 1 = \frac{2C}{B} = \frac{2A}{C} \Rightarrow B = \frac{C^2}{A}$$

$$\frac{C^2}{A^2} + 1 = \frac{2A}{C} \Leftrightarrow C^3 + A^2C - 2A^3 = 0 \qquad t = \frac{C}{A}$$

$$t^3 + t - 2 = 0$$

$$(t-1)(t^2+t+2) = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow C = A = B$$

$$\ln\sqrt{5x-1} = \ln(4x+1) = \ln\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$\begin{cases} 4x+1 = \frac{x}{2}+2 \\ 5x-1 = 16x^2 + 8x + 1 \\ x > \frac{1}{5} \\ x > -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Чистовик 2

№5.

Пусть $\ln(4x+1) = B \neq 0 > 0$

$\ln(\sqrt{5x-1}) = A > 0$ (>0, т.к. все подлогарифм-е ф-ии стоят в основании лог-х логарифмов и не м.б. =1)

$\ln(\frac{x}{2}+2) = C > 0$

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1$

$$\frac{B}{A} = \frac{2C}{B} = \frac{2A}{C}+1$$

$$\begin{cases} A = \frac{B^2}{2C} \\ \frac{B^2}{C^2}+1 = \frac{2C}{B} \end{cases} \Rightarrow B^3 + BC^2 - 2C^3 = 0 \quad t = \frac{B}{C}$$

$$t^3 + t - 2 = 0$$

$$(t-1)(t^2+t+2) = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow B = C, \ A = \frac{B}{2}$$

$$\frac{B}{A} = 2 = \frac{2A}{B}+1$$

$\cancel{2A = B = C}$

$$\ln(4x+1) = \ln(\tfrac{x}{2}+2) = \ln(5x-1)$$

$4x+1 = \frac{x}{2}+2$ $\quad$ $4x+1 = 5x-1$

$7x - 2 = 0$ $\quad$ $x = 2$

$x = \frac{2}{7}$

$\neq$

$x \in \emptyset$

2) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)^2+1 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$$\frac{B}{A} = \frac{2C}{B}+1 = \frac{2A}{C}$$

Чистовик ⑤

Чистовик ①

№4

~~НОД для~~

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

~~$a=2^{i_1}\cdot 3^{j_1}$~~
~~$b=2^{i_2}\cdot 3^{j_2}$~~
~~$c=2^{i_3}\cdot 3^{j_3}$~~

$a=2^{i_1}\cdot 3^{j_1}$

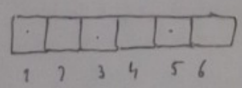
$b=2^{i_2}\cdot 3^{j_2}$

$c=2^{i_3}\cdot 3^{j_3}$

Среди i_1, i_2, i_3 хотя бы 1 равно 1, и хотя бы 1 равно 15. ~~Среди~~, а оставшееся м.б. равно от 1 до 15.

Среди чисел j_1, j_2, j_3 хотя бы 1 равно 1 и хотя бы одно равно 16, а третье м.б. равно 1...16.

~~Итак~~ Нам нужно подсчитать кол-во ~~чисел~~ троек a, b, c, или количество способов расставить числа i в нечётные ячейки и кол-во чисел j - в чётные. (кол-во посл-й 6-ти чисел)



~~Оно равно: $3\cdot 2\cdot 15\cdot 3\cdot 2\cdot 16$ т.к. $i=1$ можно пост-ть~~

~~Сначала~~. Пусть в каждой из троек все числа - разные. Тогда мы получим $3\cdot 2\cdot 13\cdot 3\cdot 2\cdot 14$ посл-й.

Если есть совпадения только в первой тройке: $3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 14$

Если есть совпадения только во второй тройке: $3\cdot 2\cdot 13\cdot 3\cdot 2$

Если есть совпадения в обеих тройках: $3\cdot 2\cdot 3\cdot 2$.

Всего: $6^2\cdot 13\cdot 14+6^2\cdot 14+6^2\cdot 13+6^2=6^2(182+14+13+1)=$

$=6^2\cdot 14\cdot 15=36\cdot 210=7560$

Ответ: 7560.