Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102807**

ID профиля: **849510**

Вариант 17

Чистовик.

№1.

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = a_1 + (a_1+d) + \ldots + (a_1+9d) =$
$= 10a_1 + 45d$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2 + 16a_1d + 55d^2$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$

$$\left.\begin{array}{l} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ S+17 > a_7 \cdot a_{11} \end{array}\right| \Rightarrow a_6 \cdot a_{12} + 16 > a_7 \cdot a_{11}$$

$55d^2 + 16 > 60d^2 \Leftrightarrow d^2 < \frac{16}{5} \Leftrightarrow d \in \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Т.К. прогрессия возрастает и состоит из целых чисел, $d > 0$, $d \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow d \in \left(0; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$. $\frac{4}{\sqrt{5}} < 2 \Rightarrow d = 1$.

$a_7 \cdot a_{11} < S+17 \Leftrightarrow a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

Т.К. $d = 1$: $a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

Решим это н-во: $D = 44$. $a_1 = -3 \pm \sqrt{11}$

$(a_1 + 3 - \sqrt{11})(a_1 + 3 + \sqrt{11}) < 0 \Leftrightarrow a_1 \in (\underset{-7}{-3-\sqrt{11}}; \underset{1}{-3+\sqrt{11}})$

$3 < \sqrt{11} < 4 \Rightarrow a_1 >$, $a_1 <$. кроме -3

Второму условию удовлетворяют любые a_1,
т.К.: $a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \Leftrightarrow (a_1+3)^2 > 0$

~~Значит $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$~~

~~Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$~~

1

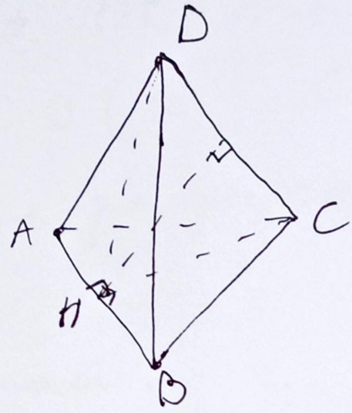
Целых.

Значит, $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

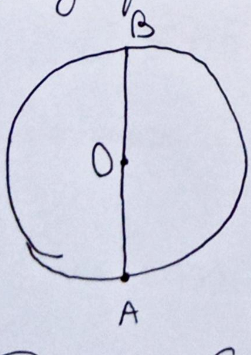
Чистовик.

№2.



Проведём высоту DH в $\triangle ADB$. $AH = HB$, т.к. $\triangle ADB$ - р/б. Аналогично $CH_1 \perp AB$, $AH_1 = H_1B \Rightarrow$ $\Rightarrow H = H_1$, $AB \perp DH$; $AB \perp CH \Rightarrow AB \perp (DHC) \Rightarrow$ $\Rightarrow AB \perp DC$.

Значит, $AB \parallel$ основанию цилиндра (т.к. $CD \perp$ основанию). Перейдём в плоскость сечения цилиндра, которая содержит AB:



Очевидно, что радиус будет наименьшим, если AB совпадёт с диаметром этого сечения. Тогда радиус цилиндра равен $\frac{AB}{2} = 1$.

Т.к. C и D лежат на верхней и нижней гранях цилиндра расстояние от AB до CD не превосходит радиуса цилиндра.

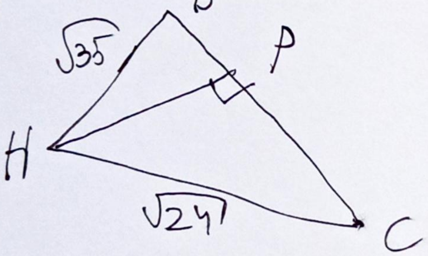
шестовых.

Проведём $HP \perp CD$. $HP \in (CDH) \Rightarrow$

$\Rightarrow HP \perp AB \Rightarrow HP$ – общ. $\perp$ для AB и CD.

HP д.б. больше 0 (т.к. CD существует) и не превосходить радиуса цилиндра, т.е. $\frac{AB}{2} = 1$.

Крайний случай:



$DH = \sqrt{35}$ по т. Пифагора из $\triangle ADB$

$CH = \sqrt{24}$ аналогично из $\triangle ABC$.

$HP = 1$. Тогда $DP = \sqrt{34}$ и $CP = \sqrt{23}$ по т. Пифагора, и $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$. При ~~увеличении~~ уменьшении (HP) CD будет увеличиваться. Из н-ва $\triangle DBC$, например, $CD < 5 + 6 = 11$.

Итак: $CD \in [\sqrt{34} + \sqrt{23}; 11)$.

Ответ: $CD \in [\sqrt{34} + \sqrt{23}; 11)$.

Черновик.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$

$a_2 = a_1 + d. \quad a_3 = a_1 + 2d$

$S = 10a_1 + d + 2d + \ldots + 9d = 10a_1 + 45d$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d.$

$a_6 a_{12} > S + 1$

$S + 17 > a_7 a_{11}.$

$a_6 a_{12} + 16 > a_7 \cdot a_{11}$

$55d^2 + 16 > 60d^2$

$16 > 5d^2$

$d^2 < \frac{16}{5} \quad d \in \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$

$2\sqrt{11} > 6$

$44 > 36$

$a_1^2 + 16a_1 + 55 \cancel{\geq} 10a_1 + 4\cancel{6}$

$a_1^2 + 6a_1 + \cancel{10} \cancel{\geq} 0. \quad (a_1 + 3)^2 > 0.$

$\cancel{a_1^2 + 16a_1 + 60 >}$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62.$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0.$

$a_1 = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{11}$

Черновик.

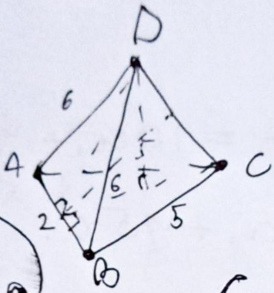
$CD < 41$

$(a+b)^2 - 2(a+b) - 2ab \le 0$

$AB = 2$

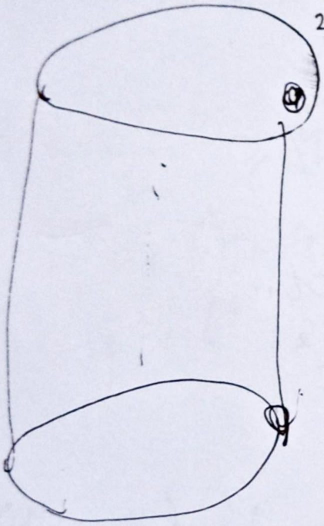
$AC = CB = 5$

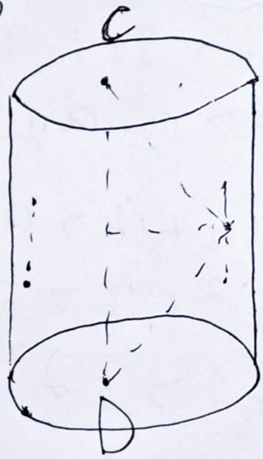
$AD = DB = 6$

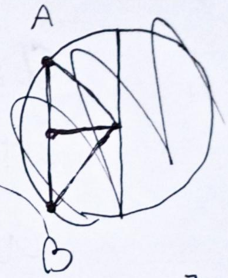


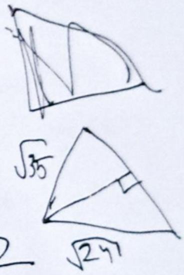
$a+b \le 1$

$a^2+b^2 \le 2(a+b)$



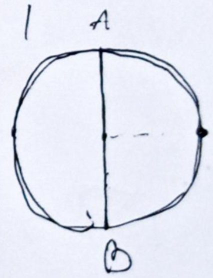






$a^2+b^2 \le 2$

$a+b > 1$

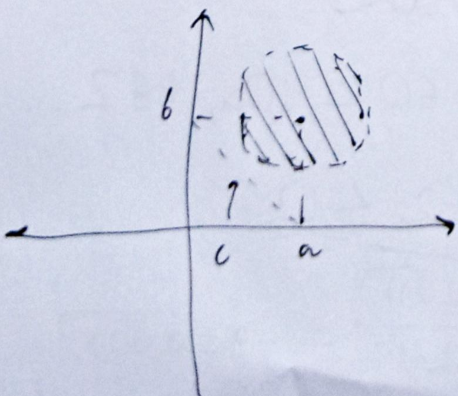


$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$

$a^2+b^2 \le \min(2(a+b); 2).$

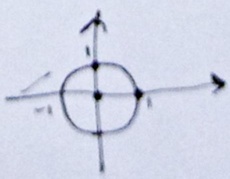
$\cancel{2ab \le a^2+b^2 \le 2(a+b)}$.

$R = \sqrt{2}$



$a+b \le 1$

$a+b \ge 1$



Черновик.

$a^2+b^2 \le 2a+2b = 2(a+b) < 2$

$a+b<1$

$a^2+b^2 \le 2$

$a+b>1$

$a^2+b^2<2.$

$\frac{1}{4} \quad 1 = \frac{5}{4}$

$a+b<1$

$a<b-1$

$b>a+1$

$a=1 \qquad b=\frac{1}{2}$

$(3,\ 2)$ $a+b>1.$

$\frac{2a+2b}{2} \ge \sqrt{4ab}$

$1+\frac{1}{4} \le 2$

$a+b \ge 0.$

$a \ge -b$

$a+b>1.$

$2(a+b) \ge 4\sqrt{ab}.$

$a^2+b^2 \ge 2ab \qquad a^2+b^2.$

$a^2+b^2 \le 2$

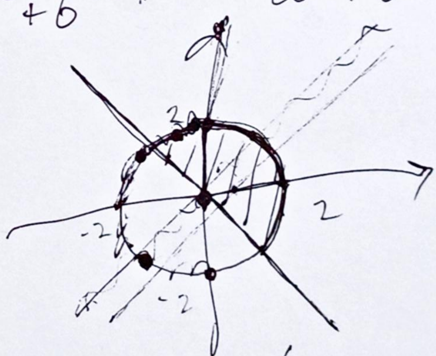
$b \ge 1-a$

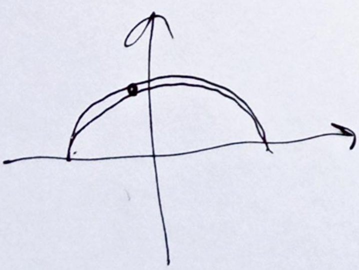
$a+b<1$

$a-1+b<0.$

$b<1-a$

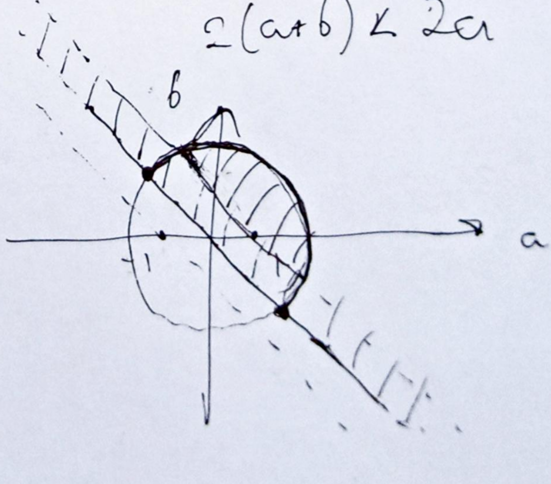
$a^2+b^2 \le 2(a+b).$





$b \ge 0$

$2(a+b) < 2a$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102807**

ID профиля: **849510**

Вариант 17

Чистовик.

№4.

Пусть $a = 2^{p_1} \cdot 3^{q_1}$; $b = 2^{p_2} \cdot 3^{q_2}$; $c = 2^{p_3} \cdot 3^{q_3}$.

Заметим, что других простых множителей в разложении a, b и c нет, т. к. иначе эти множители оказались бы в НОК.

Тогда $\max(p_1; p_2; p_3) = 15$, $\min(p_1; p_2; p_3) = 1$

$\max(q_1; q_2; q_3) = 16$, $\min(q_1; q_2; q_3) = 1$.

Степени p_2 и q_2 можно выбрать из числовых отрезков $[1; 15]$ и $[1; 16]$ соответственно любыми способами, т. к. НОД и НОК от этого не изменится.

Теперь подсчитаем кол-во троек $(a; b; c)$.

Выберем сначала число с min степенью тройки. Из оставшихся двух выберем число с max степенью тройки. Для последнего числа выберем любую степень тройки из допустимого промежутка:

$3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$.

Мы выбрали степени тройки для трёх чисел всеми способами.

Чистовик.

Теперь выберем для получившихся чисел степени двойки, действуем аналогично:

$3 \cdot 2 \cdot 15 = 90.$

Найдём общее кол-во способов по правилу умножения: $90 \cdot 96 = 8640.$

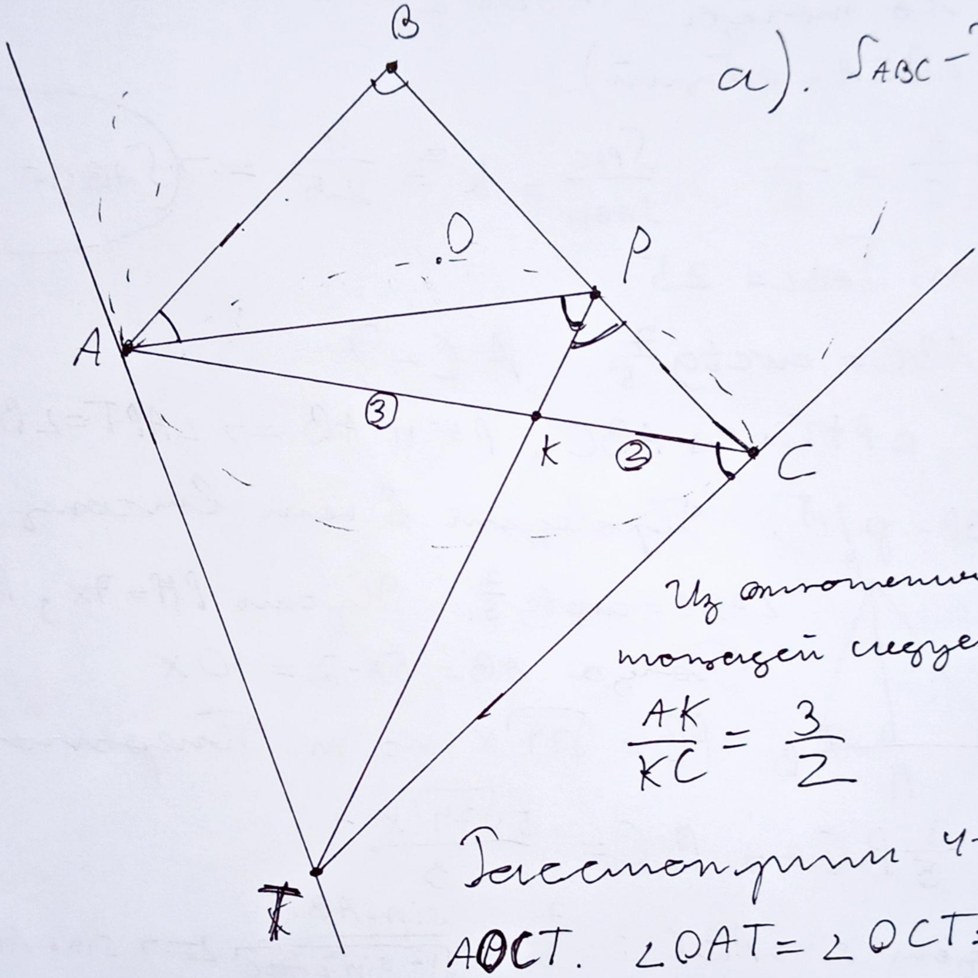
Ответ: 8640.

Чистовик.

№6.

$\frac{S_{\Delta APK}}{S_{\Delta CPK}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

а). S_{ABC} – ?



Из отношения площадей следует, что

$\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$

Рассмотрим 4-х-угольник AOCT. $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ (радиус и касательная). Тогда $\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow$ AOCT – вписанный, OT – диаметр $\Rightarrow$ т. T лежит на одной окр-сти с точками A, O, C и P.

~~AT=TC~~

$AT = TC \Rightarrow \angle APT = \angle TPC$ (хорды равные стягивают равные дуги).

Чистовик

$\angle APT = \angle ACT$ (хорда AT).

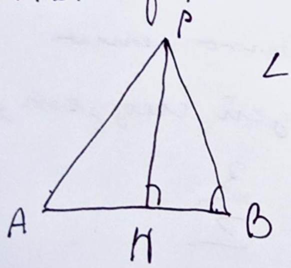
Значит, $\angle ACT = \angle ABC$, т. к. TC — касательная к ω. Но тогда $\angle ABC = \angle TPC$ и $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ (угол $\angle BCA$ — общий).

$k = \frac{CK}{AC} = \frac{2}{5}$ $\quad \frac{S_{PKC}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{ABC} = 25.$

Ответ: $S_{ABC} = 25$

б). $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$ $\quad AC - ?$

Т. к. $\triangle PKC \sim \triangle ABC$, $PK \parallel AB \Rightarrow \angle APT = \angle BAP \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABP$ — р/б. Проведём в нём высоту PM:



$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$. Пусть $PM = 7x$, $BM = 5x$.

Тогда $AB = 5x \cdot 2 = 10x$

$PB = \sqrt{74}\,x$ по т. Пифагора.

$PB = \frac{3}{5} BC \Rightarrow BC = \frac{5\sqrt{74}\,x}{3}$

Найдём $\sin\angle ABC$: $\frac{7}{5} = \frac{\sin\angle ABC}{\sqrt{1-\sin^2\angle ABC}} \Leftrightarrow \sin\angle ABC =$
$= \frac{7}{\sqrt{74}}$, $\cos\angle ABC = \frac{5}{\sqrt{74}}$ (угол острый по усл.)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle ABC \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{74}} \cdot 10x \cdot \frac{5\sqrt{74}\,x}{3} =$
$= \frac{350x^2}{6} = 25$ (из пред. пункта). $\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$AB = 10\sqrt{\frac{3}{7}}$, $BC = \frac{5\sqrt{74} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}}{3}$

По т. косинусов:

чистовик.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$$

$$AC^2 = \frac{300}{7} + \frac{1850}{7} - \frac{500}{7} = \frac{1650}{7}$$

$$AC = 5\sqrt{\frac{66}{7}}.$$

Ответ: $AC = 5\sqrt{\frac{66}{7}}$

6

Чистовик.

№5.

~~Подстановка~~ Переобозначим:

$5x-1=a \quad 4x+1=b \quad \frac{x}{2}+2=c.$

Рассмотрим 3 случая:

I. $2\log_a b = 2\log_b c$, $2\log_a b - \log_c a = 1.$

$\log_a b = \log_b c \Leftrightarrow \log_a^2 b = \log_a c$

$2\log_a b - \frac{1}{\log_a c} = 1 \Leftrightarrow 2\log_a b - \frac{1}{\log_a^2 b} = 1.$

$\log_a b = t \mid 2t - \frac{1}{t^2} = 1. \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^3 - t^2 - 1 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$

Решим $2t^3 - t^2 - 1 = 0$

$(t-1)(2t^2+t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 1. \Leftrightarrow \log_a b = 1$

$\log_{5x-1}(4x+1) = 1 \Leftrightarrow 5x-1 = 4x+1 \Leftrightarrow x = 2$

Проверив ОДЗ выясним, что значение $x=2$ допустимо.

II. $2\log_a b = \log_c a$, $2\log_a b - 2\log_b c = 1$

$\log_a b - \frac{\log_a c}{\log_a b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_a c = \frac{2\log_a^2 b - \log_a b}{2}$

$\log_a b = t \qquad 2t = \frac{2}{2t^2 - t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2t^2 - t}$

$\begin{cases} 2t^3 - t^2 - 1 = 0 \\ t \neq 0 \\ t \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$ из пред. пункта

Чистовик.

X слова ракет 2.

III. $2\log_b c = \log_c a$, $\log_c a - 2\log_a b = 1$.

$\log_c^2 a - 2\log_c b = \log_c a \iff \log_c b = \dfrac{\log_c^2 a - \log_c a}{2}$

$\log_c a = t$ ~~ЗМ~~

$2 \cdot \dfrac{2}{t^2 - t} = t \iff \begin{cases} t^3 - t^2 - 4 = 0 \\ t \neq 0 \\ t \neq 1 \end{cases}$

$(t-2)(t^2+t+2) = 0 \iff t = 2.$

$\log_c a = 2 \iff \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2.$

$\dfrac{x^2}{4} + 2x + 4 = 5x - 1 \quad x^2 - 12x + 20 = 0$

$x = \dfrac{12 \pm 8}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 2 \end{array}\right.$ Оба значения удовлетворяют ОДЗ.

Из трёх пунктов: $x \in \{2; 10\}$

Ответ: $x \in \{2; 10\}$

7.

$a = 2^{p_1} \cdot 3^{q_1}$

$b = 2^{p_2} \cdot 3^{q_2}$

$c = 2^{p_3} \cdot 3^{q_3}$

$p_1 < p_2 < p_3 \Rightarrow p_1 = 1 \quad p_3 = 15$

$q_1 < q_2 < q_3 \Rightarrow q_1 = 1 \quad q_3 = 16$

$1650 = 25 \cdot 66 =$

$4 \cdot 16 + 2 = 66$

15 , 45.

$5 \cdot 3$

$3^3 \cdot 5^2$

$5 \cdot 3^2 \cdot 17.$

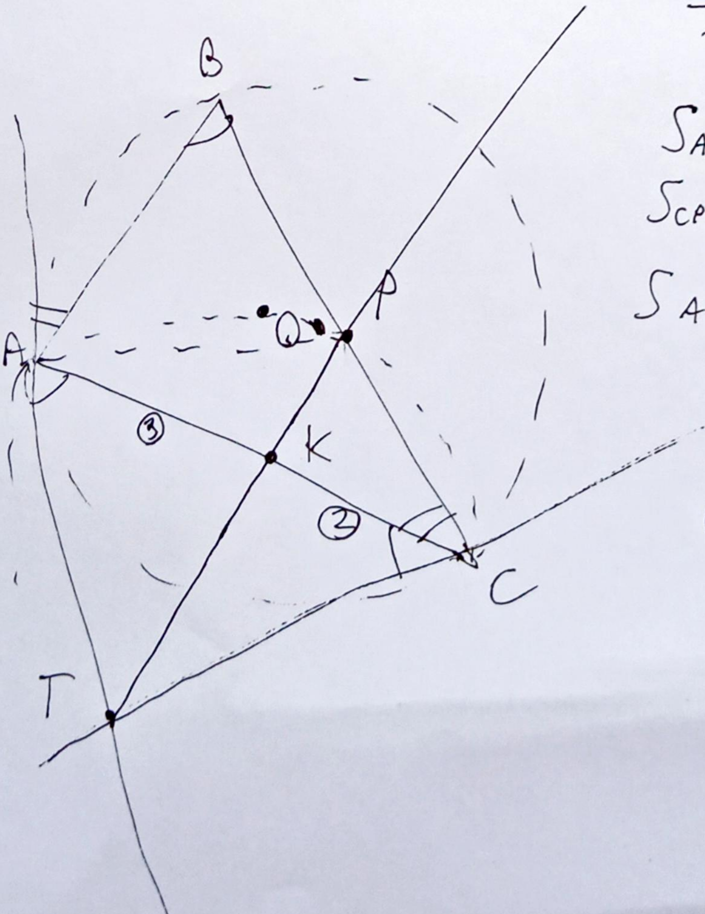
$5 \cdot 3^2 \cdot 17.$

$2^7 \cdot 3^5$

$2^{18} \cdot 3^3$

$2^{18} \cdot 3^5$

9056.



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

$S_{ABC} - ?$

$\frac{35 \cdot 243}{21} =$

$\frac{25 \cdot 74}{7}$

Черновик.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \qquad \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \qquad \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1).$

$5x-1=a \qquad 2\log_a \text{б} \quad 2\log_{\text{б}} c \quad \log_c a$

$4x+1=\text{б}$

$\frac{x}{2}+2=c$

1. $\log_a \text{б} = \frac{\log_a c}{\log_a \text{б}}$

$\log_a^2 \text{б} = \log_a c$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{\sqrt{74}}\cdot 10x\cdot\frac{5x}{3}\cdot\cancel{\sqrt{74}}$

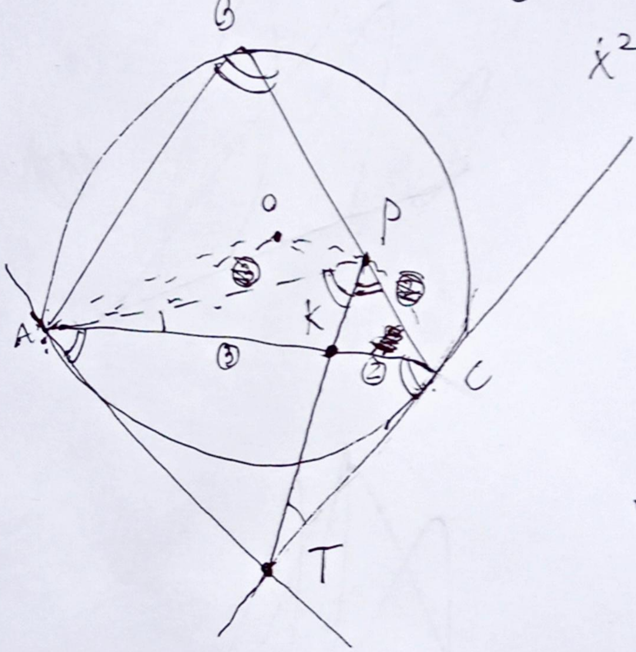
$\frac{350x^2}{6}$

$\cancel{\frac{CK}{PK}=\frac{KA}{AK}}$

$\frac{14x^2}{6}=1$

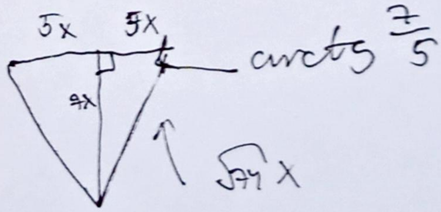
$x^2=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

$x=\sqrt{\frac{3}{7}}$



$49+25=74$

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot AP\cdot PC$$



$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{7}{5}.$

$5x=7\sqrt{1-x^2}$

$25x^2=49-49x^2$

$74x^2=49$

$x=\frac{7}{\sqrt{74}}$

$\frac{\sqrt{74}x}{PC}=\frac{3}{2}$

$PC=\frac{2\sqrt{74}x}{3}$

$\sqrt{1-\frac{49}{74}}=\sqrt{\frac{25}{74}}=$

Черновик.

$\cancel{7}\log_a b = \cancel{7}\log_b c \Rightarrow \log_a^2 b = \log_a c$

$D = 144 - 80 = 64$

$\log_a b - \log_c a = 1.$

$\log_a b - \cancel{\log} \frac{1}{\log_a c} = 1.$

$\log_c a - 2 \cdot \frac{\log_c b}{\log_c a} = 1.$

$\log_c^2 a - 2\log_c b = \log_c a$

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - t^2 - 1 & t-1 \\ \hline -\,2t^3 - 2t^2 & 2t^2 + t + 1 \\ -\,t^2 & \\ t^2 - t & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - t^2 - 4 & t-2 \\ \hline -\,t^3 - 2t^2 & t^2 + t + 2 \\ t^2 - 4 & \\ -\,t^2 - 2t & \end{array}$$

$(t-1)(2t^2 + t + 1) =$

$= 2t^3 + t^2 + t - 2t^2 - t - 1$

$2\log_a b = \log_c a$

$\log_c a - 2\log_a b = 1.$

$(t^2 + t + 2)(t-2) = t^3 - 2t^2 + t^2 \cancel{-2t+2t} - 4$

$2\log_a b \cdot \log_a c = 1.$

$\cancel{\log_c a}\ 2(\log_a b - \log_b c) = 1.$

$\log_a b - \cancel{\log} \frac{\log_a c}{\log_a b} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\log_a^2 b - \log_a c}{\log_a b} = \frac{1}{2}$$

$\log_a b = 2\log_a^2 b - 2\log_a c.$

$$\log_a c = \frac{2\log_a^2 b - \log_a b}{2}$$