Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102781**

ID профиля: **212365**

Вариант 17

№1 Чистовик

$a_1 = a_1$. Пусть разность прогрессии равна d.

Т.к. $a_1, a_2 \ldots$ — возр.-я арифметическая последовательность, состоящая из целых чисел, то $a_1; a_2 \ldots \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$

$a_6 = a_1 + 5d$; $a_7 = a_1 + 6d$; $a_{10} = a_1 + 9d$; $a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{12} = a_1 + 11d$

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$

$$\left.\begin{array}{l} a_6a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 \\ a_7a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 \end{array}\right| \Rightarrow a_7a_{11} = a_6a_{12} + 5d^2$$

$$\begin{array}{l} S + 1 < a_6a_{12} \ (1) \\ a_7a_{11} < S + 17 \ (2) \end{array};\ (1)+(2): \ S + a_7a_{11} + 1 < a_6a_{12} + S + 17 \Leftrightarrow a_6a_{12} + 5d^2 + 1 < a_6a_{12} + 17 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 5d^2 < 16 \Leftrightarrow d^2 < \frac{16}{5} \Leftrightarrow d \in \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Т.к. $d > 0$ и $d \in \mathbb{Z}$ и $d \in \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, то $d \in \left(0; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, но т.к. $1 < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$, и $d \in \mathbb{Z}$, то

$d = 1$

$S = 10a_1 + 45d = 10a_1 + 45$; $a_6a_{12} = a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 = a_1^2 + 16a_1 + 55$; $a_7a_{11} = a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 = a_1^2 + 16a_1 + 60$ сист.

$$\begin{cases} 10a_1 + 45 + 1 < a_1^2 + 16a + 55 \Leftrightarrow a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \Leftrightarrow (a_1+3)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -3 \\ 10a_1 + 45 + 17 > a_1^2 + 16a + 60 \Leftrightarrow a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0;\ D = 36 + 8 = 44,\ a_{1/2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11} \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$; $-7 < -3-\sqrt{11} < -6$, $0 < -3+\sqrt{11} < 1 \Rightarrow a_1 \in [-6; 0]$, т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \in [-6; 0] \\ a_1 \neq -3 \end{array}\right| \Rightarrow a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$$

Ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

1

№3

Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2) & (2)\end{cases}$$

(2): 1) $2a+2b\ge 2$, $a+b\ge 1$

Тогда $\min(2a+2b;2)=2$

$a^2+b^2\le 2$

$b\ge 1-a$

2) $2a+2b\le 2$, $a+b\le 1$

Тогда $\min(2a+2b;2)=2a+2b$

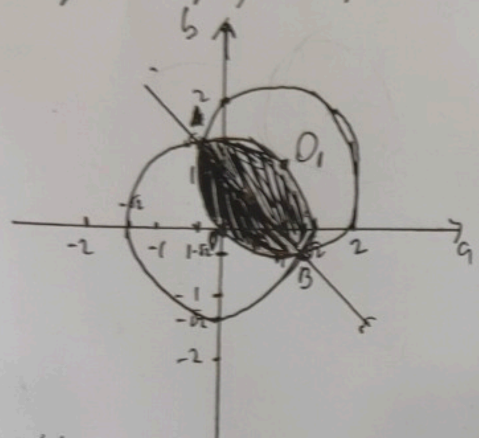
$a^2+b^2\le 2a+2b$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1\le 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$

$b\le 1-a$

Построим график нер-ва (2)



$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=a^2-2a+1+b^2-2b+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$, то есть точки пересеч. наших окружностей лежат на прямой $b=1-a$.

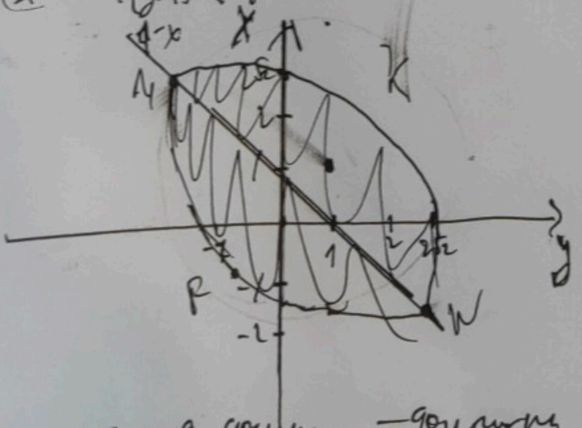
Закрашенная часть ~~графика~~ является графиком уравнения 2.

Нам надо найти ~~такие~~ x и y, чтобы существовала окружность с радиусом $\sqrt{2}$ центром в точке $(x;y)$ в осях „ba", ~~чтобы~~ такая, что она касается или пересекает график функции ②. Назовем точку с коорд. (x,y) - A.

Если $y\ge 1-x$, то $\rho(O;A)\le 2\sqrt{2}$ $O(0;0)$ $A(x;y)$ $\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+y^2\le 8$,

Если $y\le 1-x$, то $\rho(O_1;A)\le 2\sqrt{2}$ $O_1(1;1)$ $A(x;y)$ $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\le 8$



$x^2+(1-x)^2=8$

$2x^2-2x+1=8$

$2x^2-2x-7=0$

$D=4+56=60$

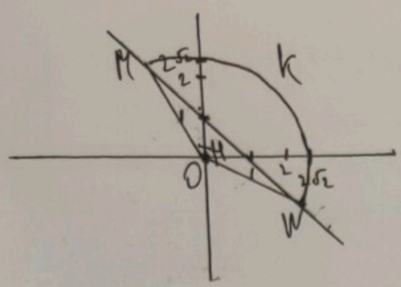
$x=\frac{2\pm 2\sqrt{15}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}$

(2)

Закрашенная фигура — фигура M. S_M-? $S_M=S_{NKW}+S_{NPW}$

21102781 (U2123...)

Чистовик



$OM = ON = R = 2\sqrt{2}$

$M\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2}; \frac{1+\sqrt{15}}{2}\right)$

$W\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2}; \frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)$ $\Rightarrow \vec{MW}\{\sqrt{15}; -\sqrt{15}\}$ $\Downarrow$ $MN = \sqrt{30}$

$MW^2 = MO^2 + OW^2 - 2MO\cdot OW \cdot \cos\varphi$

$30 = 2\cdot 8(1-\cos\varphi)$

$1-\cos\varphi = \frac{15}{8}$

$\cos\varphi = -\frac{7}{8} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$S_{\triangle MON} = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$S_{OMKN} = \pi R^2 \cdot \frac{\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}}{2\pi} = \frac{8\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}}{2} = 4\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$

$S_{MKN} = S_{OMKN} - S_{OMN} = 4\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{\sqrt{15}}{2}$

Аналогично найдём $S_{MFN} = 4\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{\sqrt{15}}{2}$

$S_{M} = 8\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right) - \sqrt{15}$

Ответ: $S_M = 8\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - \sqrt{15}$

(3)

№2

Черновик

$AB=2$
$BC=AC=5$
$AD=BD=6$

$(1-a)^2 + a^2 = 2$

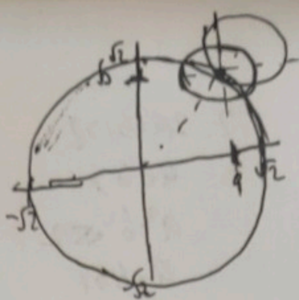
$c = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$b = 1 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$x > 1 - a$

$(x-1)^2 + (1-y)^2$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;\,2)\end{cases}$$



Черновик

$x\in[a-\sqrt{2};\ a+\sqrt{2}]$

$y\in[b-\sqrt{2};\ b+\sqrt{2}]$

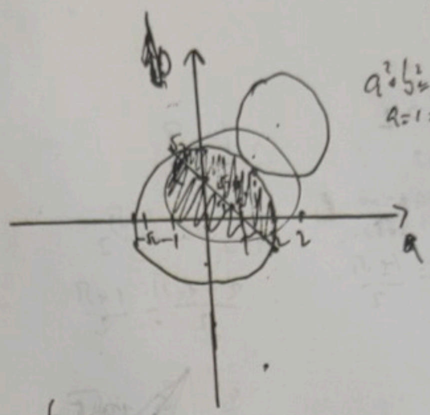
1. $a+b\ge 1$

$a^2+b^2\le 2$

~~$a\ge 1-b$~~

$b\ge 1-a$

$(a-x)^2+(b-y)^2\le 2$



$a^2+b^2=2$

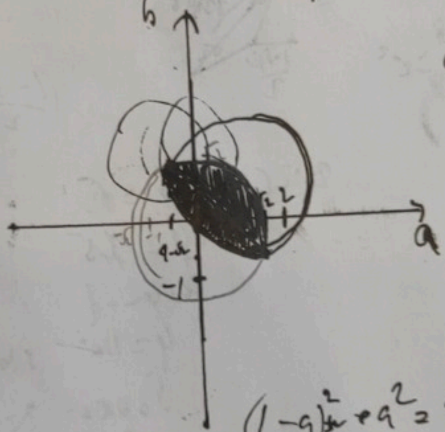
$a=1=b$

2. $a+b\le 1$ $\quad b\le 1-a$

$a^2+b^2\le 2a+2b$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1\le 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$



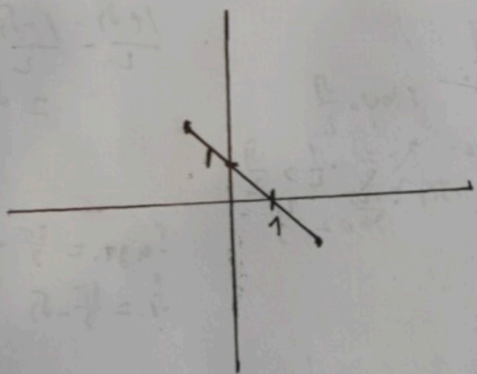
$a^2+b^2=2=(a-1)^2+(b-1)^2$

$a-2a+1-2b+1=0$

$2(a+b)=2$

$a=1-b$

$b=1-a$



$(1-a)^2+a^2=2$

$a^2+a^2-2a+1=2$

$2a^2-2a=1$

$2a^2-2a-1=0$

$D=4+8=12$

$a=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 2$ 1. $2(a+b)\le 2$ черновик бик

$a^2+b^2\le \min(2(a+b);2)$ $a+b\le 1$

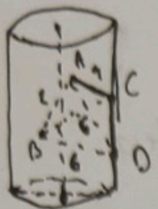
$a^2+b^2\le 2(a+b)$

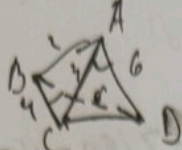
$a^2+b^2+2ab\le 2a+2b+2ab$

$(a+b)^2-2(a+b)-2ab\le 0$ $x_6=1$ $1-1$

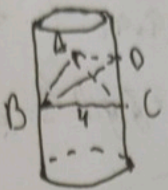
$D=4+8ab$ $(b-y)^2\le 2$

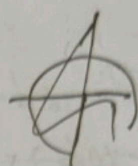
AB=2
AC=CB=5
AD=DB=6

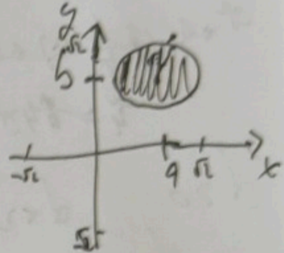




$CD+4>6$
$CD>2$
CD_a







$(x-a)^2+(y-b)^2\le 2$ $ab+1\ge 0$
$ab\ge -1$

1. $a+b\le 1$ $a+b\le 1$ $(a+b)^2\le 1$ 1^2

$(a+b)^2-2(a+b)-2ab\le 0$ $a^2+b^2+2ab\le 1$ $1=0$
≤ 1 $D=4+8ab=4(1+2ab)$ $ab+1\ge 0$ ≤ 1 $=2$
$2ab\ge -1$ 5
$a+b=\frac{2\pm 2\sqrt{ab+1}}{2}=1\pm\sqrt{ab+1}$ 4

$2(a+b)\ge 2$ $[0;1]-2[0;1]-2ab\le 0$
$a+b\ge 1$ $a^2\le 2-b^2$ $[-1;1]$
$a^2+b^2\le 2$ $2-b^2\ge 0$ $[-2;+\infty]-2[-1;1]$
$b^2\le 2$ $[-1;+\infty)$
$a\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ $a\in[\sqrt{2-b^2};\sqrt{2-b^2}]$ $\sqrt{15}$
$b\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$
$ab\ge -1$ $\frac{1+\sqrt{15}}{2}-\frac{1-\sqrt{15}}{2}=$

$(x-1)^2+x^2=8$
$x^2-2x+1=8$ $2\cdot 8(1-\cos\varphi)=30$
$2x^2-2x+1=8$ $1-\cos\varphi=\frac{30}{16}=\frac{15}{8}$
$2x^2-2x-7=0$ $\cos\varphi=-\frac{7}{8}$
$\frac{D}{4}=1+14=15$ $x=\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}$ $\sin\varphi=\sqrt{\frac{64-49}{64}}=$
$=\frac{\sqrt{15}}{8}$

21102781 (U212365 M1298907)

Черновик $a \in Z$ $d \in Z$

$a_1 a_2 \dots$ $a_1 = a$ $a_{10} = a_1 + 9d$ $a_6 = a + 5d$ $a_{12} = a + 11d$

$S = \frac{a + a + 9d}{2} \cdot 10 = 5(2a + 9d) = 10a + 45d$ $a_7 = a + 6d$ $a_{11} = a + 10d$

$a_6 \cdot a_{12} = (a+5d)(a+11d) = a^2 + 11ad + 5ad + 55d^2 = a^2 + 16ad + 55d^2$

$a_7 \; a_{11} = (a+6d)(a+10d) = a^2 + 16ad + 60d^2$

$a_7 a_{11} = a_6 a_{12} + 5d^2$

$a_6 a_{12} > 10a + 45d + 1$

$a_6 a_{12} + 5d^2 < S + 17 \quad 10a + 45d + 17$

$a^2 + 16ad + 55d^2 - 10a - 45d - 1 > 0$

~~$a^2 + a(16d - 10) + 55d^2 - 45d - 1 > 0$~~

~~$\frac{D}{4} = 64d^2 - 80d + 25 - 55d^2 + 45d + 1 = 5d^2 - 35d + 26$~~

$d > 0$ $d < 2$

$d = 1$

$S = 10a + 45$

$a_6 a_{12} = a^2 + 16a + 55$

$a^2 + 16a + 55 > 10a + 45 + 1$

$a^2 + 6a + 9 > 0$

$(a+3)^2 > 0$

$a \neq -3$

$a_7 a_{11} = a^2 + 16a + 60 < 10a + 45 + 17$

$a^2 + 6a - 2 < 0$

$D = 36 + 8 = 44$

$a = \frac{-6 \pm 2\sqrt{44}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$ $a \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11})$

$a = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

$-7 < -3 - \sqrt{11} < -6$

$0 < -3 + \sqrt{11} < 1$

$a \in [-6; 0] / \{-3\}$

$S + 17 > a_6 a_{12} + 5d^2$

$a_6 a_{12} > S + 1$

$S + 17 + a_6 a_{12} > a_6 a_{12} + S + 5d^2 + 1$

$5d^2 < 16$

$d \in (-4; 4)$ $d = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d \in \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$1 < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

$4 < 2\sqrt{5}$

0 1 2 … a_6 a_7 … a_{11} a_{12}

5 6 … 10 11

$S_{10} = \frac{0+9}{2} \cdot 10 = 45$

$55 > 45 + 1$

60 ~~< 45 + 17~~

1 2 3 a_4 a_5 6 7 8 9 10 11 12

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

$S = \frac{-3+6}{2} \cdot 10 = 15$ $2 \cdot 8 > 15$ (нет)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102781**

ID профиля: **212365**

Вариант 17

~~Пусть a, b, c~~

$\in Z$,

№4

Т.к. $a, b, c \in N$, то $НОД(a,b,c) \cdot НОК(a,b,c) = abc$.

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 6 \\ НОК(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \\ НОД(a,b,c) \cdot НОК(a,b,c) = abc \end{cases} \Leftrightarrow abc = 6 \cdot 2^{15} \cdot 3^{16} = 2^{16} \cdot 3^{17}$$

Т.к. $a, b, c \in N$, и $abc = 2^{16} \cdot 3^{17}$, то мы можем представить их как: $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$ и $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$, и являются целыми числами.

Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} = 2^{16} \cdot 3^{17} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 16 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 17 \end{cases}$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 16 \Leftrightarrow \alpha_2+\alpha_3 = 16-\alpha_1$. Т.к. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \in Z$, то если принять $16-\alpha_1$ за какое-то неотр-е число, то вариантов выбрать α_2 и α_3 будет $17-\alpha_1$, т.к. выбирая какое-либо α_2, $\alpha_3 = 16-\alpha_1-\alpha_2$, то есть тоже какому-то опр-му числу. Тогда при $\alpha_1 = 0$ вариантов выбрать α_2 и α_3 $k_0 = 17-0$, при $\alpha_1 = 1$ в-ов $k_1 = 17-1$ и т.д.

т.к. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 16$, то $\alpha_1 \leq 16$. Зн-т всего вариантов выбрать комбинацию чисел α_1, α_2 и α_3 $= (17-0)+(17-1)+(17-2)+\ldots+17-17 = 17 \cdot 18-(0+1+\ldots+17) = 17 \cdot 18 - \left(\frac{0+17}{2} \cdot 18\right) =$
$= 17 \cdot 9$

Аналогично рассуждая, вариантов выбрать ~~???~~ $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ $(18-0)+(18-1)+\ldots+(18-18)$
$= 19 \cdot 18 - (0+1+\ldots+18) = 19 \cdot 18 - \frac{0+18}{2} \cdot 19 = 19 \cdot 9$

Т.к. значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не зависят от значений β_1, β_2 и β_3, то вариантов выбрать числа a, b, c, равные $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$, $2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$, $2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3}$ соответственно, $19 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 9 =$
$= 81 \cdot 17 \cdot 19 = 26163$.

Ответ: 26163

1

21102781 (U212365 M1298908)

№5

Чистовик

Произведение наших логарифмов на ОДЗ равно: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$$= \frac{\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)}{\log_{(\frac{x}{2}+2)^2}(4x+1)}\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 4\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 4$$

ОДЗ: $\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ 5x-1>0 \\ \sqrt{5x-1}>0 \\ \sqrt{5x-1}\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \\ (\frac{x}{2}+2)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases}$

Пусть два равных логарифма равны α, тогда третий $\alpha-1$. Значит их произведение равно $\alpha^3-\alpha^2$. А т.к. их произведение равно 4, то $\alpha^3-\alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha^2-4=0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha^2+\alpha+2)=0 \Leftrightarrow \alpha=2$. То есть, если один из наших лог-ов равен двум, то т.к. их произведение равно 4, а один из них меньше других на 1, то все условия выполняются. Следовательно чтобы 2 из наших чисел были равны, а третье было меньше их на 1, необходимо чтобы один из логарифмов равнялся 2 на ОДЗ.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \\ \log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)^2=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{array}\right. \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4x+1=5x-1 \\ \frac{x}{2}+2=4x+1 \\ 5x-1=(\frac{x}{2}+2)^2 \end{array}\right. \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{2}{7} \\ \frac{x^2}{4}+2x+4=5x-1 \end{array}\right. \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{2}{7} \\ x^2+8x+16=20x-4 \end{array}\right. \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{2}{7} \\ x^2-12x+20=0 \end{array}\right. \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{2}{7} \\ x=10;2 \end{array}\right. \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x=2;\ \frac{2}{7};\ 10$$

Подставив значения $\frac{2}{7}$, 2 и 10, [illegible] подходит только 2.

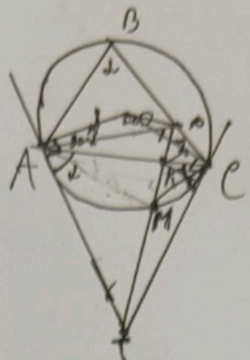
(2)

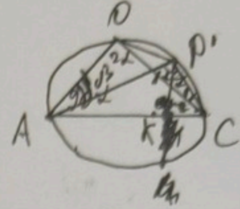
Ответ: $x=2$

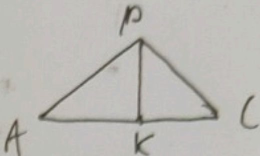
21102781 (U212365 M1298908)

№6

Чистовик







Пусть $\angle TAC = \alpha$, тогда, т.к. $TA = TC$ (кас-е), то $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$

т.к. TA, TC - кас-е, то $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = 90 - \alpha \Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$

т. A, O, P и C лежат на одн. окружности $\Rightarrow \angle AOC = \angle APC = 2\alpha$; $AOC = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = \alpha$

$\angle ABC = \alpha$

PK - биссектриса $\Rightarrow \angle CPK = \alpha$ $\Big| \Rightarrow PK \parallel AB$, $\angle C$ - общий $\Big| \Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{S_{CPK}}{S_{CBA}} = \left(\frac{CK}{CA}\right)^2$

$S_{APK} = 6$, $S_{CPK} = 4$ $\Big| \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2} \Rightarrow KC = \frac{2}{5}AC \Rightarrow \frac{KC}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{CPK}}{S_{ABC}} = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{25}{4} \cdot S_{CPK} =$

$= 25$

Ответ: а) $S_{ABC} = 25$

~~$\angle BA$ $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$~~

~~$AC^2 = 2R^2(1 - \cos 2\alpha)$~~

(3)

21102781 (U212365 M1298908)

№4

Черновик

Т.к. $a, b, c \in N$, то $НОД(a,b,c) \cdot НОК(a,b,c) = abc$

$$\left.\begin{cases} НОД(a,b,c) = 6 \\ НОК(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \\ НОК(a;b,c) \cdot НОД(a,b,c) = abc \end{cases}\right| \Rightarrow abc = 6 \cdot 2^{15} \cdot 3^{16} = 2^{16} \cdot 3^{17}$$

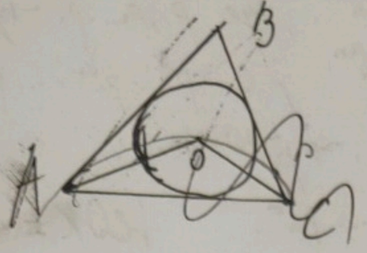
Т.к. $a, b, c \in N$, то мы можем представить их, как произведение степеней простых чисел.

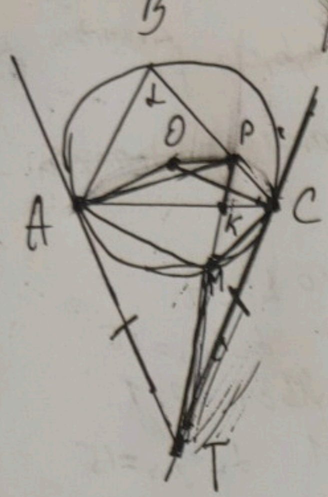
Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_n^{\alpha_n}$, где $p_1, p_2 \ldots p_n$ - простые числа, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in Z$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n \geq 0$, $\in Z$; $c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \ldots p_n^{\gamma_n}$, $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n \geq 0$.

Т.к. $a, b, c \in N$,

№6.

Черновик





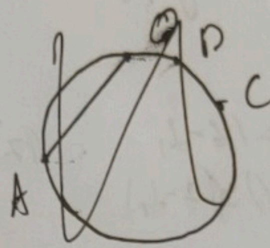
$S_{\triangle APK}=6$

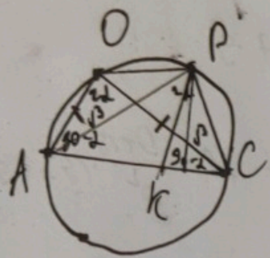
$S_{ACPK}=4$

$TA=TC$

$\angle APC=\angle AOC=2\angle B$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha}=2r$





$90-\alpha-\beta+90-\alpha+\beta$

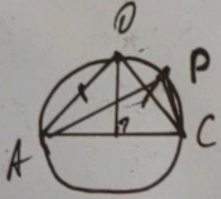
$\triangle TPC\sim\triangle TMC$

$\frac{TC}{TP}=\frac{TM}{TC}$

$\angle TMC=\angle TPC$

$TM\cdot TP=TC^2$

$\frac{TM}{TC}=\frac{TC}{TP}$



$\frac{R^2\cdot\sin 2\alpha}{2}=S_{AOC}$

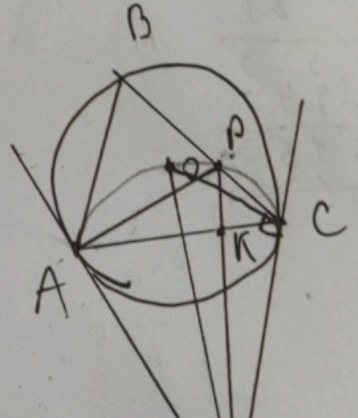
$\cancel{AP\cdot PC}$

$\cancel{AP\cdot BC=R^2}$

$AP\cdot PC\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2}=10$

$\cancel{\sin 2\alpha}$

$\frac{R^2}{AP\cdot PC}\cdot 10=S_{AOC}$



$TO^2=TC^2+R^2$

Черновик

Т.к. a, b и c – нат.-е, разложим каждое как пр-е простых ~~чисел~~ степеней чисел

Пусть $a = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, где $p_1, p_2 \ldots p_n$ – простые числа $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \geq 0$

Ан-но $b = p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n}$; $c = p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\gamma_n}$

$abc = p_1^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n+\beta_n+\gamma_n}$

$3^1\cdot 2^1 \quad 3^2\cdot 2^1$

НОД $(a,b,c) = p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{x_n}$ НОК $(a,b,c) = p_1^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-x_1}\cdot p_2^{\ldots}\cdot\ldots\cdot p_n^{\ldots}$

~~Не умаляя общности скажем, что~~

~~$\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)+\max(\ldots$~~

$abc = 6\cdot 2^{15}\cdot 3^{16} = 2^{16}\cdot 3^{17}$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}$
$b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}$
$c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 16$
$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 17$

$\alpha_i \geq 0 \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}$

$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2+\alpha_3 = 16$

$17\cdot 1$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2+\alpha_3 = 15$

$\alpha_2+\alpha_3 = 16-\alpha_1$

$(16-\alpha_1+1) = (17-\alpha_1)$

$(17-0)+(17-1)+17-2+\ldots+17-17 = 17\cdot 18 - \frac{0+17}{2}\cdot 18 = 17\cdot 9$

$\beta_2+\beta_3 = (17-\beta_1)$

$18-\beta_1 \qquad (18-0)+(18-1)+\ldots+18-18 = 19\cdot 19 - \frac{0+18}{2}\cdot 19 = 19\cdot 9$

$17\cdot 9\cdot 19\cdot 9 = 81\cdot 17\cdot 19$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 19 \\ \hline 153 \\ +\ 17\ \ \\ \hline 323 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 323 \\ \times\ 81 \\ \hline 323 \\ 2584\ \ \\ \hline 26163 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ \times\ 17 \\ \hline 1377 \\ \times\ 19 \\ \hline 12393 \\ +\ 1377\ \ \\ \hline 26163 \end{array}$$

21102781 (U212365 M1298908)

Черновик

$\log_b a \cdot \log_a c = \frac{\log_{b} a}{\log_c a} = \log_b c$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \cdot \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right) \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 1$

$\alpha^3 - \alpha^2 = 4$

$\alpha^3 - \alpha^2 - 4 = 0$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

$(\alpha-2)(\alpha^2+\alpha+2)=0 \Leftrightarrow \alpha=2$, значит если один из них равен 2, то 2 других равны и равны 1.

$\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = 2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2 \end{array}\right.$

$\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \sqrt{5x-1}>0 \\ \sqrt{5x-1}\neq 1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2>0 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2\neq 1 \\ (5x-1)>0 \\ (5x-1)\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{array}$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \Leftrightarrow 4x+1 = 5x-1$

$2 = x$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+2 = 4x+1$

$x+4 = 8x+2$

$2 = 6x$

$\boxed{x=\frac{2}{3}}$

$5x-1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$5x-1 = \frac{x^2}{4}+2x+4$

$20x-4 = x^2+8x+16$

$x^2-12x+20=0$

$\frac{D}{4} = 36-20=16$

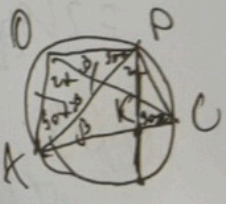
$x = \frac{6\pm 4}{1} =$

$D = 144-80=64$

$x = \frac{12\pm 8}{2} = 6\pm 4 = \boxed{10;2}$

$\log_{\sqrt{5x}}$ $2\log$ $\log$

$x^2+x+2=0$



НОД$(x,y,z)\cdot$НОК$(x,y,z) = xyz$

$a^{\log_b c}$

$p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots \quad p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}\ldots$

$p_1^{\alpha_1}$

$\frac{2}{7}$

(0;7)

$\alpha =$

3 3 2 = 9

$\log_{\sqrt{40}}(41)$.

21102781 (U212365 M1298908)

Черновик

$НОД(a,b,c)=6$

$НОК(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16}$ $\quad НОД\cdot НОК = abc$ $\quad a \geq 6,\ b \geq 6,\ c \geq 6$

$abc = 2^{15}\cdot 3^{16}\cdot 2\cdot 3 = 2^{16}\cdot 3^{17}$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}$, где $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$

$b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}$ $\quad \alpha_2, \beta_2 \geq 0$

$c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}$ $\quad \alpha_3, \beta_3 \geq 0$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 16$ $\quad \alpha_i \geq 0$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 17$ $\quad \beta_i \geq 0$

$\alpha_1 = 0$ $\quad \alpha_2+\alpha_3 = 16$ $\quad \alpha_1 = 1$ $\quad \alpha_2+\alpha_3 = 15$

$17\begin{cases} 0 & 16 \\ 1 & 15 \\ \dots & \\ 16 & 0 \end{cases}$ $\quad 16\begin{cases} 0 & 15 \\ 1 & 14 \\ \dots & \\ 15 & 0 \end{cases}$

$17+16+\dots+1 = \frac{1+17}{2}\cdot 17 = 9\cdot 17 = 153$

$\beta_1 = 0$ $\quad \beta_2+\beta_3 = 17$

$18\begin{cases} 17 & 0 \\ 16 & 1 \\ \dots & \\ 0 & 17 \end{cases}$

$18+17+\dots+1 = \frac{1+18}{2}\cdot 18 = 9\cdot 19$

~~$9\cdot 17 + 9\cdot 19 = 9\cdot 36 = 324$~~

$9\cdot 19\cdot 9\cdot 17 = 81\cdot 17\cdot 19$

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ $\quad \log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$

№2

$a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$b = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

На ОДЗ $abc = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot \log_{4x+1}\dots = \frac{\dots}{\log\left(\frac{x}{2}+2\right)^2} = \log_{\dots}\sqrt{5x-1}\cdot\log\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$3\alpha-1$ $\quad \alpha^2(\alpha-1) = \alpha^3-\alpha^2$

$\alpha\cdot\alpha\cdot(\alpha-1) = \alpha^3-\alpha^2$ $\quad \alpha^2(\alpha-1)$

$= \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+2}\sqrt{5x-1}\cdot\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \frac{1}{2}$

~~$3\alpha-1 = \frac{1}{2}$~~

~~$3\alpha = 1{,}5$~~

~~$\alpha = \frac{1}{2}$~~

$\alpha^3-\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad 2\alpha^3-2\alpha-1=0$

~~$\alpha^3-\alpha-\frac{1}{2}=0$~~

1 0 −1 $-\frac{1}{2}$

ОДЗ:

~~$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \frac{1}{2}$~~

~~$\alpha^3-\alpha = 2$~~

~~$\alpha^3-\alpha-2=0$~~

1 0 −1 −2

−1 | 1 −1 0 −3

$\alpha^3-\alpha^2 = \frac{1}{2}$

$\alpha^3-\alpha^2-\frac{1}{2}=0$

1 −1 0 $-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$ | 1 $-\frac{3}{2}$

1 1 0 0

$\alpha^2(\alpha-1) = \frac{1}{2}$

$\alpha^3-\alpha^2-\frac{1}{2}=0$

21102781 (U212365 M1298908)