Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102645**

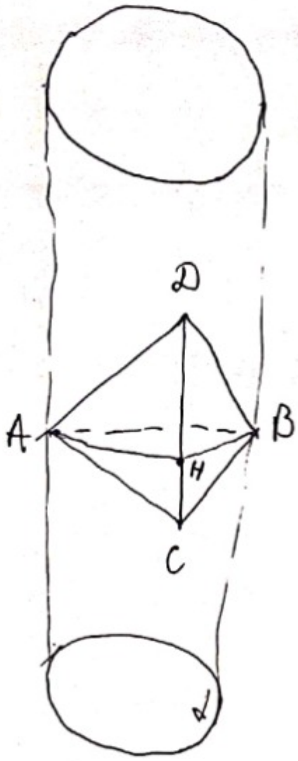
ID профиля: **328821**

Вариант 17

Чистовик

математика, 11 класс

2)



Пусть $BH \perp CD$, $H \in$ линии CD.

(~~Пусть $BH_1 \perp CD$, $H_1 \in$ линия CD. $\angle ADC = \angle CDB$, BDC~~ ⇒ (по 3 сторонам) ~~$DH = DH_1$~~ ~~и H, H_1 на~~ $\Rightarrow H_1 = H$) ~~так как~~ высоты в равных ~~треуг. падают~~

$$\begin{cases} AD = DB \\ DH \\ \angle ADH = \angle BDH \end{cases} \Rightarrow \triangle ADH = \triangle BDH \Rightarrow \angle AHD = \angle BHD = 90^\circ$$

(так как $\triangle ADC = \triangle BDC$ по трем равным сторонам, то либо $\angle ADH = \angle BDH = \angle ADC$, либо оба равны $180^\circ - \angle ADC$)

$$\begin{cases} DH \perp HB \\ DH \perp HA \end{cases} \Rightarrow DH \perp (ABH) \Rightarrow \left.\begin{matrix} DH \perp AB \\ DH \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} AB \parallel \alpha \\ AH \parallel \alpha \end{matrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (ABH) \parallel \alpha \Rightarrow$ сечение прох. через $A; B; H$ будет кругом равным (основ.?) цилиндра

Получается, нам нужны тетраэдры, у которых R описанной около $\triangle ABH$ наименьший из возможных.

$$2R = \frac{AB}{\sin\angle AHB} = \frac{2}{\sin\angle AHB} \geq 2$$ (не может быть отрицательным)

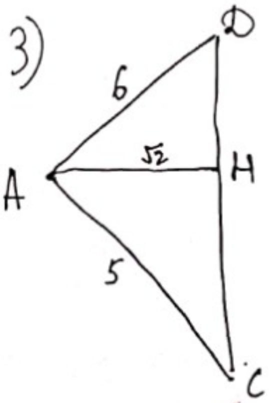
минимум достигается при $\sin\angle AHB = 1$, $\boxed{\angle AHB = 90^\circ}$

$AH = HB$ (высоты в равных треуг. $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$)

$2^2 = AH^2 + HB^2 = 2AH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{2}$

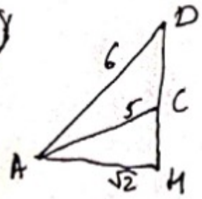
1) 

невозможно так как $AD > AC$
$AD = 6$, $AC = 5$

3) 

$CD = DH + HC = \sqrt{6^2 - \sqrt{2}^2} + \sqrt{5^2 - \sqrt{2}^2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{21}$

$$\boxed{\text{Ответ. } CD = 4\sqrt{2} \pm \sqrt{21}}$$

2) 

$CD = DH - CH =$
$= \sqrt{6^2 - \sqrt{2}^2} - \sqrt{5^2 - \sqrt{2}^2} =$
$= 4\sqrt{2} - \sqrt{21}$

3)

Чистовик

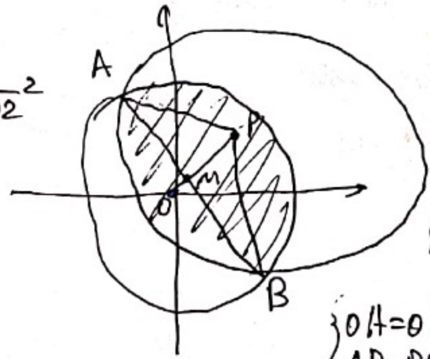
Математика
11 класс

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 \quad (1)\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,\ 2) \quad (2)\end{cases}$$

Давайте сначала отобразим на дек. плоскости точки $(a;b)$ уд. (2)

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2\le 2a+2b\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2\le \sqrt{2}^2\\ a^2+b^2\le\sqrt{2}^2\end{cases}$$

два круга с рад. $\sqrt{2}$, центрами в $(0;0)$ и $(1;1)$



$O(0;0)$ и $P(1;1)$

$OA=OB=PA=PB=\sqrt{2}$

$OP=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Пусть $AB\cap OP=M$

$$\begin{cases}OA=OB=\sqrt{2}\\ AP=PB=\sqrt{2}\\ OP\end{cases}\Rightarrow \triangle AOP=\triangle OPB\Rightarrow$$

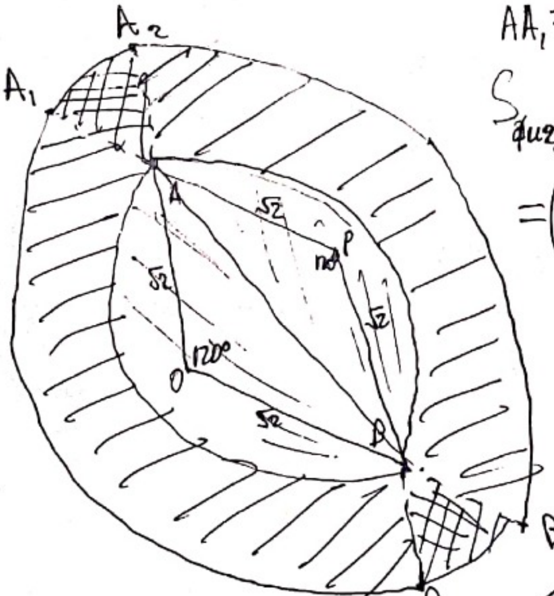
$\Rightarrow \angle AOP=\angle \cancel{OPB}\ \angle POB$

равнобедр. $\triangle\Rightarrow OM\perp AB\Rightarrow$

равнобедр. $\triangle OAP\Rightarrow OM=MP$

$$\Rightarrow \angle OPB=\arccos\frac{PM}{PB}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}=60^\circ\Rightarrow\angle APB=2\cdot 60^\circ=120^\circ=\angle AOB$$

Теперь, (1) ~~объединение~~ множ. точек уд. не более чем $\sqrt{2}$ от чудо-фигуры отображенной ранее. явл. искомыми $(x;y)$



$AA_1=AA_2=BB_1=BB_2=\sqrt{2}$ $\quad\angle A_1AA_2=\angle PAO=\angle PAB+\angle OAB=60^\circ=\angle B_1BB_2$

$$S_{\text{фигуры}}=S_{A_2OB_2}+S_{A_1PB_1}-S_{\triangle APB}-S_{\triangle AOB}+S_{AA_1A_2}+S_{BB_1B_2}=$$

$$=\left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{2})^2\right)\cdot 2-\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)\cdot 2+\left(\frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot\sqrt{2}^2\right)\cdot 2=$$

$$=\frac{16\pi}{3}-\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}=\boxed{\frac{18\pi}{3}-\sqrt{3}}=6\pi-\sqrt{3}$$

Примечание. OA_2B_2, PA_1B_1 это части (долька(?) сектор(?)) кругов с радиусами $\sqrt{2}+\sqrt{2}$

AA_1A_2 - часть круга с радиусом $\sqrt{2}$

Примечание.

PA_1 — это продолжение PA

PB_1 — это прод. PB

OA_2 — это прод. OA

OB_2 — это прод. OB

~~Ответ. $\frac{14\pi}{3}-\sqrt{3}$~~

$\boxed{\text{Ответ. } 6\pi-\sqrt{3}}$

Черновик

$\pi \in (3;4)$

$S = a_1 + a_1 + k + a_1 + 2k + \ldots + a_1 + 9k = 10a_1 + k \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 10a_1 + 45k$

$(a_1+5k)(a_1+11k) > 10a_1 + 45k + 1$

$(a_1+6k)(a_1+10k) < 10a_1 + 45k + 17$

$a_1^2 + 16a_1k + 55k^2 - 10a_1 - 45k - 1 > 0$

$a_1^2 + 16a_1k + 60k^2 - 10a_1 - 45k - 17 < 0$

$-5k^2 + 16 > 0$ $\quad k^2 < \frac{16}{5}$

$k \in \{\pm 1\}$ $\quad k = 1$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \quad (a_1+3)^2 > 0$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \quad 36+8=42 \quad \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2}$

$-3-3$

$-3-4$

$36+8=44$

$-3+3$

$\frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2}$

$-3+4$

$-3 \pm \sqrt{11}$

$2 = x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$2x + 2y = \ldots$

$x + y = -1$

$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \le 2 \\ a^2 + b^2 \le 2 \end{cases}$

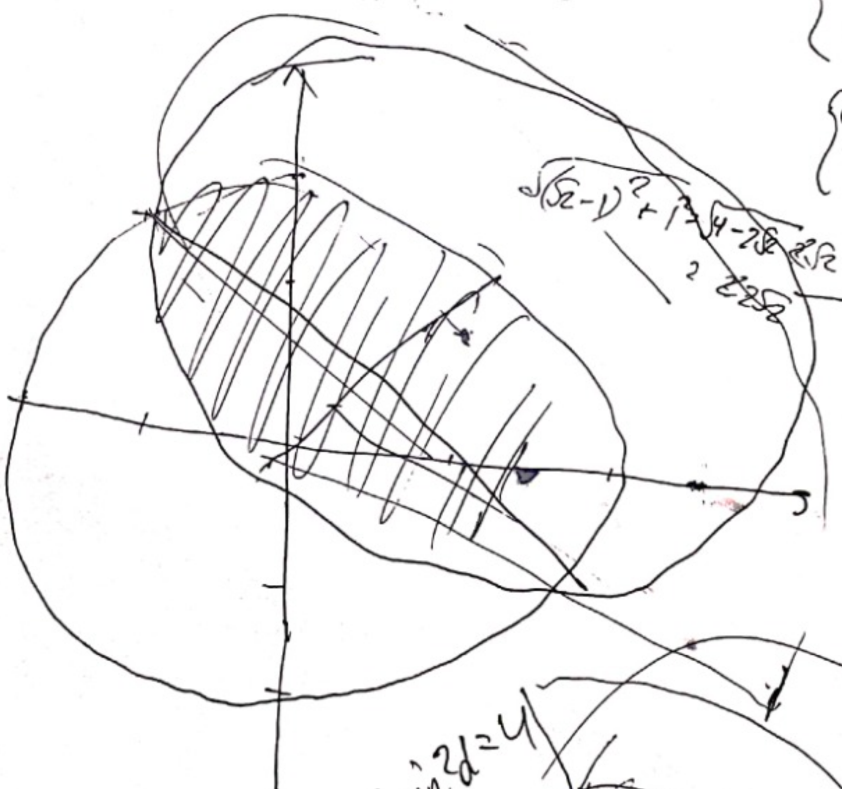
$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 \le \sqrt{2}^2 \\ a^2 + b^2 \le \sqrt{2}^2 \end{cases}$

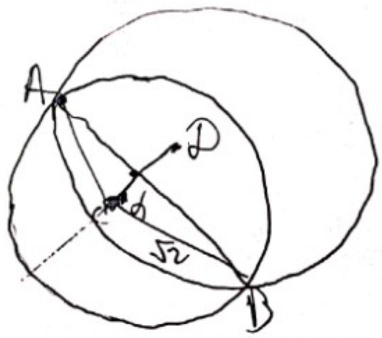
$y^2 + 2y + 1 + y^2 = 2$

$2y^2 + 2y - 1 = 0$

$4 + 8 = 12$

$\frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{4} = -1 \pm$





$CD = \sqrt{2}$

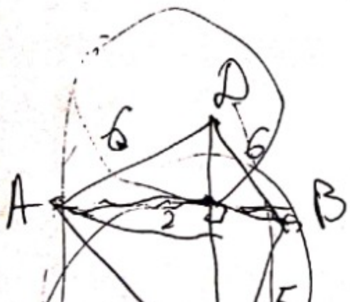
$AB = 2\sqrt{\sqrt{2}^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$

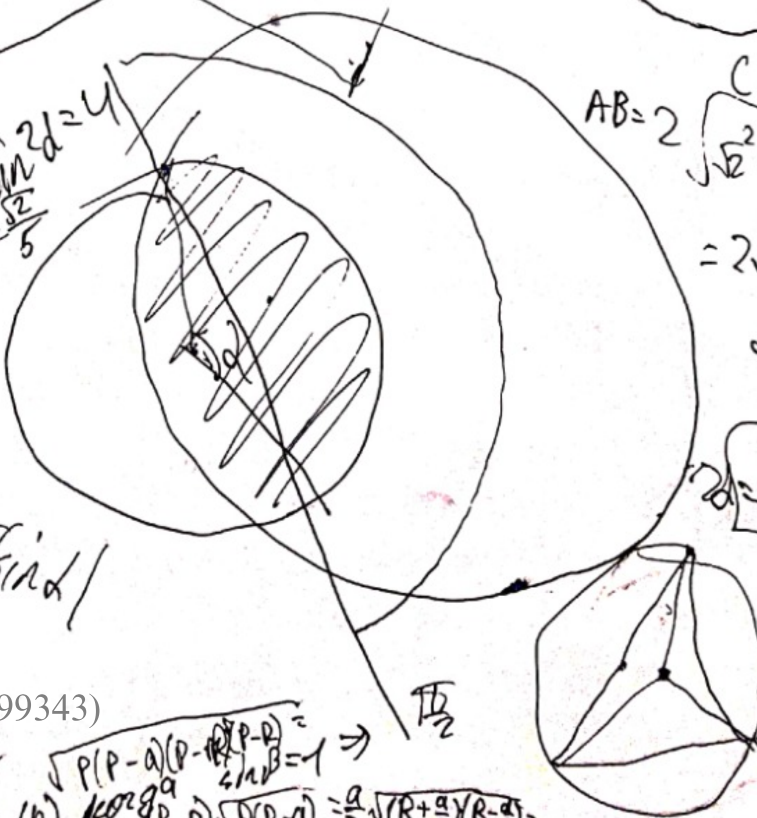
$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} = 60^\circ$

$2\alpha = \boxed{120^\circ}$

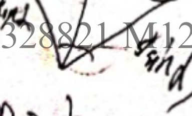
$2 \cdot 25 \cdot \sin^2 \alpha = 4$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$





$h = 5\sin\alpha$



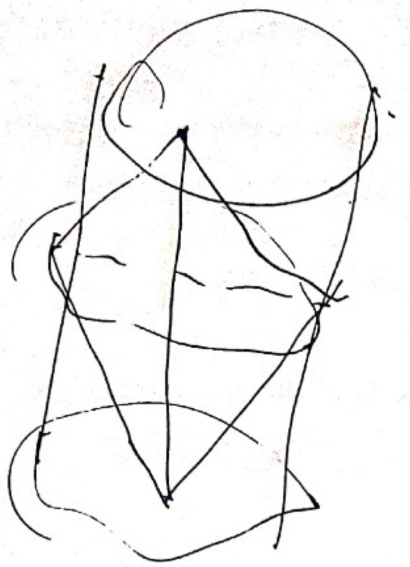
$\frac{2}{\sin\beta} = 2R \quad R = \frac{1}{\sin\beta}$

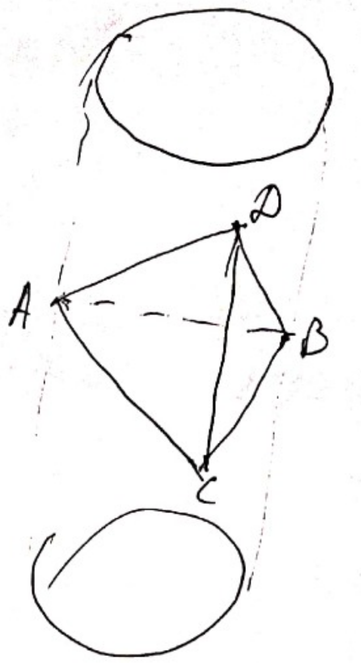
$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \ldots$ $\sin\beta = 1 \Rightarrow$

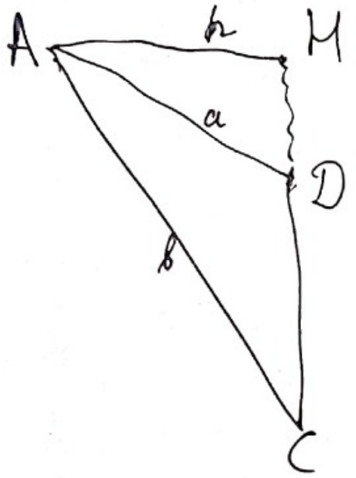
$\min(R)$; $(p-R)\sqrt{p(p-a)} = \frac{a}{2}\sqrt{(R+\frac{a}{2})(R-\frac{a}{2})}$

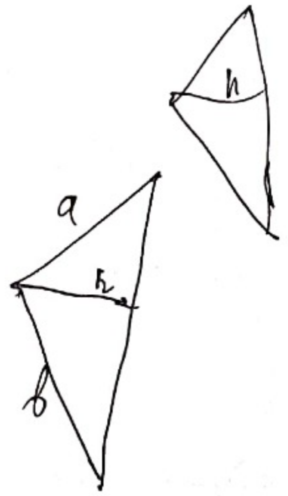
$\frac{\pi}{2}$

Черновик









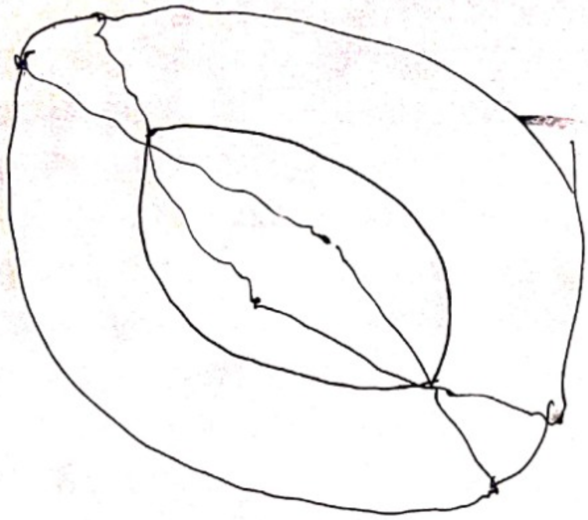
21102645 (U328821 M1299343)

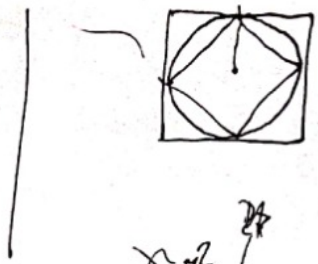
Черновик

$\boxed{S = \pi r^2}$

3,14

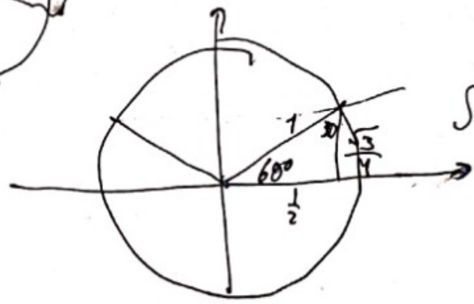
1,



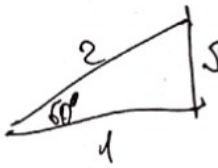


$\cancel{\frac{\pi \cdot r^2}{2} > 2}$

$\cancel{3{,}14 > 4}$



$\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



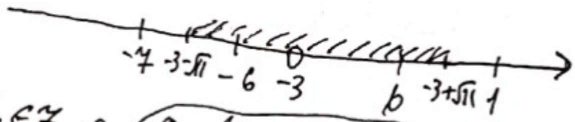
1

$S = a_1 + (a_1 + k) + (a_1 + 2k) + \ldots + (a_1 + 9k) = 10a_1 + k \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 10a_1 + 45k$

$\begin{cases} (a_1 + 5k)(a_1 + 11k) > 10a_1 + 45k + 1 \; (1) \\ (a_1 + 6k)(a_1 + 10k) < 10a_1 + 45k + 17 \; (2) \end{cases}$ $(1) - (2) \Rightarrow -5k^2 > -16 \Rightarrow \begin{cases} k > -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ k < \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Имеем $k > 0, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1,$

подставим в $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}) \end{cases}$



$a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Ответ. $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Часть 2

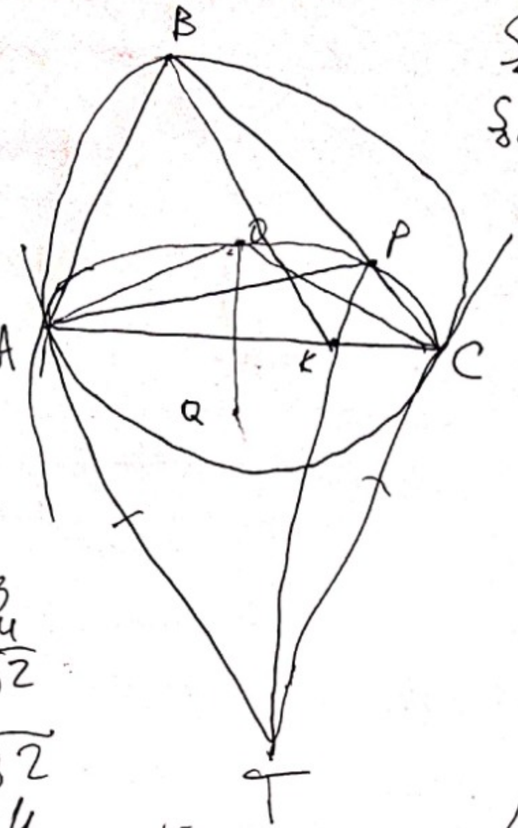
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102645**

ID профиля: **328821**

Вариант 17

Черновик



$S_{\triangle APK}=6$

$S_{\triangle CPK}=4$

10/34

10..12/34

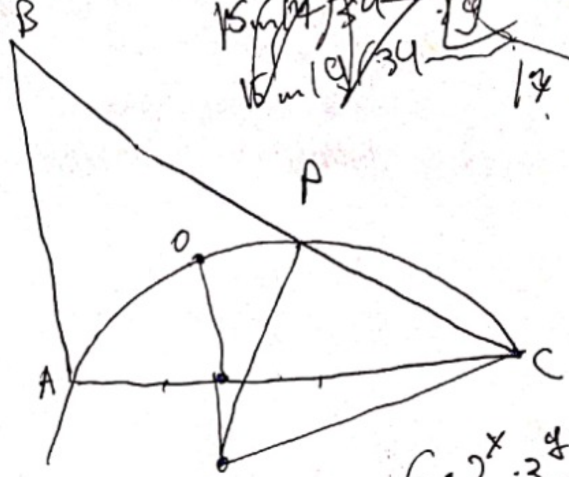
~~15..14/34~~

~~16..19/34~~

17

$\times\begin{array}{r}182\\36\end{array}$ $\begin{array}{r}+1092\\546\\\hline 6552\end{array}$

$\times\begin{array}{r}13\\14\end{array}$ $\begin{array}{r}+52\\13\\\hline 182\end{array}$



$\times\begin{array}{r}13\\14\\\hline +52\\13\\\hline 182\end{array}$

$6\cdot 2^x\cdot 3^y$

$6\cdot 2^\alpha\cdot 3^\beta$

$6\cdot 2^p\cdot 2^q$

$\min(x,\alpha,p)=0$

$\min(y,\beta,q)=0$

$\max(x,\alpha,p)=14$

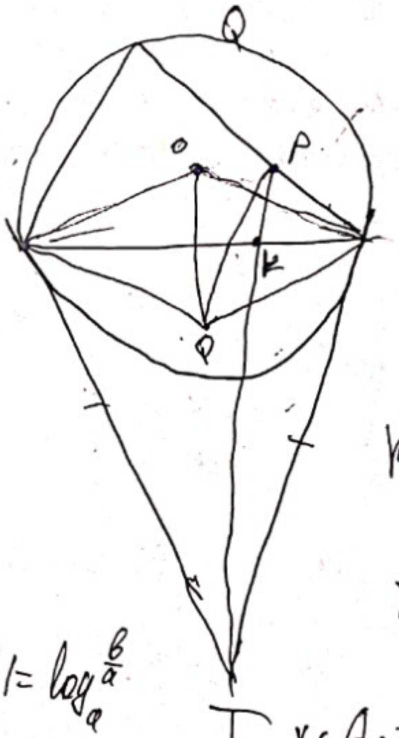
$\max(y,\beta,q)=13$

$\text{кол}(x,\alpha,p)\cdot\text{кол}(y,\beta,q)$

0 14 14

0 14

$\times\begin{array}{r}182\\36\\\hline +1092\\546\\\hline 6552\end{array}$



0 n n

0 n 0..n-1

0 1..n-1 n

0

$\times\begin{array}{r}14\\6\\\hline 84\end{array}$ $\times\begin{array}{r}14\\13\end{array}$

0 n 1..n-1 $\cdot 3!$

0 n n $\cdot\frac{3!}{2!}$

0 0 n $\cdot\frac{3!}{2!}$

$\log_a b-1=\log_a\frac{b}{a}$

$x\in\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$

$\times\begin{array}{r}13\\6\\\hline 78\end{array}$

$a=\sqrt{5x-1}$

$b=4x+1$

$c=\frac{x}{2}+2$

~~$\frac{x}{2}+2>0$~~

~~$x>-4$~~

~~$x\neq-\frac{1}{4}$~~

$x>\frac{1}{5}$

$x\neq\frac{2}{5}$

$\times\begin{array}{r}84\\78\\\hline +672\\588\\\hline 6552\end{array}$

$y=\frac{\ln^2 b}{\ln^2 a}\cdot\frac{\ln b-\ln a}{\ln a}$

$\log_a b$ $2\log_b c$ $2\log_c a$

$y=\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)^3-\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)^2$

~~$y=\frac{\ln^2 b}{\ln^2 a}\cdot 2\frac{\ln a}{\ln c}$~~

$(t-2)(t^2+t+2)=0$

$t^3-t^2-4=0$

$t(t^2-2)\ldots(t+2)$

$t^2(t-2)+t-2(t+2)=0$

$(\alpha^2+2\alpha+1)\alpha=\alpha^3+2\alpha^2+\alpha-4=0$

$\log_a b=2$

$5x-1=4x+1$ $\boxed{x=2}$

Черновик

$$(\log_a b+1)^2\log_a b = \left(\frac{\ln a+\ln b}{\ln a}\right)^2\frac{\ln b}{\ln a} = \ln b + \frac{\ln^3 b}{\ln^2 a} + 2\frac{\ln b^2}{\ln a}$$

$$\left(\frac{2\ln a}{\ln c}\right)^2\left(\frac{2\ln a+\ln c}{\ln c}\right)=2$$

$$\frac{2\ln a^3}{\ln^2 c}-\frac{2\ln a^2}{\ln c}=2$$

21-б

~~logs~~ $\frac{\ln b}{\ln a}\cdot\left(\frac{\ln b+\ln a}{\ln a}\right)^2=2$

$$\frac{\ln^3 b}{\ln^2 a}+2\frac{\ln^2 b}{\ln a}+\ln b=4 \qquad b=a^2-x+1$$

$\cancel{\ln^3 b}$

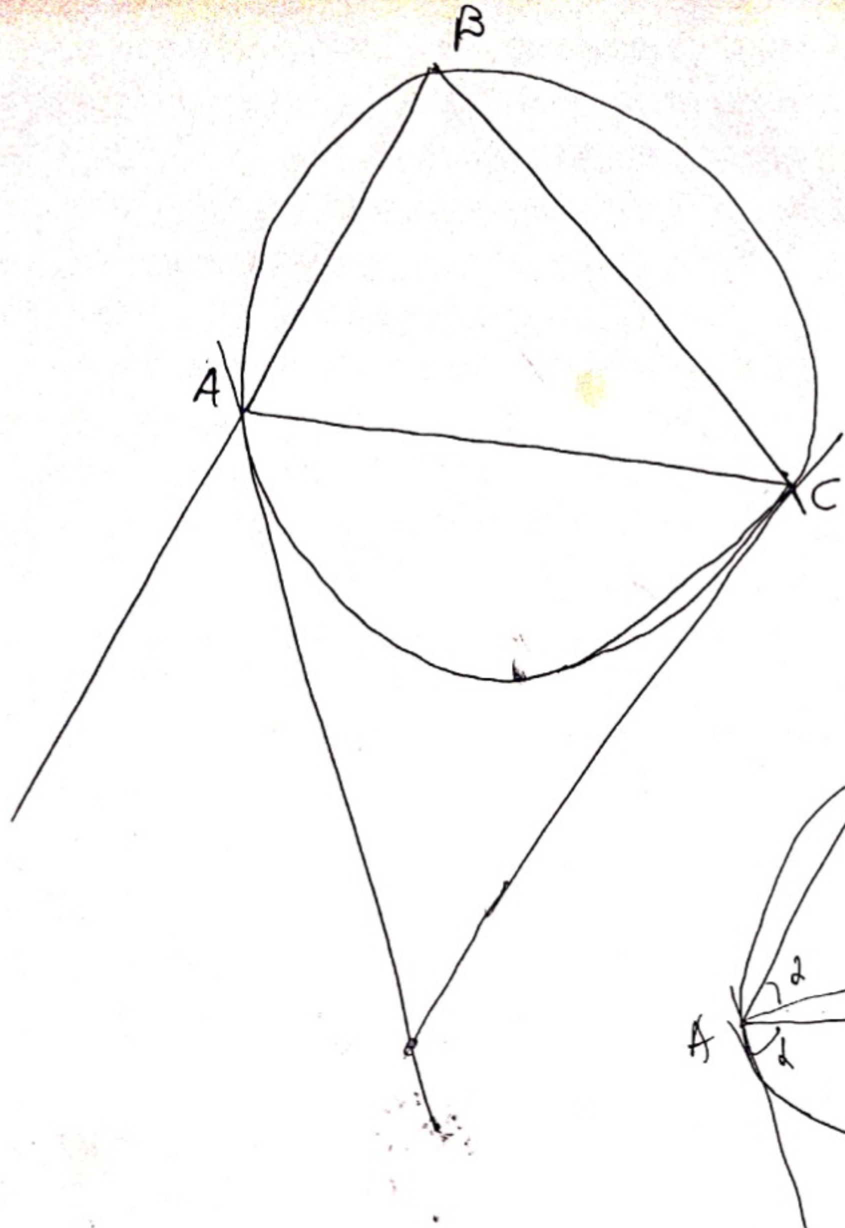
$$\left(\frac{\ln b}{\ln a}+1\right)^2\ln b=4$$

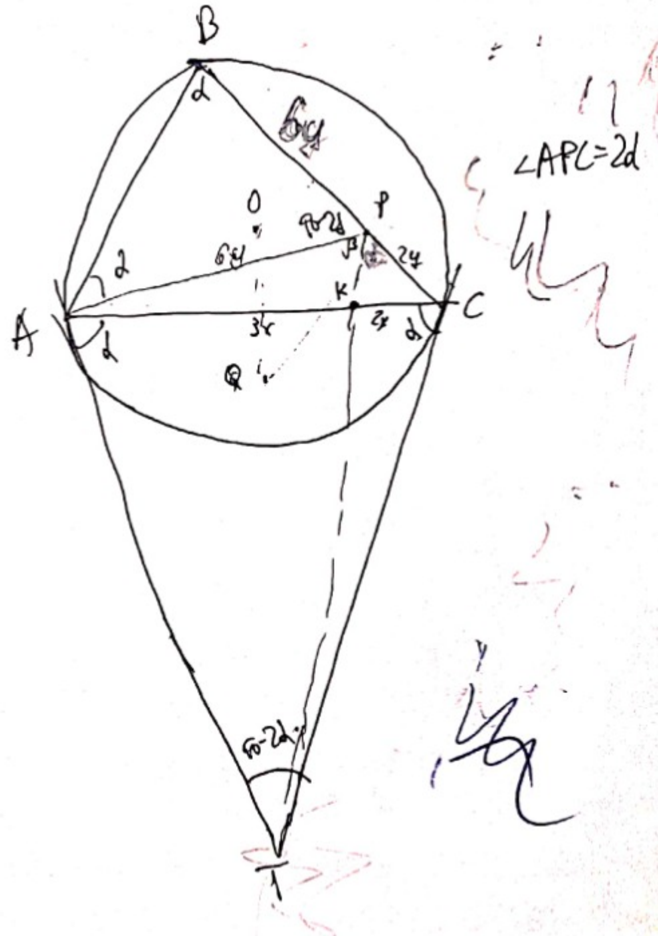
$\ln\to\log_b$

$$\left(\frac{1}{\log_b a}+1\right)^2=4$$

$$\frac{1}{\log_b a}$$

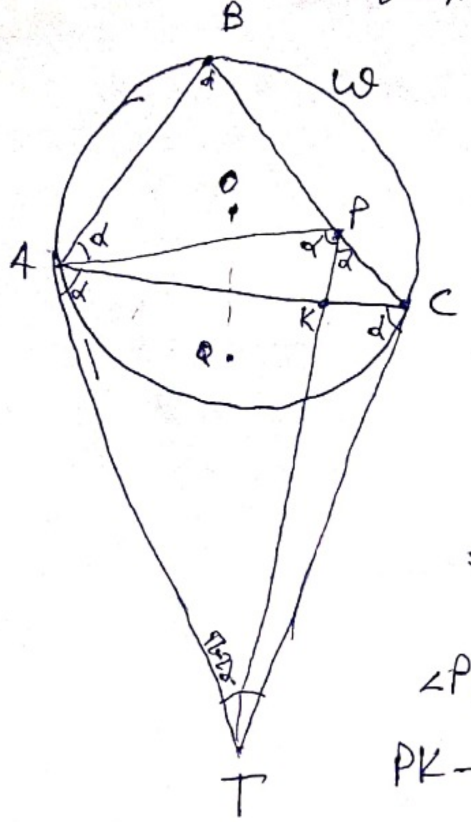
$\alpha^2(\alpha-1)+3\alpha(\alpha-1)+4(\alpha-1)=0$


B
A
C


B
O
P
A
K
C
Q
∠APC=2α

Чистовик 11 класс, математика

6)



Пусть описанная около AOC окр. — ω_1

Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \cup AC = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$ &

$\angle APC = \angle AOC = 2\alpha = \frac{\cup AC}{2}$ (в ω_1)

~~$\angle OAT = \angle OCT$~~ $\angle OAT + \angle OCT = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 4-угольник TAOC — вписанный в окр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATC = 180^\circ - \angle AOC = \pi - 2\alpha$

$AT = CT \Rightarrow \angle CAT = \angle ACT = \alpha$ (так-как $\triangle ATC$ - равнобедр.)

$\angle ATC + \angle APC = \pi - 2\alpha + 2\alpha = \pi \Rightarrow APCT$ — вписанный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT = \angle ACT = \alpha$

$\angle CPT = \angle CAT = \alpha$

$\angle PBA + \angle PAB = \angle CPA = 2\alpha \Rightarrow \angle PAB = \alpha$

PK — биссектриса $\Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{3}{2}$

$\triangle ABP$ равнобедр. $\Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}$

$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow S_{ABP} = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$ $\quad S_{ABC} = 15 + 10 = 25$

$\boxed{\text{а) Ответ. } S_{ABC} = 25}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{5} \Rightarrow \sin^2\alpha + \frac{25\sin^2\alpha}{49} = 1$

$\sin^2\alpha = \frac{49}{74}$

$\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}}$

$\triangle ACT \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AT}{AC}$

Пуст $PC = 2y \Rightarrow AP = 3y$ $\quad S_{APC} = 10 = 6y^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 = 6y^2 \cdot \frac{5 \cdot 7}{74}$

$y^2 = \frac{74 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 7} \Rightarrow y^2 = \frac{74}{21}$

~~$S_{APK} = 6$~~

~~$AC = 3y$~~

3

Чистовик 11 класс, математика

5\] Пусть $a=\sqrt{5x-1}$ $b=4x+1$ $c=\frac{x}{2}+2$, тогда даны числа $\log_a b$ $\log_b c^2$ $\log_c a^2$,

~~В~~ ОДЗ они равны $\alpha=\frac{\ln b}{\ln a}$ $\beta=\frac{2\ln c}{\ln b}$ $\gamma=\frac{2\ln a}{\ln c}$

1 случ. α явл. одним из двух равных чисел $\Rightarrow \alpha\beta\gamma=4=\alpha^2(\alpha-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^3-\alpha^2-4=0 \Rightarrow (\alpha-2)(\underbrace{\alpha^2+\alpha+2}_{D=1-8<0})=0\Rightarrow\alpha=2\Rightarrow \log_a b=2\Rightarrow a^2=b\Rightarrow$

$\Rightarrow 5x-1=4x+1\Rightarrow x=2$ Подставим x: $\cancel{\alpha=\log_{\sqrt{9}}}$ $a=\sqrt{9}=3$; $b=9$; $c=3$

$\alpha=2$ $\beta=1$ $\gamma=2$, значит $x=2$ удовлетворяет.

2 случ. α не яв. одним из двух равных чисел $\Rightarrow \alpha\beta\gamma=4=\cancel{\alpha(\alpha+1)}\ \alpha(\alpha+1)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^3+2\alpha^2+\alpha-4=0\Rightarrow(\alpha-1)(\underbrace{\alpha^2+3\alpha+4}_{D=9-16<0})=0\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a b=1\Rightarrow a=b\Rightarrow \sqrt{5x-1}=4x+1\Rightarrow 5x-1=16x^2+8x+1\Rightarrow \underbrace{16x^2+3x+2=0}_{D=9-4\cdot2\cdot16<0}$

$\boxed{\text{Ответ. } x=2}$

Чистовик Математика 11 класс

4) $\begin{cases} НОД(a,b,c)=6 \\ НОК(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases} \Rightarrow$ простые множители $a, b, c \in \{2;3\}$

$a=6\cdot$ (натуральное число)

$b=6\cdot$ (нат. число) ($c=6\cdot$ нат число)

Пусть $a=6\cdot 2^{a_2}\cdot 3^{a_3}$ где $a_2\ b_2\ c_2\ a_3\ b_3\ c_3$ все целые числа ≥ 0

$b=6\cdot 2^{b_2}\ 3^{b_3}$, то эта тройка чисел удовлетворяет требованию

$c=6\cdot 2^{c_2}\ 3^{c_3}$ задачи тогда и только когда $\begin{cases} \min(a_2;b_2;c_2)=0 \\ \min(a_3;b_3;c_3)=0 \\ \max(a_2;b_2;c_2)=14=n_1 \\ \max(a_3;b_3;c_3)=15=n_2 \end{cases}$

$кол(a_2;b_2;c_2;a_3;b_3;c_3)=кол(a_2;b_2;c_2)\cdot кол(a_3;b_3;c_3)$ (их выб. независимо друг от друга)

~~кол(a_2, a_3, Назначим~~

Две одинаковые задачи, различаются только ~~n=14 и n=15~~ n_1 и n_2

Рассмотрим общий случай

Посчитаем кол. при n

1) $(0\quad 1,..,n-1\quad n)\cdot 3!=\cancel{6(n-2)}\ 1\cdot(n-2)\cdot 1\cdot 3!=6(n-2)$

2) $(0\quad 0\quad n)\cdot\frac{3!}{2!}=3$

~~f(n)~~ кол при $n=\cancel{6(n-1)}\ 6(n-2)+3+3=6(n-1)$

3) $(0\quad n\quad n)\cdot\frac{3!}{2!}=3$

(кол при 14) $\cdot$ (кол. при 15) $=6(14-1)\cdot 6(15-1)=6552$

$\boxed{\text{Ответ. }6552}$