Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

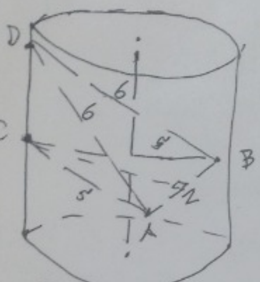
Шифр: **21102566**

ID профиля: **380345**

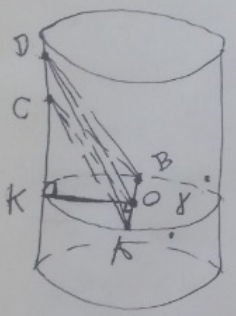
Вариант 17

Чистовик (2)

№2



Если подумать, ясно, что ~~цилиндр неограниченной высоты,~~ минимальный радиус $= 1$, т.к. $2 \cdot 1 = 2 = AB$, и если AB диаметр кругового сечения (которое равно основанию и ему параллельно), то вершину C можно будет расположить на боковой поверхности, т.к. углы $\triangle ABC < 90°$. Также и с D. Имеем $R = 1$ – радиус цилиндра. $\Rightarrow AB \parallel$ основанию.



Пусть есть круговое сечение γ, параллельное основанию цилиндра (основание $\perp$ оси цилиндра), и ему принадлежит точка K, лежащая на боковой поверхности цилиндра, K равноудалена от A и B. Пусть O – центр AB и круг. сечения. По построению $KO = R$. Т.к. $KO \perp AB$, $K \in$ прямой CD, т.к. ABC и ADB равнобедренные, $CO, DO \perp AB$ и по теореме о трёх перпендикулярах CO и DO и KO лежат в одной плоскости.

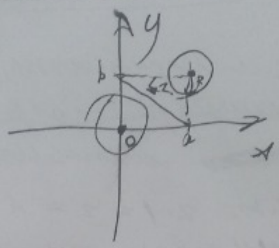
Из $\triangle AOC$ по т. Пифагора $OC = 2\sqrt{6} = \sqrt{CA^2 - AO^2}$.
($AO = \frac{1}{2} AB = R = 1$.) Аналогично из $\triangle DAO$, $DO = \sqrt{35}$.
Из $\triangle CKO$ и $\triangle DKO$ т.к. $\angle DKO = 90°$ по т. Пифагора:
$CK^2 = CO^2 - KO^2 = 24 - 1 = 23$. $CK = \sqrt{23}$.
$DK^2 = DO^2 - KO^2 = 34$. $DK = \sqrt{34}$. Тогда $DC = DK - CK =$
$= \sqrt{34} - \sqrt{23}$. Ответ: $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Черновик

№3

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2).$

1) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 3 \\ a^2+b^2 \le 2. \end{cases}$



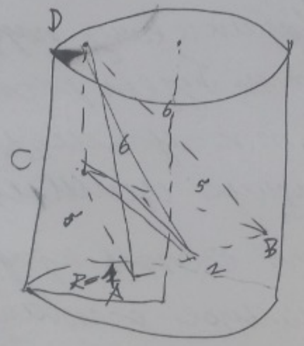
$a^2 \le 2-b^2.$

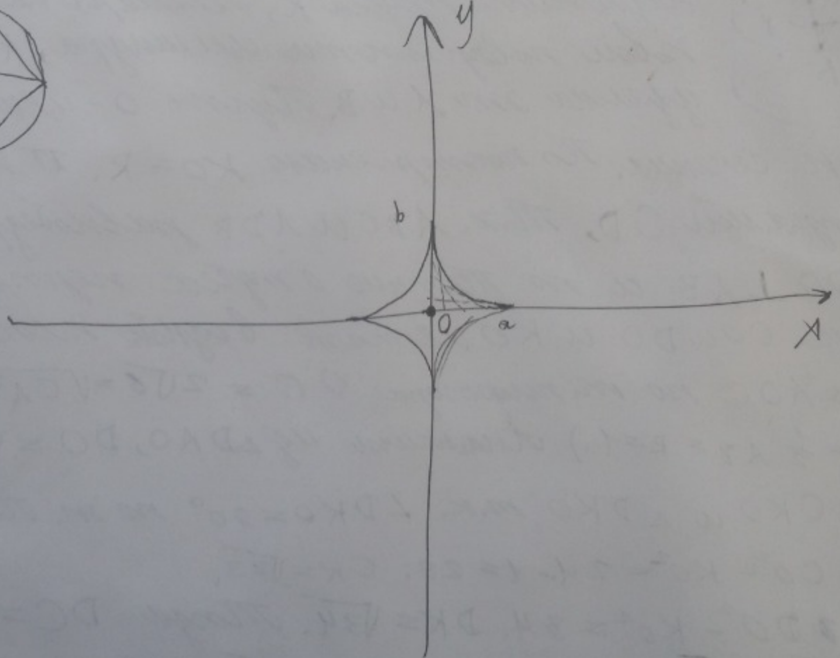
$a^2+b^2 \le 2a+2b.$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 2.$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2.$

$x^2+a^2+y^2+b^2-2ax-2by \le 2.$





Чистовик ①

№1 Пусть разность прогрессии это d. По условию $d>0$. Тогда $S = \frac{2a_1+9d}{2}\cdot 10$.

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d)$.

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d)$. по формуле членов ар. прогрессии

Условие перепишем:

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+11d) > 5(2a_1+9d)+1, & (1)\\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 5(2a_1+9d)+17. & (2)\end{cases}$$

прибавим (1) и (2):

Домножим (1) на -1 и

$60d^2-55d^2<16$.

$5d^2<16$. $d^2<\frac{16}{5} \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt5}<d<\frac{4}{\sqrt5}$. $1<\frac{4}{\sqrt5}<2$, $d>0$ по усл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow d=1$, т.к. если $a_1, a_2, \dots$ – целые, то и d ~~целое~~ целое;

Подставим d в исходные нер-ва:

плюс

$$\begin{cases}a_1^2+6a_1-2<0, & (1,1)\\ a_1^2+6a_1+9>0. & (2,2)\end{cases}$$

из (1,1) получим: $-3-\sqrt{11}<a_1<-3+\sqrt{11}$

из (2,2): $a_1 \neq -3$.

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$ подходят: $a = -3-1, -3-2, -3-3, -3+1, -3+2, -3+3$.

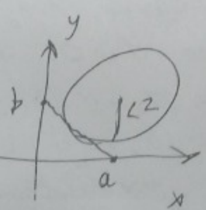
ОТВЕТ: $a = -4; -5; -6; -2; -1; 0;$

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10$. $a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + d \cdot 5)(a_1 + d \cdot 11) > 5 + 1 = 5(2a_1 + 9d) + 1$

$a_7 \cdot a_{11} < S + 17$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 5(2a_1 + 9d) + 17$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 5(2a_1 + 9d) + 1$



$a_1^2 + 10a_1d + 6a_1d + 60d^2 < 5(2a_1 + 9d) + 17$

$a_1^2 + 11a_1d + 5a_1d + 55d^2 > 5(2a_1 + 9d) + 1$

~~$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$~~

$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2$

$\frac{4}{\sqrt{5}} < 2$ $\frac{16}{5} < 4$ $\frac{4}{\sqrt{5}} > 1$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$. $d < \frac{4}{\sqrt{5}}$. $d > -\frac{4}{\sqrt{5}}$. $d > 0$. $d = 1$ 1, 2, 3

$55 - 46 = 9$

$(a + 6)(a + 10) < 5(2a + 9) + 17$ $1 < \sqrt{11} < 4$

$a^2 + 16a + 60 < 10a + 45 + 17$

$a^2 + 6a - 2 < 0$. $D = 36 + 4 \cdot 2 = 36 + 8 = 44$ $36 - 1 = 35$

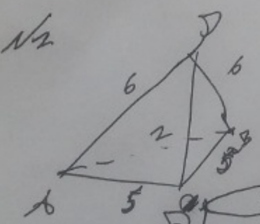
$a_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$ $\sqrt{5 \cdot 44}$

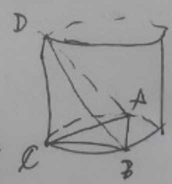
$-3 - \sqrt{11}$ -3 $-3 + \sqrt{11}$

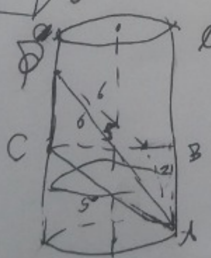
$a^2 + 6a + 9 > 0$ $D = 36 - 4 \cdot 9 = 0$ $a = -3 - 1, -3 - 2, -3 - 3, -3 + 1, -3 + 2, -3 + 3$

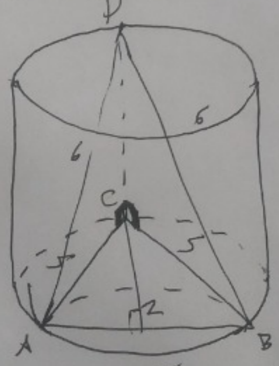
$(-3)(-3)$ $a = \frac{-6}{2} = -3$ $a \neq -3$

№2









$25 - 1 = 24$. $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$R = \frac{abc}{4S}$

$R = \frac{25 \cdot 2}{8\sqrt{6}} = \frac{25}{4\sqrt{6}}$ ~~$\sqrt{6 + 1 + 4} = 2\sqrt{6}$~~

$8\sqrt{6}$

Черновик

Черновик

Чистовик 3

№3

Если $2 < 2a+2b$, то 2-е нер-во такое: $a^2+b^2 \leq 2$,
если $2a+2b < 2$, то оно такое: $(a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2$.
Если $2a+2b=2$ выбираем любое нер-во.
Первое нер-во задаёт ~~окружность~~ круг с радиусом $\sqrt{2}$ включая границу круга, центр которого с координатами $(a;b)$. Первое нер-во (~~из~~ и 2-е из 1-го случая) задаёт „звезду" в центре координат, это всё множество точек ~~о~~ внутри ~~окр~~ объединения окружностей с радиусами 2 и координатами $(\pm 2;\pm 2)$ включая

Черновик.

Черновик

№3 ~~Условие 2 нер-ва значит 2 случая:~~

~~1) когда~~ $\cancel{a^2+b^3 \leq 2a+2b}$.

~~2) когда~~ $\cancel{a^2+b^2 \leq 2}$.

~~Потому что если 2a+2b минимум в первом, то всё хорошо, если мини-мум например, случае, мощно 2,~~

$a^2+b^2 \leq 2$.

a^2

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102566**

ID профиля: **380345**

Вариант 17

Чистовик ①

№2 Ограничения: ~~...~~

$\sqrt{5x-1} > 0, \neq 1, \quad 4x+1 \neq 1, > 0, \quad \frac{x}{2}+2 > 0, \neq 1.$

Пусть $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = a$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = b$,

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = c$. Тогда $abc = \dfrac{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}} \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

т.к. $\frac{x}{2}+2 > 0, \sqrt{5x-1} > 0$ из ограничений вынесем 2 из степени $\frac{x}{2}+2$ без модуля за логарифм и $\frac{1}{2}$ у степени $5x-1$.

Имеем $4 = abc$. Тогда есть 3 случая:

1) $a = c \Rightarrow a^2 b = 4, b = a-1.$

2) $a = b \Rightarrow a^2 c = 4, c = a-1,$

3) $c = b \Rightarrow b^2 a = 4, a = b-1.$

Решив 3 системы (частично) имеем:

1) $\begin{cases} b = \frac{4}{a^2} \\ b = a-1 \end{cases} \Rightarrow (a-1)a^2 = 4.\ a^3 - a^2 - 4 = 0.$ подходит $a = 2$.

$$\begin{array}{r|l} a^3 - a^2 - 4 & a-2 \\ \hline -\ a^3 - 2a^2 & a^2+a+2 \\ a^2 - 4 & \\ -\ a^2 - 2a & \\ 2a - 4 & \\ -\ 2a-4 & \\ 0 & \end{array}$$

Разложим: $(a-2)(a^2+a+2) = 0.$ У 2-й скобки дискриминант отрицательный, $\Rightarrow a = 2$ и всё, $b = 1$.

Обратно заменим:

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x+1 = 5x-1.\ x = 2$ — подходит.

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1.$ ~~...~~ подставим: $1 = 1$ — верно.

~~...~~

~~...~~. Все верно для $x = 2$.

2) Аналогично $a = 2, c = 1$. ~~...~~ снова $x = 2$, проверим $c = 1$: $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 1$, при $x = 2$

~~...~~ это ложь. $x = 2$ тут не подходит.

№4 Чистовик (2)

Пусть $a=6k$, $b=6l$, $c=6m$.

Есть несколько случаев для условия на НОК:

1) $a=2^{15}\cdot 3^{16}$, ~~b и с степени~~ b и с только из множителей 2 и 3 в степенях ≤ 15 и 16 соот-но.

~~$b=2$,~~ $b=2^{q}\cdot 3^{p}$, $c=2^{i}\cdot 3^{u}$.

~~$q,p,i,u\le 1$~~ $1\le q, i\le 15$ || $1\le p, u\le 16$.

Имеем: $16\cdot 16\cdot 17\cdot 17=16^2\cdot 17^2$ способов (16 для q и i, 17 для p и u.). Умножим на 3 их т. к. на месте a может быть еще c и b. отнимем 2, т. к. везде считаем $a=b=c=2^{15}\cdot 3^{16}$.

$16^2\cdot 17^2\cdot 3-2$ способов.

2) ~~$a=2^{15}, b=3^{16}$~~ $a=2^{15}$, $b=3^{16}$. $c=2^{i}\cdot 3^{u}$.

$1\le i\le 15$, $1\le u\le 16$. для i 15 ст. для u. 16 ст.

Тут $15\cdot 16$ способов. Множим на $3\cdot 2$ т.к. на месте a и b могут быть 2 остальных числа (b, c и a, c). Когда два числа совпадают считаем лишние разы, отнимем 10.

Имеем $16^2\cdot 17^2\cdot 3-2+15\cdot 16\cdot 3\cdot 2-10=256\cdot 289\cdot 3+$
$+240\cdot 6-12=73884\cdot 3+1440-12=221652+$
$+1440-12=223080$ способов выбора троек.

Ответ: 223080 троек.

Черновик

№5 $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=4.$

$\frac{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}}=\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=$

223092

$2\cdot 2\log$

$abc=4$

$a^2c=4$, $ac^2=4$, $ab^2=4$, $b^2c=4$

$a^2b=4$, $a^2c=4$, $b^2a=4$

221652 + 1440 = 223092

$\begin{cases} b=\frac{4}{a^2} \\ b=a-1 \end{cases}$

$a-1=\frac{4}{a^2}$ $\quad a^3-a^2=4.$ $\quad a^3-a^2-4=a$ $\quad a=2.$

$8-4-4=a$

$a^3-a^2-4 \mid a-2$

$a^3-2a^2 \qquad a^2+a+2$

$-a^2-4$

a^2-2a

$+2a-4$

$2a-4$

$b=1.$

$-\frac{5\cdot 8}{9}-\frac{9}{9}=-\frac{49}{9}.$

НОД$(a,b,c)=6.$

НОК$(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16}=$ НОК(НОК(a,b), $c)=2^{15}\cdot 3^{16}$

НОД(НОД$(a,b),c)=6.$

НОК $=\frac{abc}{НОД}$ $\quad 2^{15}\cdot 3^{16}=\frac{abc}{6}.$

$15\cdot 16$: 90, 15, 240

$16\cdot 16=96$, 16, 256

$16\cdot 16=216$, 16, 376

$17\cdot 17=119$, 17, 289

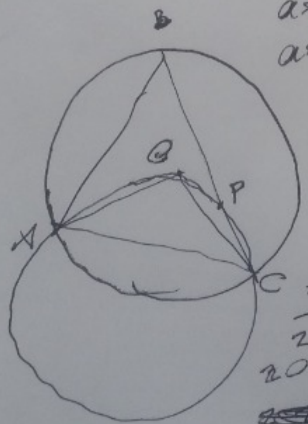
$2^{16}\cdot 3^{17}=abc.$ $\quad a\quad b\quad c$

$6k\quad 6t\quad 6l$

$2^{13}\cdot 3^{14}=ktl.$ $\quad 3\cdot 2$

$a=2^{16}$, $b=2^{16}\cdot 3$

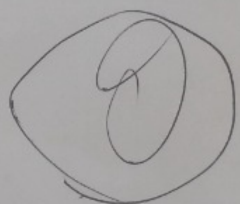
$a=2^{15}\cdot 3^{16}$



$6\cdot 4\cdot 6$

$6\cdot 2$

240. $\quad 15\cdot 16$: 90, 15, 40



54 $\quad (a,b,c)$ $\quad (a,a,b)$

$\cdot 240 \cdot 6$: 000, 1440

$4\,(a,b,c)$

$256\cdot 289 = 2204$, 2048

$256\cdot 289 = 2204$, 2048

512

73884 $\quad 73884\cdot 3 = 221652$

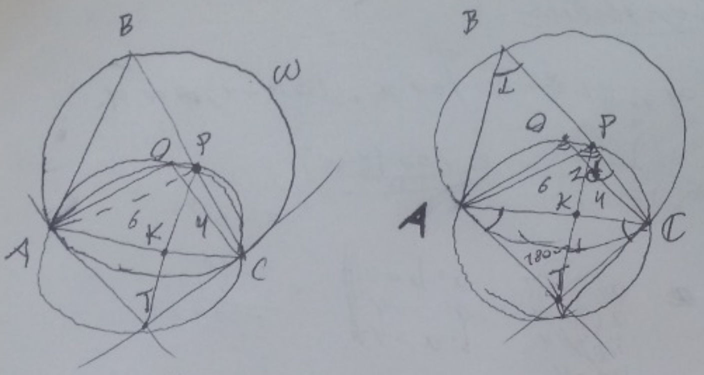
$2^{15},3^{16},3^{16}$

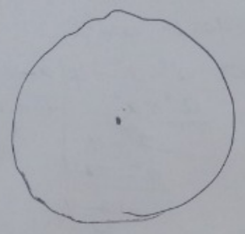
$(2, 2^{15}3^{16}, 2^{16})$

$(2, 2^{16}, 2^{16}, 3^{16})$

6 случ.

$5\cdot 2$

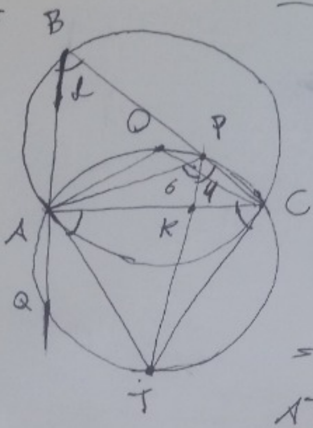




Черновик

Чистовик (3)

№6



$\angle ACT = \angle ABC$ по св-ву угла между касательной и хордой. Пусть $\angle ABC = \alpha$. $\angle AOC = 2\alpha$. $\angle APC = \angle AOC$ как вписанные. $\angle AOC = 2\alpha$.

$\angle ATC = 180 - 2\alpha$, т.к. $\angle TAC$ также $= \alpha$. Тогда $\angle ATC + \angle APC = 180°$, ATCP вписанный, $T \in$ окружности около $\triangle ACT$. $\angle TPC = \angle TAC$ как впис. углы.

Значит $\triangle KPC \sim \triangle ABC$ по двум углам.

т.к. $\triangle APK$ и $\triangle KPC$ одна высота, то $\frac{AK}{KC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. $\frac{KC}{AC} = \frac{2t}{3t+2t} = \frac{2}{5}$, t — коэффициент такой, что $KC = 2t$.

Тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. $S_{ABC} = \frac{25}{4} S_{KPC} = \frac{25}{4} \cdot 4 =$
$= 25$. а) Ответ: $S_{ABC} = 25$.

3) Аналогично $b=2$, $a=1$. $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$.

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=(4x+2)^2$.

1) $\frac{x}{2}+2=4x+2$. $x+4=8x+4$. $x=8x \Rightarrow x_{1,1}=0$ — не подходит под ограничения.

2) $\frac{x}{2}+2=-4x-2$. $x+4=-8x-4$. $x_{2,2}=-\frac{8}{9}$, но $\Rightarrow \sqrt{5x-1}$ не определён. $x_{2,2}$ не подх.

ОТВЕТ: $x=2$.

Чистовик 1 продолжение №2.