Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

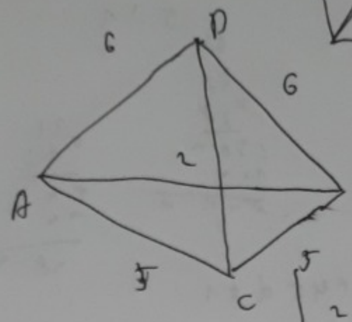
Шифр: **21102385**

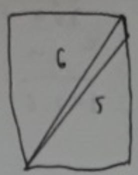
ID профиля: **378351**

Вариант 17

Черновик

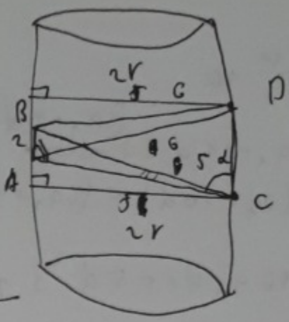
(1)

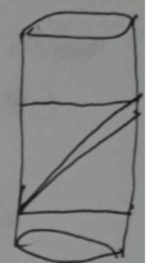




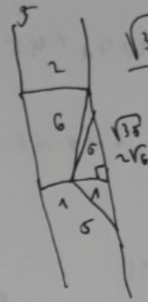
$V \geq 1$

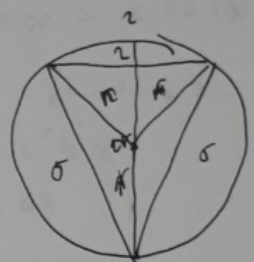
$r = 1.$

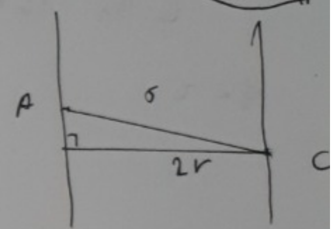


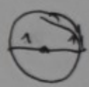


$\sqrt{35-2\sqrt{6}}$







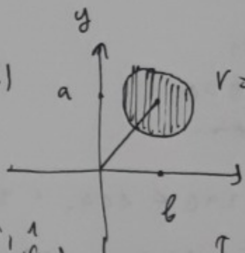


d) y

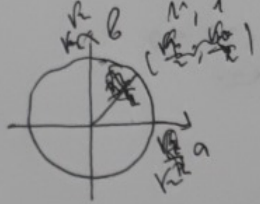
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2 \\ a^2+b^2 \leq \min(2a+2b;2) \end{cases}$$

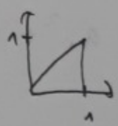
$a^2+b^2 \leq \min(2a+2b;2)$

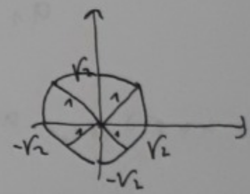
$a^2+b^2 \leq 2$



$r=\sqrt{2}$







$3>2$

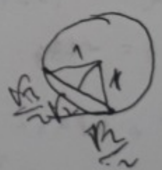
$8<10$

$5<8$

$10>8$

$2<3$

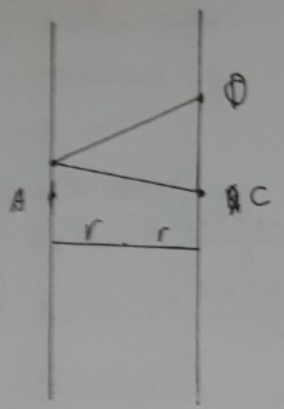
$-8<-5.$



$\sqrt{2}$

2.

Чистовик



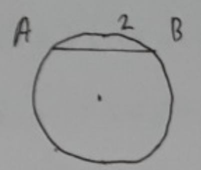
r - минимальный

$AB = 2$

$AC = CB = 5$

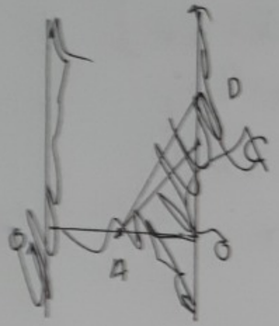
$AD = DB = 6$

Т.к. $AC = CB$ и $AD = DB$, то $AB \parallel$ плоскости основание цилиндра.

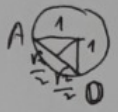


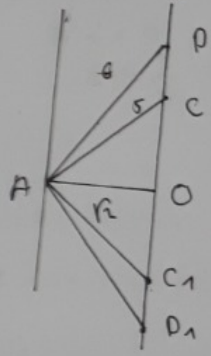
$r \geq 1$

Т.к. r - минимальный, $r = 1$, AB - диаметр.



Рассмотрим плоскость ACD. В ней $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ~~т.АОН~~.





$AD = 6$

$AC = 5$

Точка D и точка C могут быть по разные стороны от AO. Имеем 2 варианта длины CD - CD и CD_1

$CO = \sqrt{AC^2 - AO^2} = \sqrt{23}$.

$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$.

$OC_1 = CO = \sqrt{23}$

$D_1O = DO = \sqrt{34}$

$CD_1 = \sqrt{23} + \sqrt{34}$

Ответ: $CD = \pm\sqrt{23} + \sqrt{34}$.

Черновик

$S_2 \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 100$

$a_6\cdot a_{12} > \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10$

$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+11d) > (2a_1+9d)\cdot 5+1\\(a_1+6d)(a_1+10d) < (2a_1+9d)\cdot 5+17\end{cases}$

$\begin{cases}a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1\\a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17.\end{cases}$

$d=2$

$-5d^2 > -16$

$5d^2 > 16$

$d > \frac{4}{\sqrt5}$

$-2;\ldots$

$d=2;\ldots$

$d=3.$

$a_1^2+32a_1+220 > 10a_1+90+1$

$a_1^2+22a_1+129>0$

$D=484-$

②

$a_1^2+48a_1+495 > 10a_1+135+1$

$a_1^2+32a_1+240 < 10a_1+90+17$

$a_1^2+22a_1+133<0$

$D=484-$

$a_1^2+38a_1+359>0$

$D=1444-1436=8$

$a_1=\frac{-38\pm\sqrt8}{2}=-19\pm\sqrt2$

$a_1=-18;-19;-20;$

$a_1^2-32a_1+220>10a_1-90+1$

$a_1^2+48a_1+540<10a_1+135+17$

$a_1^2+38a_1+388<0$

$a_1^2-42a_1+309>0$

$D=\frac{1764-1236}{}=528.$

$a_1^2-32a_1+240<10a_1-90+17$

$a_1^2-42a_1+313<0$

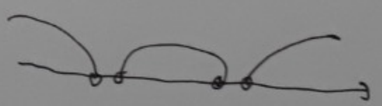
$D=1764-1252=$

$=512=(16\sqrt2)^2$

$a_1=\frac{42\pm\sqrt{528}}{2}=21\pm\frac{\sqrt{528}}{2}$

$a_1=\frac{42\pm16\sqrt2}{2}=$

$=21\pm8\sqrt2$



$\begin{array}{r}359\\\times\ 4\\\hline1436\end{array}$ $\quad 1436$ $\quad 2<5$ $\quad 5>1$ $\quad \begin{array}{r}55\\\times\ 9\\\hline495\end{array}$

$\begin{array}{r}38\\\times38\\\hline304\\114\\\hline1444\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}22\\\times22\\\hline44\\44\\\hline484\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}42\\\times42\\\hline84\\168\\\hline1764\end{array}$

21102385 (U378351 M1303346)

Чистовик

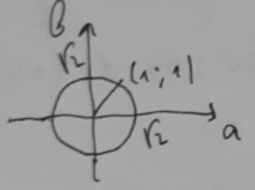
3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2) \end{cases}$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ – окружность с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

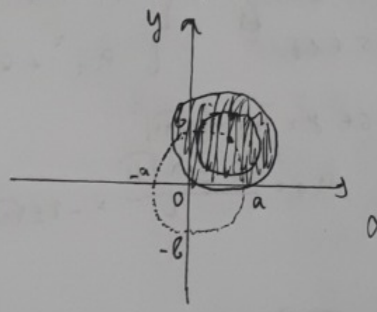
$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$

Если $2a+2b \le 2$, то неравенство выполняется, т.к. $2a+2b > a^2+b^2$ при $a \le 2$ и $b \le 2$, а при $a > 1$ и/или $b > 1$ $2 \le 2a+2b$.

Значит, неравенство $a^2+b^2 \le \min(2a+2b; 2)$ задает окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в $(0;0)$.



Значит, M – фигура, включающая в себя все точки внутри окружностей с центром в $(a;b)$, где $a^2+b^2 \le 2$ и радиуса $\sqrt{2}$



Значит, M – окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом $2\sqrt{2}$.

Её площадь

$S = \pi r^2 = 8\pi$

Ответ: 8π.

Чистовик

1. a_1 - первый член

d - разность

$d > 0$

a_1, d - целые.

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 + 1 \\ a_7 \cdot a_{11} < \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 + 17. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 5(2a_1+9d)+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 5(2a_1+9d)+17. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \\ a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17. \end{cases}$$

$5d^2 < 16$

$\sqrt{5}d < 4$

$d < \frac{4}{\sqrt{5}}$. Так как $d > 0$; то $d \in (0; \frac{4}{\sqrt{5}})$

$\underline{d = 1}$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+45+1 \\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+45+17. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+6a_1+9 > 0 & (1) \\ a_1^2+6a_1-2 < 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $D = 36+8 = 44 = (2\sqrt{11})^2$

$a_1 = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ (a_1-(-3+\sqrt{11}))(a_1-(-3-\sqrt{11})) < 0 \end{cases} . \quad a_1 \neq -3.$$

$+$ $-$ $+$; $-3-\sqrt{11}$, $-3+\sqrt{11}$, a_1

$a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0.$

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0.$

2

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102385**

ID профиля: **378351**

Вариант 17

Чистовик

5. $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Пусть $a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

$b = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ:

$5x-1>0$; $5x-1\neq 1$

$4x+1>0$; $4x+1\neq 1$

$\frac{x}{2}+2>0$; $\frac{x}{2}+2\neq 1$

Заметим, что ~~...~~

$$2\log_{5x-1}(4x+1)\cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) =$$

$$= 2\cdot\frac{\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)}{\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)}\cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 4.$$

$a\cdot b\cdot c = 4.$

1) ~~...~~

$a\cdot a(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$a=2$ – ед. корень. ; ~~...~~

$2\log_{5x-1}(4x+1)=2 \Rightarrow 5x-1=4x+1 \Rightarrow x=2.$ $a=c$; $b=a-1 \Rightarrow$ подходит

2) ~~...~~

$b\cdot b\cdot(b-1)=4$

$b^3-b^2-4=0 \Rightarrow b=2$ – ед. корень.

$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2 \Rightarrow 4x+1=\frac{x}{2}+2 \Rightarrow 8x+2=x+4 \Rightarrow 7x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{7}$ – не подходит ~~...~~

3) ~~...~~

~~...~~ $c\cdot c\cdot(c-1)=4$

~~...~~ $c=2$ – корень. $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1$ ~~...~~

$\frac{x^2}{4}+2x+4=5x-1$

$x^2+8x+16=20x-4$

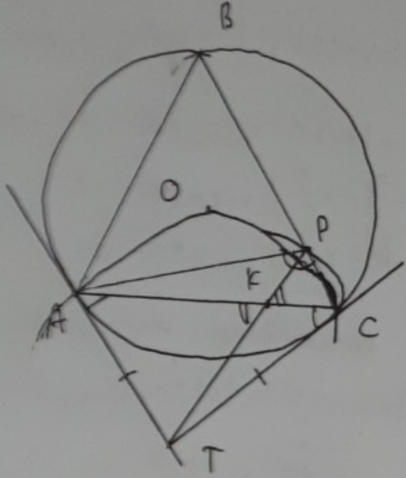
$x^2-12x+20=0$

$x=10$. – не подходит.

Ответ: 2. ~~...~~

21102385 (U378351 M1303347)

Чистовик



$S_{\triangle APK} = 6$

$S_{\triangle CPK} = 4$

$S_{\triangle ABC} - ?$

$AK : KC = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{3}{2}.$

$\frac{S_{ATK}}{S_{KTC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}.$

$\angle ACT = \angle TAC$, т.к.

$S_{ATK} = \frac{1}{2} AT \cdot AK \cdot \sin \angle TAK$

$S_{KCT} = \frac{1}{2} KC \cdot CT \cdot \sin \angle KCT.$

$\frac{S_{ATK}}{S_{KTC}} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow \sin \angle TAK =$

$= \sin \angle KCT$

$\Rightarrow \angle TAK = \angle KCT.$

$\angle APC = \angle TAK$, т.к. $\angle TAK$ угол между хордой и кас.

Черновик

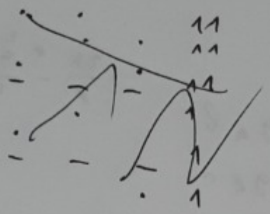
18 27
$2\cdot3^2$ 3^3
$3^3\cdot2$

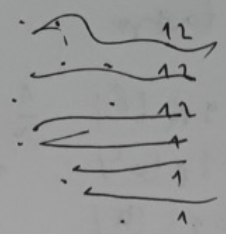
$\begin{array}{r} 15 \\ \times 14 \\ \hline 60 \\ 15 \\ \hline 210 \end{array}$

12
18
36.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot3^{16} \end{cases}$$

$a=6\cdot2^x\cdot3^y = 2^{x+1}\cdot3^{y+1}$
$b=6\cdot2^z\cdot3^k = 2^{z+1}\cdot3^{k+1}$
$c=6\cdot2^h\cdot3^f = 2^{h+1}\cdot3^{f+1}$





~~x+z+h=12~~
~~y+k+f=13.~~

2

· · o
o · ·
· o ·
· o o
o · o
o o ·

$2\cdot14-1$
$2\cdot14-1$
$2\cdot14-1$
1
1
1

$\begin{array}{r} 210 \\ \times 36 \\ \hline 1260 \\ 630 \\ \hline 7560 \end{array}$

x = 0
z = 6
h = 14
y = 3
k = 0
f = 15.

3

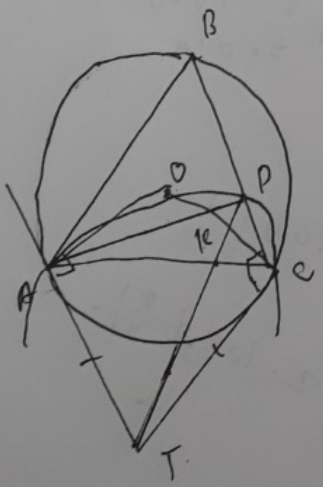
· · o $2\cdot15-1$
o · · $2\cdot15-1$
· o · $2\cdot15-1$
· o o 1
o · o 1
o o · 1

$6\cdot14.$

$6\cdot3^3$
$6\cdot2^{14}$
$6\cdot2^6\cdot3^{15}$

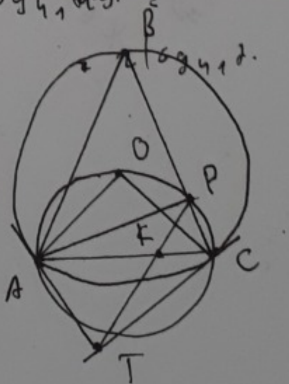
$6\cdot15.$

$6\cdot15\cdot6\cdot14=$
$=36\cdot210=7560$



6.
$\begin{array}{r} 36 \\ \times 14 \\ \hline 144 \\ 36 \\ \hline 504 \\ \times 15 \\ \hline 2520 \\ 504 \\ \hline 7560 \end{array}$

$\log_2 41$
$\log_{41} 2 \cdot 9.$ =



1

Черновик

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$5x-1>0$

$5x-1\neq 1$

$4x+1>0$

$4x+1\neq 1$

$\frac{x}{2}+2>0$

$\frac{x}{2}+2\neq 1$

$5x-1=a$

$4x+1=b$

$\frac{x}{2}+2=c$

$a\cdot b\cdot c=1$

$a=b$

$c=a-1$

$a\cdot a\cdot(a-1)=1$

$a^3-a^2=4$ $\quad a^3-a^2-4=0$

$a=2$

$\cancel{a^2(a-1)=1}$

$a^3-a^2-1=0$

$\log_{\sqrt{a}}(b)$ $\quad \frac{1}{2}\log_a b$

$\log_b(c^2)$ $\quad 2\log_b c$

$\log_c(a)$ $\quad \log_c a$

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a$

$\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\frac{27}{8}-\frac{2\cdot\frac{9}{4}}{}-1=$

$=\frac{27-18-8}{8}$

$=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}\log(4x+1)=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=4\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{5x-1}(4x+1)=4\cdot\frac{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\log_{5x-1}4x+1}$

$(\log_{5x-1}(4x+1))^2=4\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{5x-1}(4x+1)=0$

$4x+1=1$

$t^2=4t.$

$t^2-4t=0$

$\log_{5x-1}(4x+1)=4$

$t=0;4.$

1
8
24
$\times 29$
$+261$
$+68$
841

$\frac{x}{2}+2=5x-1$

$x+4=10x-2$

$9x=6$

$x=\frac{2}{3}.$

$\log$

$2\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{10}{4}\right)$ $\quad 2\log_{\frac{3}{2}}3$

$2\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{15}{2}\right)=1$

$2\log_{\frac{15}{2}}$ $\quad 2\cdot\log_3\left(\frac{9}{4}\right).$

$\log_{\frac{15}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)$

21102385 (U378351 M1303347)

Чистовик

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$

Представим числа a;b;c как

$a=6\cdot 2^x\cdot 3^y$

$b=6\cdot 2^n\cdot 3^k$

$c=6\cdot 2^f\cdot 3^q$.

НОД(a;b;c) = 6 => минимум одно из чисел x; n; f равно 0; минимум одно из чисел y; k; q равно 0.

Так как НОК(a;b;c) = $2^{15}\cdot 3^{16}$, то наибольшее из чисел x; n; f равно 14; наибольшее из чисел y; k; q равно 15.

Варианты чисел x; n; f:

x	n	f
·	·	0
·	0	·
0	·	·
·	0	0
0	·	0
0	0	·

, где · – число, отличное от 0

Для каждого случая одно из чисел равно 14, ~~другое~~. В первых трех случаях одно из оставшихся чисел ~~равно~~ лежит в интервале [1; 14]. Т.к. мы ищем упорядоченные пары, то для первых трех случаев имеем по 2·14 – 1 вариантов. Для последних трех случаев имеем по одному варианту ~~каждом~~ (можем поставить только 14).

Значит, всего вариантов для x; n; f $(2\cdot 14-1)\cdot 3+3=6\cdot 14$

Аналогично, для чисел y; k; q имеем $(2\cdot 15-1)\cdot 3+3=6\cdot 15$ вариантов.

Значит, искомое количество троек равняется $6\cdot 14\cdot 6\cdot 15=7560$.

Ответ: 7560.