

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102176**

ID профиля: **818997**

Вариант 17

№1

Пусть $a_1 = x$, $a_2 = x + d$, $a_3 = x + 2d$... $a_n = x + (n-1)d$
 Тогда $S = 10x + 45d$

$a_6 = x + 5d$, $a_{12} = x + 11d$, $a_7 = x + 6d$, $a_{11} = x + 10d$, тогда

$$(x+5d)(x+11d) > S+1, \quad (x+6d)(x+10d) < S+17. \Rightarrow$$

$$(x+8d)^2 - (3d)^2 > S+1 \quad \text{и} \quad (x+8d)^2 - (2d)^2 < S+17$$

$$(x+8d)^2 > S+1+9d^2 \quad \text{и} \quad (x+8d)^2 < S+17+4d^2 \Rightarrow$$

$$S+1+9d^2 < S+17+4d^2 \Rightarrow 5d^2 < 16 \Rightarrow d^2 < 3\frac{1}{5}$$

$d > 0$ и $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d^2$ может быть равно 1, 2 или 3, но
 т.к. d - целое, то $d^2 \neq 2$ и 3 , т.к. 2, 3 - не квадраты \Rightarrow
 $d^2 = 1 \Rightarrow d = 1$.

Тогда с одной стороны ~~$(x+5)(x+11) > 10x+45+1$~~

$$(x+5)(x+11) > 10x+45+1, \text{ тогда}$$

$$x^2 + 16x + 55 > 10x + 45 + 1$$

$$x^2 + 6x + 9 > 0$$

$$(x+3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq -3, \text{ а с другой стороны}$$

$$(x+6)(x+10) < 10x+45+17, \text{ тогда}$$

$$x^2 + 16x + 60 < 10x + 45 + 17$$

$$x^2 + 6x - 2 < 0$$

$$D = 36 + 8 = 44$$

$$x_1 = \frac{2\sqrt{11} - 6}{2} = \sqrt{11} - 3$$

$$x_2 = -\sqrt{11} - 3 \text{ и } x \in (-\sqrt{11} - 3; \sqrt{11} - 3), \text{ тогда}$$

если учитывать оба условия

$$x \in (-\sqrt{11} - 3; -3) \cup (-3; \sqrt{11} - 3). \text{ Найдем все } x \in \mathbb{Z} \text{ в}$$

этом промежутке

1

Чистович

Математика, 11 класс, Вариант 17,
Часть 1

$$3 < \sqrt{11} < 4 \Rightarrow 0 < \sqrt{11} - 3 < 1 \text{ и}$$

$$-3 > -\sqrt{11} > -4 \Rightarrow -6 > -\sqrt{11} - 3 > -7 \Rightarrow$$

$$-\sqrt{11} - 3 < -6 \text{ и } 0 < \sqrt{11} - 3 \rightarrow \text{в этот промежуток}$$

падают следующие целые числа: $-6, -5, -4, -2, -1, 0 \Rightarrow$

т.ч. $x = a$, то:

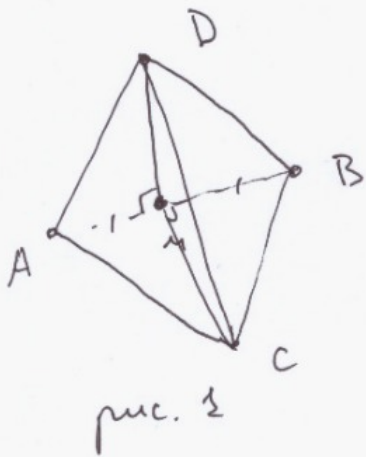
Ответ: $-6, -5, -4, -2, -1, 0$.

2

№ 2

Задача 1: $AB \perp DC$.

Допустим, что существуют перпендикуляры к AB из точек D и C . Т.ч. $AD=BD$ и $AC=BC$ - их основания совпадут (основания этих перпендикуляров - будет середина AB , т.ч. $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ - равнобедренные) ~~и~~ назовём это основание точкой M . Тогда рассмотрим плоскость DCM . $AB \perp DM$ и $AB \perp CM \Rightarrow AB \perp DCM \Rightarrow AB \perp DC$ з.т.ч. (рис 1)



Теперь через прямую AB , проведём перпендикулярную DC плоскость ABK ($K \in DC$)
 $ABK \perp DC$, а $DC \parallel$ оси ушницра \Rightarrow
 $ABK \parallel$ основанию ушницра \Rightarrow
 $\triangle ABK$ - висина в окружность равно
 основанию ушницра. ~~Висина~~

по радиусу
 Пусть радиус

~~окружности~~ основание = R , тогда по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin \angle AKB} = 2R \quad AB = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sin \angle AKB} = R \quad \sin \angle AKB \leq 1 \Rightarrow$$

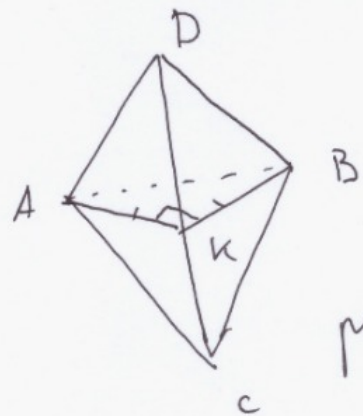
$R \geq 1 \Rightarrow$ если R - наименьший, то $\sin \angle AKB = 1$, а т.ч.

$$0^\circ < \angle AKB < 180^\circ \Rightarrow \angle AKB = 90^\circ$$

$AK = BK$ (т.ч. $\triangle ADK = \triangle BDK$ по $AD = DB$, общ. ДП и $\angle ADK = \angle BDK$)
 ($\angle ADK = \angle BDK$ по равенству $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, равных по трём сторонам)

$AB \perp DC$ (т.ч. $\angle AKB = 90^\circ$ тогда по теореме

Пифагора $AK^2 + BK^2 = AB^2 \Rightarrow$



3

$$2AK^2 = 4 \Rightarrow AK = \sqrt{2} = BK$$

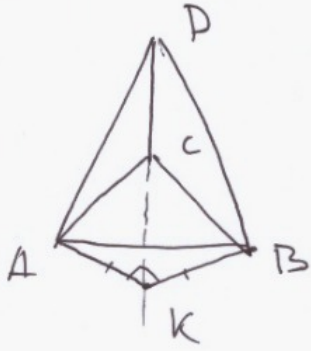


рис 3

Теперь мы можем посчитать
DK и KC.

т.ч. $AKB \perp DC$, то $AK \perp DC$ и $BK \perp DC$.
 $AD = 6$, $AK = \sqrt{2}$, тогда по теореме Пифагора

$$DK = \sqrt{6^2 - 2} = \sqrt{34}$$

$AC = 5$, $AK = \sqrt{2}$, тогда по теор. Пифагора

$$KC = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{23}$$

Теперь возможны 2 варианта: либо $K \in$ отрезку DC
(рис. 2) тогда $CD = DK + KC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$.
либо K лежит вне отрезка DC (рис 3) тогда $DC = DK - CK$
(т.ч. $DK > CK$), тогда $DC = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{23}$, либо $\sqrt{34} - \sqrt{23}$

41

№3

Сначала посмотрим какое парю чисел (a, b) можно бы нам подойти для ~~то~~ выполнение неравенства $a^2 + b^2 \leq \min(2(a+b), 2)$

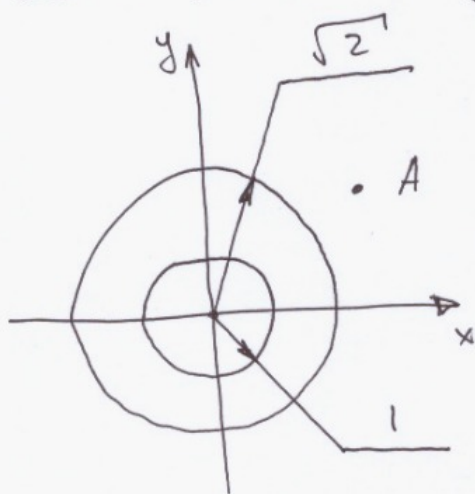


рис 4.

Возьмём координатную плоскость и нарисуем на ней круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$. Возьмём точку $A \notin$ этому кругу пусть A имеет координаты (a_1, b_1) тогда $a_1^2 + b_1^2 > 2$, ~~то~~ предположим, что A нам ~~тоже~~ подходит, тогда $a_1^2 + b_1^2$ либо ≤ 2 (но такого не может

быть т.к $a_1^2 + b_1^2 > 2$), либо $a_1^2 + b_1^2 \leq 2(a_1 + b_1)$, но такого не может быть т.к тогда; если $\min(2(a_1 + b_1), 2) = 2(a_1 + b_1)$ $2(a_1 + b_1) \leq 2 \Rightarrow 2 < a_1^2 + b_1^2 \leq 2$. \Rightarrow все точки вне нашего круга нам точно не подходят.

Теперь возьмём окружность радиуса 1 и с центром в начале координат.

~~Возьмём~~ Возьмём множество точек принадлежащих кругу радиуса $\sqrt{2}$ и не принадлежащих внутренности окружности радиуса 1 (самя окружность в это множество входит) (рис.5 - заштрихованная область) Назовём это множество - множеством M .

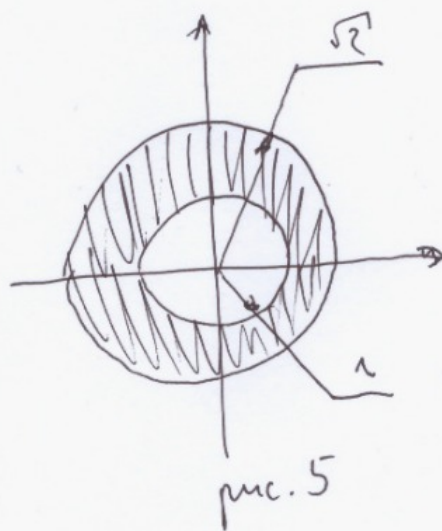


рис.5

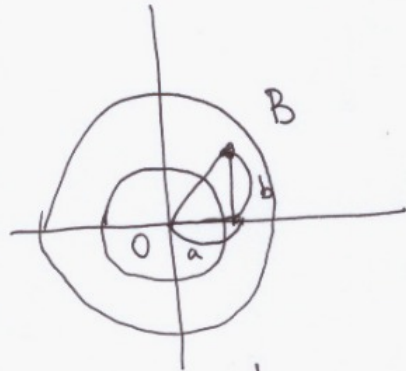
~~Теперь где находится точки множества~~ Докажем, что все точки множества M нам подходит.

~~Возьмём~~ Возьмём точку B с координатами (a_2, b_2) , т.к. $a_2 + b_2 \geq 1$ по неравенству треугольника (рис.6) $\Rightarrow 2(a_2 + b_2) \geq 2 \Rightarrow \min(2(a_2 + b_2), 2) = 2$ где M .

5

Часть 1
 $(\sqrt{2})^2 = 2$

При этом $a_2^2 + b_2^2 \leq (\sqrt{2})^2 = 2$
 $a_2^2 + b_2^2 \leq 2$ для любого $B \in M$.



$OB \leq a + b$
 $OB \geq 1$
 рис 6

Теперь для каждой точки $E \in M$ мы получаем множество точек (x, y) , где которых выполняется неравенство $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2$ иными словами для каждой точки $E \in M$ с координатами (a, b) мы строим окружность с центром (a, b) и радиусом $\sqrt{2}$.

В этой точке объёмление

и радиусом $\sqrt{2}$. Возьмём любую точку $C \in$ окруж с центром O и радиусом 1 и построим окружность с центром C и радиусом $\sqrt{2}$. Внутренний незакрашенный круг будет полностью находиться в исходной фигуре.

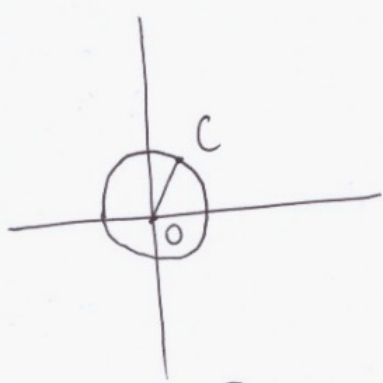


рис 7

тогда если мы построим окружность с центром C и радиусом $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} > 1$, а $CO \leq 1$ (рис 5) Внутренний незакрашенный круг будет полностью находиться в исходной фигуре

Возьмём любую точку $D \in$ окружности с центром O и радиусом $\sqrt{2}$, где не будет свой круг из точек (x, y) удовлетворяющих неравенству $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2$.

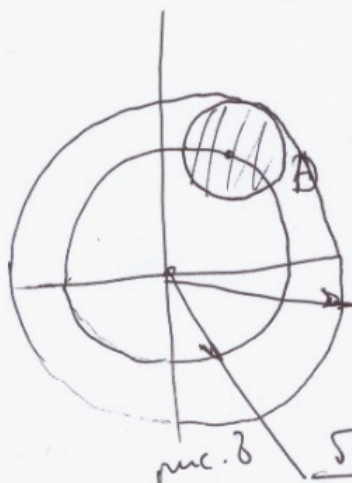


рис 8

Точка D в объёмлении всех окружностей M будет входять в M и следовательно само множество M и внутренним радиусом $\sqrt{2}$ и внешним радиусом $2\sqrt{2}$ (рис 8) (это получается при

6

Истович

Математика, 11 класс,
Вариант 17, Часть 2

рассмотрении всех возможных точек D на внешней
границе множества M) Тогда искома фигура
представляет собой круг с центром в начале координат
и радиусом $2\sqrt{2}$. ~~Площадь~~ \Rightarrow ~~Площадь~~ Площадь этой
фигуры будет равна $\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = \pi \cdot 8$

Ответ: 8π

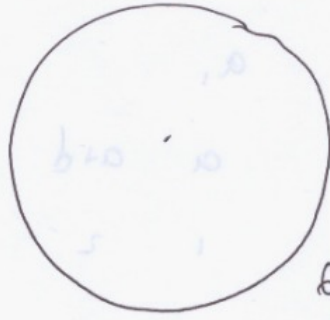
7

Упробум

(x, y)

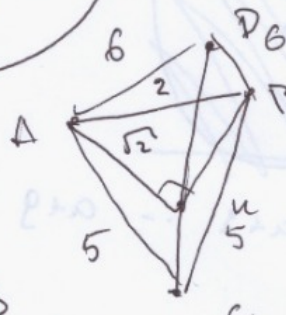
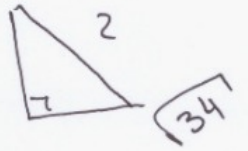
1. ~~AB~~ AB + DC

2. $\angle AMB$ AB \perp DC



$\angle AMB$

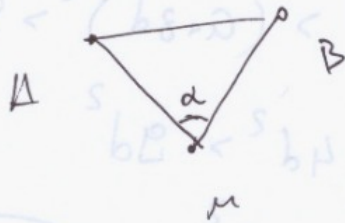
AU = B



4
36 - 2
36 -
AK \perp DC

$$\frac{2}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = R$$

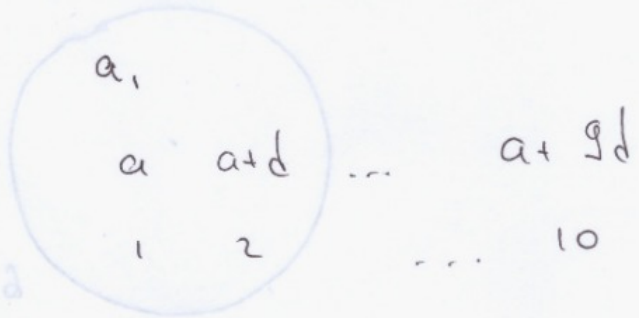
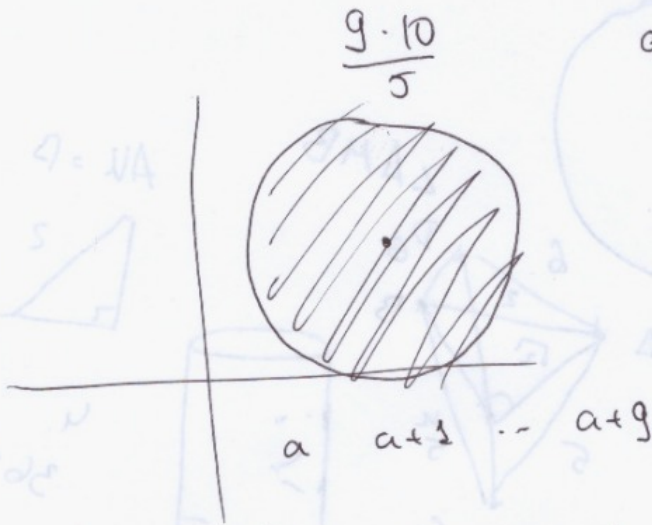


90°



Чепробун

$$a^2 + b^2 \leq \min(2(a+b), 2)$$



$$(a+5d)(a+11d) > S+1$$

$$(a+6d)(a+10d) < S+17$$

$$(a+5)(a+11) > 10a + 45 + 1$$

$$a^2 + 16a + 55 > 10a + 46$$

$$a^2 + 6a + 9 > 0$$

$$(a+3)^2 > 0$$

$$a \neq -3$$

$$S+17 + 4d^2 > (a+8d)^2 > S+1 + 9d^2$$

$$(a+6)(a+10) < 10a + 45 + 17$$

$$16 > 5d^2$$

$$a^2 + 16a + 60 < 10a + 45 + 17$$

$$a^2 + 6a - 2 < 0$$

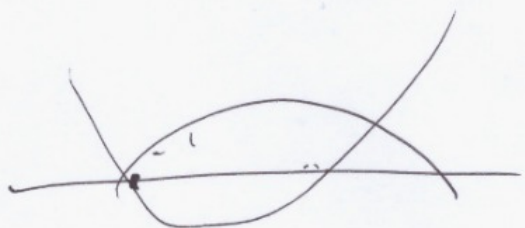
$$3\frac{1}{5} > d^2$$

$$D = 36 + 8 = 44 \quad d^2 = 3, 2, 1$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{44} - 6}{2} = \sqrt{11} - 3$$

$$d = 1$$

$$3 < \sqrt{11} < 4$$



Упробуи

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2$$

$$a^2 + b^2 \leq \min(2(a+b), 2)$$

$$\sqrt{2}$$

$$2 \cdot 4$$

$$a^2 + b^2$$

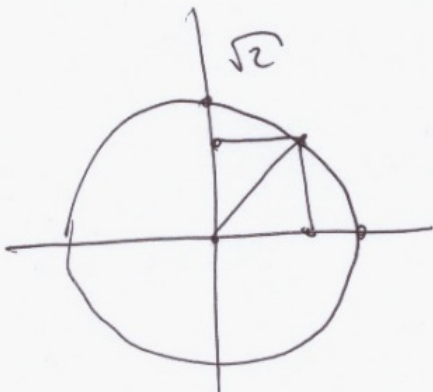
(a, b)

$$a^2 + b^2 <$$

$$2(a+b) < 2$$

$$a+b < 1$$

~~$$a^2 + b^2 < 2$$~~



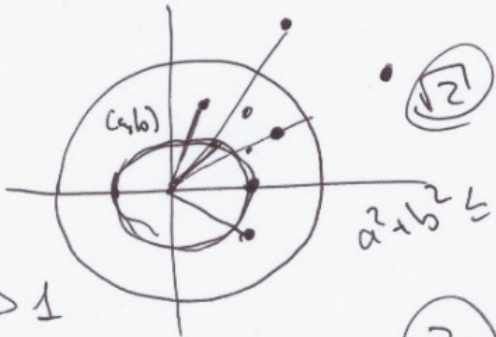
(a, b) $a^2 + b^2$

~~$$(a+b)^2 < 2$$~~

$$a^2 + b^2 \leq \min(2(a+b), 2)$$

$$2(a+b)$$

$$a+b > 1$$



$$a^2 + b^2 \leq$$

$$2$$



$$a+b \leq 1$$

$$2(a+b) \geq a^2 + b^2 \geq 2$$

$$a^2 + b^2 \leq 2a + 2b \leq 2$$

$$a(2-a) + b(2-b) \leq 0$$

$$2 \leq a^2 + b^2 \leq 2(a+b)$$

$$2(a+b) \leq 2$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102176**

ID профиля: **818997**

Вариант 17

Пусть $\text{НОД}(a, b, c) = d$, тогда $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$,
 $c = c_1 \cdot d$ где a_1, b_1 и c_1 попарно взаимнопросты и
 $\text{НОК}(a, b, c) = d \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$

Тогда $b \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$2 \cdot 3 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 2^{14} \cdot 3^{15}$

Т.к. a_1, b_1, c_1 попарно взаимнопросты, то все они одновременно
 на 2 или 3 делиться не могут, значит на $2^{\text{или } 3}$ одновременно
 могут делиться не более двух чисел a_1, b_1, c_1 .

~~Рассмотрим случаи~~
 Рассмотрим как мы можем распределить 14 двоек

между 2 числами:

0 и 14, 1 и 13, 2 и 12, 3 и 11, 4 и 10, 5 и 9, 6 и 8, 7 и 7
 Теперь посмотрим, ~~каким~~ наибольшим способом мы можем раздать ~~двоички на~~
 3 числа, поэтому

В случае с 0 и 14 только одно из чисел делится на 2, поэтому
 в этом случае нужно выбрать только 1 число, которое
 будет делиться на 2: у нас есть 3 варианта так сделать
 В случае с 7 и 7 два числа будут делиться на одинаковое
 степень 2, поэтому нам достаточно выбрать 1 число, которое
 на 2 делиться не будет: у нас есть 3 варианта так
 сделать.

Во всех остальных случаях (от 1 и 13 до 6 и 8, всего 6 штук)

нам сначала нужно понять кому достанется первая
 часть двоек (например для случая с 1 и 13, мы должны
 понять кому достанется ~~одна~~ одна двоичка) у нас есть 3
~~варианта~~ варианта, а после этого понять кому достанется
 вторая часть (для случая 1 и 13, после того как мы
 поняли, кому досталась 1 двоичка, мы должны
 понять кому достанется 13 двоек) у нас ~~есть~~ есть
 есть 2 варианта распределение. Т.е. на каждую
 случай \rightarrow 1 и 13, 2 и 12 ... 6 и 8 есть $3 \cdot 2 = 6$ способов распределить
 двоички

1

Чистовии

Математика, 11 класс, Вариант 17

Часть 2

Итого способов распределить двойки:

$3 * (когда идет только одно число) + 3 (когда два числа: 2^7) +$

$+ 6 * 6$ (Варианты 1 и 13, 2 и 12... 6 и 8) = 42 способа распределить ~~тройки~~ двойки.

Теперь посмотрим ~~какие~~ способы распределить тройки между 2 классами:

0 и 15, 1 и 14, 2 и 13, 3 и 12, 4 и 11, 5 и 10, 6 и 9, 7 и 8.

Теперь посмотрим сколько способов мы можем распределить тройки между тремя классами.

Или и в случае с двойками, в случае 0 и 15 нам достаточно выбрать только 1 число, которое будет делиться на 3. Это можно сделать 3 способами.

Для случаев 1 и 14, 2 и 13... 7 и 8, или и с ~~двойками~~ существует 6 вариантов распределения между тремя классами.

~~Итого~~ Итого способов ~~распределить~~ распределить тройки: $3 (когда на 3 идет только 1 число) + 6 * 7 = 45. \Rightarrow$

Всего различных троек чисел существует = кол-во способов ~~распределить~~ распределить двойки ~~• кол-во способов~~ распределить тройки = $42 * 45 = 1890$

Ответ: 1890 троек

2

№ 6.

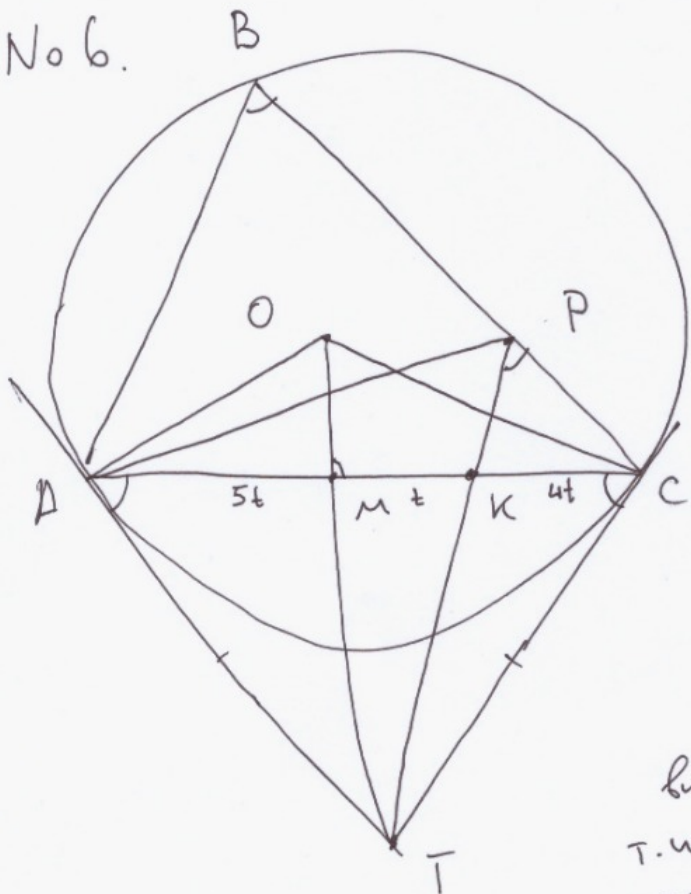


рис. 1

а) $OA \perp AT$ и $OC \perp CT \Rightarrow$

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow$

$\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow$

$OATC$ - вписанный.

Пусть $\angle AOC = \alpha$, тогда

$\angle ATC = 180^\circ - \alpha$.

С другой стороны

т.ч. $AOPC$ - вписанный, то

$\angle AOC = \angle APC = \alpha \Rightarrow$

$\angle APC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow APCT$ -

вписанный.

т.ч. AT и CT касательные к ω , то

$\angle CBA = \angle CAT = \angle ACT$.

т.ч. $APCT$ - вписанный, то $\angle TAC = \angle TPC$.

Тогда $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по $\angle ABC = \angle KPC$ и обшей

угле $\angle PCA$.

$S_{APK} = 6$, $S_{CPK} = 4 \Rightarrow S_{APC} = 10$.

$\frac{CK}{CA} = \frac{S_{CPK}}{S_{CBA}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

т.ч. $\triangle ABC \sim \triangle KPC$, то

$\frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CK}{AC}\right)^2 = \frac{4}{25}$

$\frac{4}{S_{ABC}} = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{ABC} = 25$

3

б) Проведём OT . $OA = OC$ и $AT = CT \Rightarrow$

$OT \perp AC$. $OT \cap AC = M$. $AO = OC \Rightarrow AC \perp MO \Rightarrow$

$AM = MC$.

Пусть $AC = 10t$. Тогда $AK = 6t$, $KC = 4t$ (т.ч. $\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{6}{4}$).

$AM = 5t$. $\angle TAM = \angle ABC = \arctg\left(\frac{7}{5}\right)$. \Rightarrow т.ч.

$\angle AMT = 90^\circ$,

Условие

Математика, 11 класс, Вариант 17,

Часть 2

$$\frac{TM}{AM} = \operatorname{tg}(\angle TAM) \Rightarrow \frac{TM}{5t} = \operatorname{tg}\left(\arctg\left(\frac{7}{5}\right)\right) = \frac{7}{5}$$

$$TM = 7t$$

$\triangle TAK \sim \triangle CKP$ по $\angle TAK = \angle KPC$ и $\angle ATK = \angle KCP$
(из вписанности $TAPC$)

$MK = MC - CK = AM - CK = t$, тогда по теореме Пифагора

$$KT = \sqrt{MK^2 + MT^2} = \sqrt{49t^2 + t^2} = \sqrt{50}t. \text{ Т.ч. } \triangle TAK \sim \triangle CKP, \text{ то}$$

$$\frac{S_{TAK}}{S_{CKP}} = \left(\frac{TK}{KC}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{50}t}{4t}\right)^2 = \frac{50}{16}$$

$$S_{TAK} = \frac{50}{16} \cdot S_{CKP} = \frac{50}{4}, \text{ но с другой стороны}$$

$$S_{TAK} = \frac{AK \cdot MT}{2} \text{ (т.ч. } MT \perp AK) = \frac{6t \cdot 7t}{2}$$

$$\frac{42t^2}{2} = \frac{50}{4}$$

$$42t^2 = \frac{50}{2}$$

$$t^2 = \frac{50}{84}$$

$$t = \sqrt{\frac{50}{84}} \Rightarrow AC = 10t = 10 \cdot \sqrt{\frac{50}{84}}$$

Ответ: $10\sqrt{\frac{50}{84}}$

4

Упростите выражение

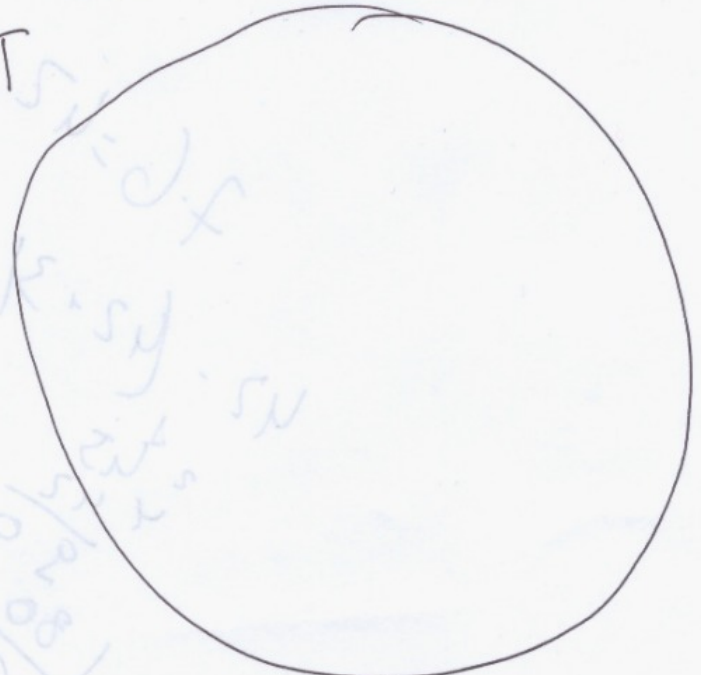
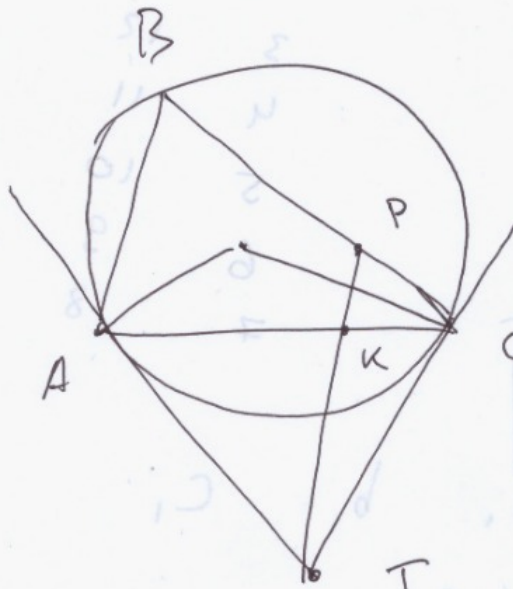
$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$$1 = \log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$$\sqrt{5x-1} = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$$5x-1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^4$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



Чепробу

$(a, b, c) = 6 \Rightarrow k$

$ka \rightarrow b \cdot c$

$2 \cdot 5 \cdot 3 = 15$

$2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$

14

1 13

2 12

3 11

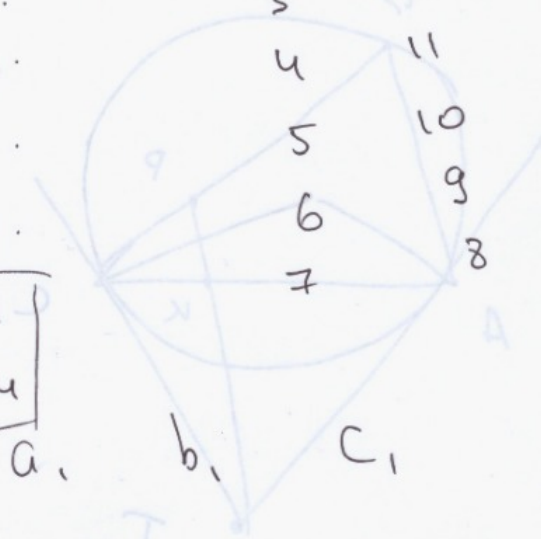
4 10

5 9

6 8

7	7
0	14

3



a, b, c

$6 \cdot 6 + 6$

7 15

$\frac{7}{15}$

45

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 42 \\ \hline 90 \\ 180 \\ \hline 1890 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 42 \\ \hline 90 \\ 180 \\ \hline 1890 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 6 = 42 \\ 42 \cdot (42 + 3) \\ \begin{array}{r} 45 \\ \times 42 \\ \hline 90 \\ 180 \\ \hline 1890 \end{array} \end{array}$$

Упробуи

$$R^2 \sin(2\alpha) + R^2$$

$$R^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 25$$

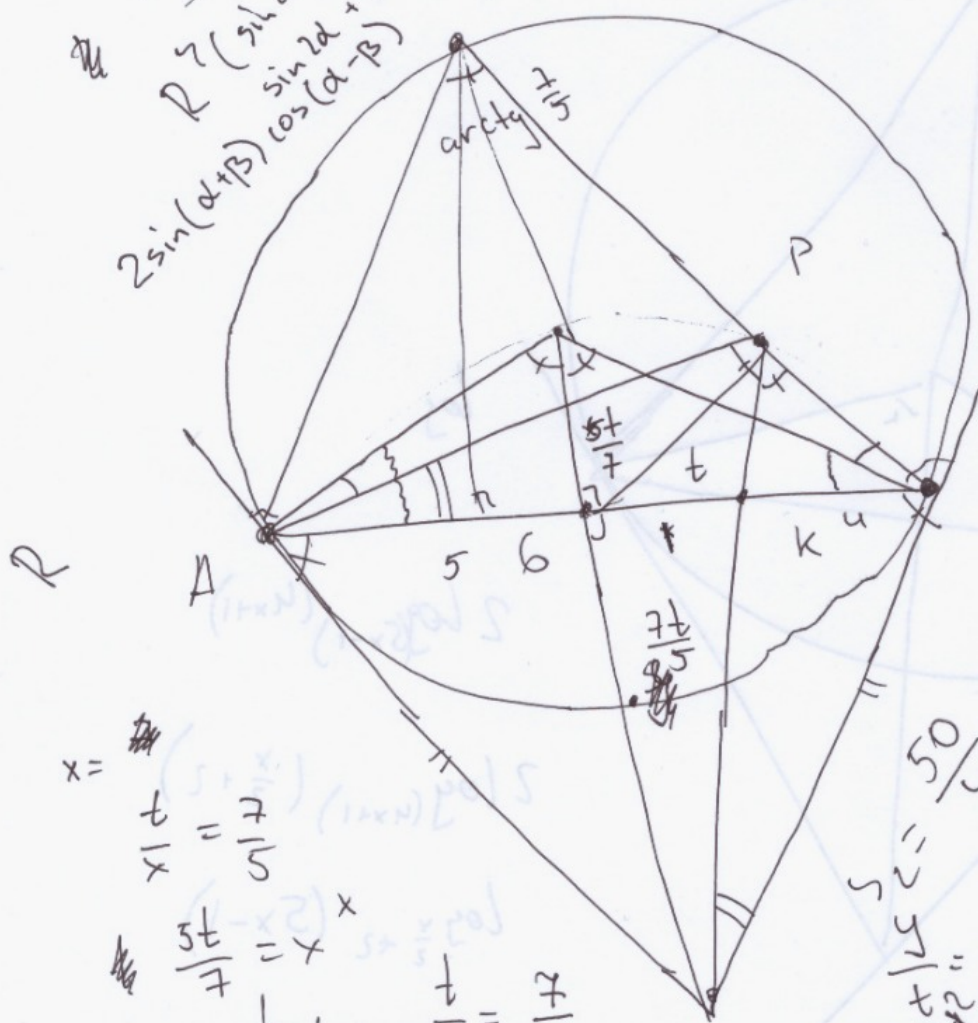
$$2\sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin(90-\alpha-\beta) \cos(\alpha-\beta)$$

$$4+x = 6-x$$



$$\frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$$



$$t^2 + \left(\frac{5t}{7}\right)^2 + t^2 + \left(\frac{7t}{5}\right)^2 = \dots$$

$$\frac{2}{3} = \left(\frac{5t}{7} + \frac{7t}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\frac{4t^2}{2} = \frac{50}{2}$$

$$x = \frac{7}{5}t$$

$$\frac{5t}{7} = x$$

$$\frac{t}{x} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{y}{5k} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{y}{5k} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{y}{5k} = \frac{7}{5} = \frac{5k}{x}$$

$$\frac{y}{5k} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{5t}{7} = x$$

$$xy = t^2$$

$$\frac{5k}{x} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{25k}{7} = x$$

$$xy = t^2$$

Чепробити



log

$$2 \log_{(5x-1)} (4x+1)$$

$$2 \log_{(4x+1)} \left(\frac{x}{2} + 2\right)$$

$$\log_{\frac{x}{2} + 2} (5x-1)$$

$$\log_{(5x-1)} (4x+1) = \log$$

$$\log_{5x-1} \left(\frac{x}{2} + 2\right) = \log_{(5x-1)}$$

$$\log_{(5x-1)} (4x+1) = \log_{(4x+1)} \left(\frac{x}{2} + 2\right)$$

$$x > \frac{1}{5} \quad x \neq \frac{2}{5}$$

$$5x-1 > 0$$

$$5x > 1$$

$$x > \frac{1}{5}$$

$$5x \neq 2$$

$$x \neq \frac{2}{5}$$

$$4x+1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{4} \quad x \neq 0$$

$$\frac{x}{2} + 2 > 0 \quad \frac{x}{2} \neq -2$$

$$\frac{x}{2} > -2 \quad x > -4$$

$$\frac{x}{2} + 2 = 1$$

$$\frac{x}{2} = -1$$

$$x \neq -2$$