Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102172**

ID профиля: **330717**

Вариант 17

Листовик No:1

1. $a_1; a_2; \dots$ арифметич. прог. $a_1 \in Z; d \in Z$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases} \quad S = a_1 + \dots + a_{10} \qquad a_1 - ?$$

Решение

$a_1; a_1+d; \dots; a_1+9d; a_1+10d; a_1+11d$

$$S = 10a_1 + \frac{9 \cdot 10}{2} d = 10a_1 + 45d$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1 + 45d + 1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

$$(a_1+6d)(a_1+10d) + 10a_1 + 45d + 1 < (a_1+5d)(a_1+11d) + 10a_1 + 45d + 17$$

$$\cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 d} + 60d^2 + \cancel{10a_1} + \cancel{45d} + 1 < \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 d} + 55d^2 + \cancel{10a_1} + \cancel{45d} + 17$$

$\Downarrow$

$$5d^2 < 16$$

$$d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow d \in \left(-\frac{4}{\sqrt5}; \frac{4}{\sqrt5}\right) \qquad 1 < \frac{4}{\sqrt5} < 2 \text{ и } d \in Z$$

$\Downarrow$

$d = \{-1; 0; 1\}$; $d > 0 \Rightarrow d = 1$ (возрастающая)

Если $d = -1$

$$\begin{cases} (a_1-5)(a_1-11) > 10a_1 - 45 + 1 \\ (a_1-6)(a_1-10) < 10a_1 - 45 + 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 - 26a_1 + 99 > 0 \\ a_1^2 - 26a_1 + 88 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 13-\sqrt{70}) \cup (13+\sqrt{70}; \infty) \\ a \in \cancel{(-\infty; 4) \cup (22; +\infty)} \ (4; 22) \end{cases} \Rightarrow \cancel{a \in (-\infty; 13-\sqrt{70}) \cup (13+\sqrt{70}; \infty)} \Rightarrow a \in (13+\sqrt{70}; 22) \Rightarrow a \in Z$$

$\Downarrow$

нет решений.

Чистовик №: 3.

3. Задача.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2 \\ a^2+b^2 \leq \min(2a+2b; 2) \end{cases} \qquad S_м = ?$$

Решение.

$a^2+b^2 \leq 2$; значит точка с координатами $(a;b)$ находиться в окружности с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$:

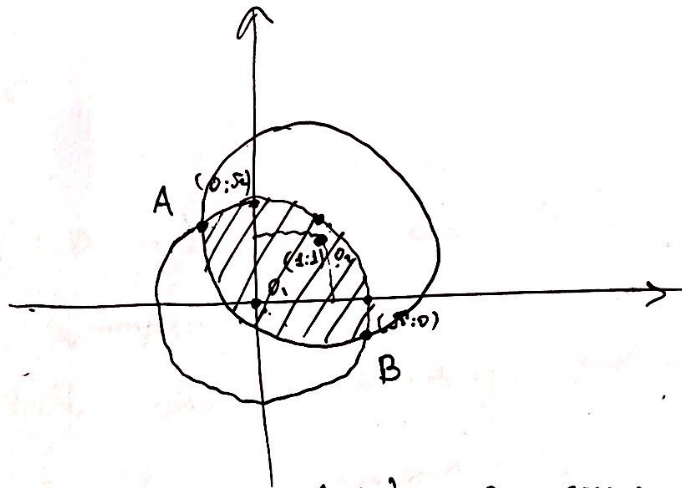
$a^2+b^2 \leq 2a+2b$

$\Updownarrow$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2$

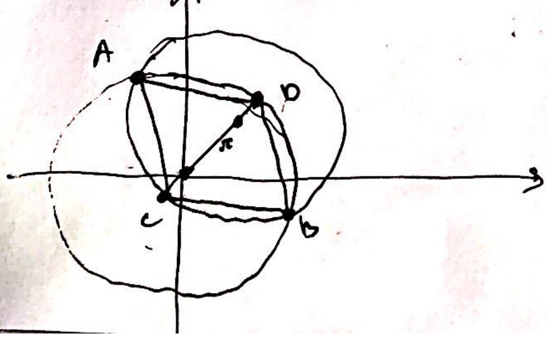
Значит точка $(a;b)$ находиться в окружности с центром $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$

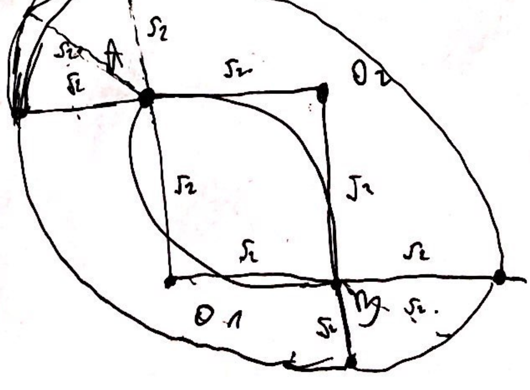
Уже знаем, что точка $(a;b)$ находится в показанном месте на графике.



$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2$; значит, что точки $(x;y)$ находятся внутри окружности с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$:

Значит нам нужны те $(x;y)$ у которых расстояние от отмеченной части не больше чем $\sqrt{2}$;





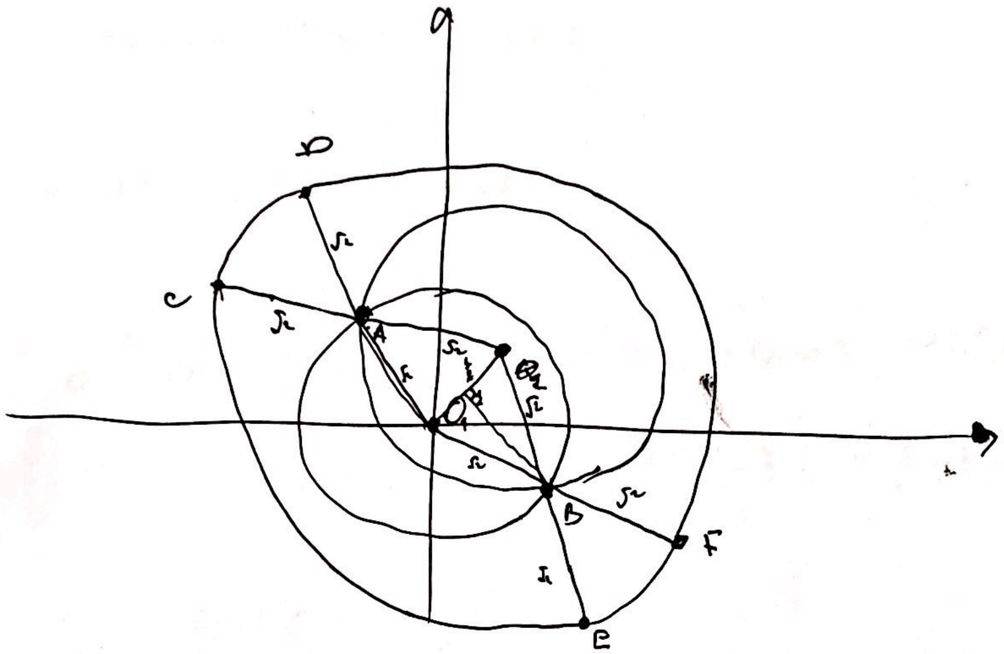
Чистовик №:4. задача 3 продолжение.

Получим вот такую вот фигуру.

Две окружности с радиусом $2\sqrt{2}$ и с центрами

(0:0) и (1:1); ~~площадь пересечения будет искомой фигурой~~

Давайте начертим фигуру М.



2 сегмента с радиусами $\sqrt{2}$ (ACD; и EBF) и еще 2 ~~части~~ сегменты из кругов с центрам O_1 и O ~~окружностями~~ и радиусами $2\sqrt{2}$; минус площадь ромба AO_1BO_2 (его считали 2 раза в обеих сегментах.

$S_{AO_1BO_2} = \frac{1 \cdot 7\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{\sqrt{2}}$ $(AB = 7\sqrt{2};\ O_1O_2 = 1)$

S_{CO_1E} сегмента будет $\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\angle AO_1B}{360}$

$\angle AO_1B$ можно посчитать.

Частовик № : 2

Если $d = 1$.

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1+46 \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1+62 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46 \\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+62 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9 > 0 \\ a_1^2+6a_1-2 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+3)^2 > 0 \Rightarrow a \in (-\infty;\infty) \\ a \in (-3;-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases}$$

$a_1 \in (-6,\dots;\ 0,\dots)$

$\Downarrow$

Ответ: a_1 может быть $-6; -5; -4; -3; -2; -1;$ и 0; при этом $d=1$.

$\boxed{d = -1}$

$\cancel{a_1 ; a_1}$

$$\begin{cases} (a_1 - 5)(a_1 - 11) > 10a_1 - 45 + 1 \\ (a_1 - 6)(a_1 - 10) < 10a_1 - 45 + 17 \end{cases}$$

$a_1^2 - 16a_1 + 55 > 10a_1 - 44.$

$$\begin{cases} a_1^2 - 26a_1 + 99 > 0 \\ \end{cases}$$

$a_1^2 - 16a_1 + 60 < 10a_1 - 28$

$a_1^2 - 26a_1 + 88 < 0.$

29

Черновик

$a = a_1 + 5d$
$b = a_1 + 11d$

$ab - a + b - 1 < 10a - \frac{5b - 5a}{6} + 17$

$6ab - 6a + 6b - 6 < 60a - 5b + 5a + 102$

$$\begin{cases} 6ab < 71a - 11b + 108 \\ 6ab > 60a - 5b + 6 \end{cases}$$

$\cancel{b(6a+11) < 71a + 108}$

$71a - 11b + 108 > 60a - 5b + 6$

$11a - 6b > -102$

$\boxed{a > \frac{6b - 102}{11}}$

$a > \frac{6b - 102}{11}$

Черновик

$-\frac{4}{2+\dots}$

$-1, \dots$

$\boxed{-1; 0; 1}$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$10a_1 + 45d + 1$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1d} + \cancel{60d^2} < \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1d} + \cancel{55d^2} + \cancel{10a_1} + \cancel{45d} + 17$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$\boxed{d \in \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)}$

$$55d^2 + d(16a_1 - 45) + (a_1^2 - 10a_1 - 1) > 0$$

$$D = (16a_1 - 45)^2 - 4 \cdot 55(a_1^2 - 10a_1 - 1)$$

220.

$$256a_1^2 - 90 \cdot 16a_1 + 45^2 - 220a_1^2 + 2200a_1 + 220$$

a_1 - штрих

d - штрих

a b

$$(a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1$$

$$(a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17$$

$$(a+1) \quad (b-1)$$

$a_1 + 5d = a$

$a_1 + 11d = b$

$6d = b - a$

$$d = \boxed{\frac{b-a}{6}}$$

$$d = \frac{b-a}{6}$$

$ab >$

$$S = \boxed{10a - \frac{5(b-a)}{6}}$$

$$\begin{cases} ab > 10a - \frac{5(b-a)}{6} + 1 \\ (a+1)(b-1) < 10a - \frac{5(b-a)}{6} + 17 \end{cases}$$

$$6ab > 60a - 5b + 5a + 6$$

$$65a - 5b + 6$$

Черновик

$$6ab + 5b$$

$$b(6a+5) > 65a + 6$$

~~Черновик № 2.~~

$$\begin{cases} a^2 > 10a+1 \\ a^2 < 10a+17 \end{cases}$$

~~$a^2+10a+1 < a^2+10a+17$ — верно~~

$$\begin{cases} a^2-10a-1>0 \\ a^2-10a-17<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;5-\sqrt{26})\cup(5+\sqrt{26};\infty) \\ a\in(5-\sqrt{42};5+\sqrt{42}) \end{cases}$$

$\Downarrow$

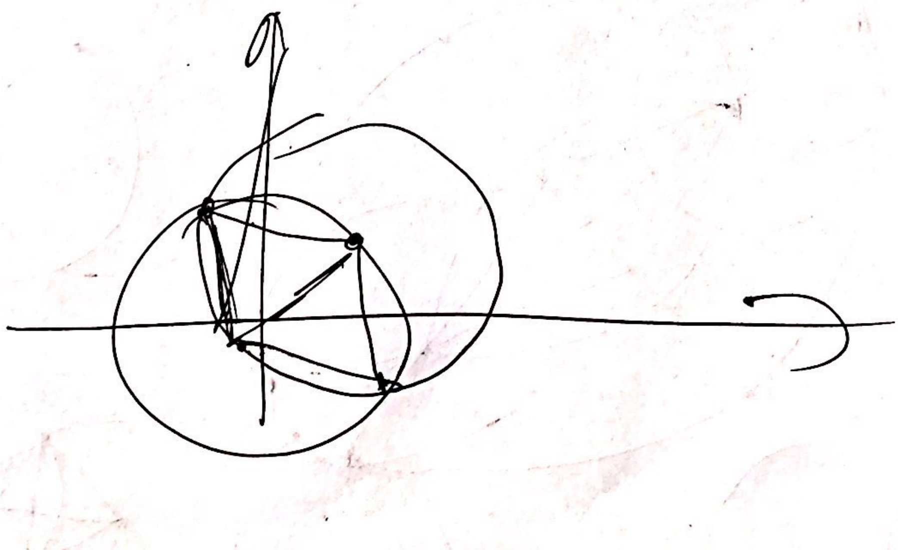
~~$a^2-10a-1>0$~~

~~$a\in(-\infty;5-\sqrt{26})\cup(5+\sqrt{26};\infty)$~~

$a\in(5-\sqrt{42};5-\sqrt{26})\cup(5+\sqrt{26};5+\sqrt{42})$ $\quad a\in\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$a\in(-1{,}48\ldots;-0{,}\ldots)\cup(10{,}\ldots)$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102172**

ID профиля: **330717**

Вариант 17

Участник №: 1.

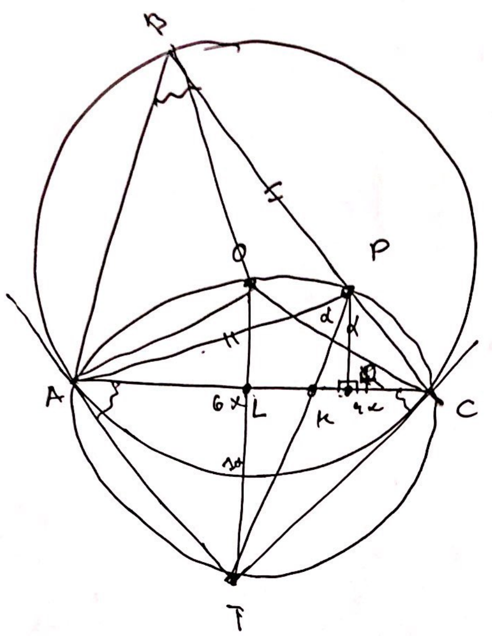
8 Задача.

$\angle B = ?$

$\angle C = ?$

$S_{APK} = 6$

$S_{PKC} = 4$



Решение

$\angle AOC = 2\alpha$; $\angle TAC = \angle TCA = \alpha \Rightarrow \angle ATC = 180 - 2\alpha$

⇓

T лежит на окружности описанной вокруг AOC

⇓

$\angle TPC = \angle TAC = \alpha$; $\angle APT = \angle AJ = \alpha$

⇓

PK биссектриса угла APC;

$\angle ABP + \angle BAP = \angle APC = 2\alpha \Rightarrow \angle BAP = \alpha$

⇓

$BP = AP$

$\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{6}{4}$

Чистовик №:2 6 задача

$\frac{BP}{PC} = \frac{6}{4} = \frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{S_{ABP}}{6+4}$

⇓

$S_{ABP} = \frac{10 \cdot 6}{4} = 15$

⇓

$\boxed{S_{ABC} = 15 + 10 = 25}$ — Отговор на точка а)

Нека $TL \perp AC$: TL средна перп. AC, проходи през O:

$tg\,\alpha = \frac{TL}{AL}$ $AL = 5x$ $\Rightarrow TL = 7x$

$LK = x \Rightarrow TK = \sqrt{49x^2 + x^2} = x\sqrt{50}$

$KP \cdot TK = AK \cdot KC = 24x^2 = \sqrt{50}x \cdot KP$

⇓

$KP = \frac{24x^2}{\sqrt{50}x} = \frac{24x}{\sqrt{50}}$

$\triangle TLK \sim \triangle KPR$ (R - основание перп. P на AC)

⇓

$\frac{TK}{KP} = \frac{LK}{KR}$ $\frac{\sqrt{50}x \cdot \sqrt{50}}{24x} = \frac{x}{KR}$

⇓

$KR = \frac{24x}{50}$

$PR = \sqrt{KP^2 - KR^2} = \sqrt{\frac{24^2x^2}{50} - \frac{24^2x^2}{50^2}} = \sqrt{\frac{49x^2 \cdot 24^2}{50^2}} = \frac{7 \cdot x \cdot 24}{50}$

Чистовик No: 3 Задача. 6

$$S_{APC} = \frac{PR \cdot AC}{2} = \frac{10x \cdot 7x \cdot 24}{50 \cdot 2} = 10\,(S_{APK} + S_{PKC})$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = \frac{100}{24 \cdot 7} \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{168}} = \frac{5}{\sqrt{42}}.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{AC = 10x = \frac{50}{\sqrt{42}}}$$

Ответ б) точки.

Чистовик №:4

4 Задача

$$\begin{cases} (a;b;c) = 6 = 2\cdot 3 \\ [a;b;c] = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

Решение.

$\{a;b;c\} = 2^{x}\cdot 3^{y}$

$a = 2^{x_1}\cdot 3^{y_1}$

$b = 2^{x_2}\cdot 3^{y_2}$

$c = 2^{x_3}\cdot 3^{y_3}$

в степенях 2-а должна быть хотябы одна 2^{15} и в степенях 3-а хотя бы одна 3^{16}

Заметим что в степенях 3 и 2 должны быть хотя бы ~~одни~~ 1 ~~степени~~ 1 степени (2 и 3).

Если есть хотя бы $1-2$; $1-3$: $1-2^{15}$ и $1-3^{16}$: то такие $(a;b;c)$ удовлетворяют каждой системе, и если нету хотябы одна из выше перечисленных, то система будет неисправной.

Значит у нас из $(x_1;x_2;x_3)$ - нужно выбрать 2 места для 2^{15} и 2 ; в 3-ем. месте может быть $(2^1;2^2\ldots;2^{15})$ 15 способов:

и из $(y_1;y_2;y_3)$ - нужно выбрать 2 места для 3 и 3^{16} и в 3-ем месте может быть $(3^1;3^2;\ldots;3^{16})$ (16 способов)

Чистовик №:5 4 задача.

Значит с степенями 2 будут всего $C_3^2 \cdot 15$ и с степенями 3-й будет всего $C_3^2 \cdot 16$ способов.

⇓

всего будет способов → $C_3^2 \cdot C_3^2 \cdot 15 \cdot 16 =$

$= 9 \cdot 15 \cdot 16$

Ответ: 2160

Чистовик №: 6

5 Задача.

$2\log_{5x-1}(4x+1)$; $2\log_{4x+2}\left(\frac{x}{2}+2\right)$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Произведение этих 3 чисел равно 4.

$\left(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1\right)$

⇓

$a^2 \cdot (a-1) = 4$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$, из теоремы Безу проверяем $a=2$

$a=2$ решение

⇓

$a^3 - a^2 - 4 \,|\, a-2$

$-\ a^3 - 2a^2 \,|\, a^2 + a + 2$

$-\ a^2 - 4$

$a^2 - 2a$

$-\ 2a - 4$

$2a - 4$

0

$\Rightarrow a^3 - a^2 - 4 = (a-2)(a^2+a+2) = 0$

⇓

$a^2 + a + 2 \quad D < 0$

⇓

$a = 2$, единственное решение.

⇓

наши числа будут $(2:2:1)$

если $2\log_{5x-1}(4x+1) = 2$; $2\log_{4x+2}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 2$ и $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 1$

$\Leftrightarrow \log_{5x-1}(4x+1) = 1$

$5x - 1 = 4x + 1 \quad x = 2$

$2\log_{9} 3$ ~~≠ 2 не получилось~~. $= 2$ и $\log_3 9 \neq 1$

Если $2\log_{5x-1}(4x+1)=2$ $\quad 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1$. и $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$

$\Downarrow$

$5x-1=4x+1 \Rightarrow x=2$

$2\log_{9}3 \neq 1$ ~~опять~~ и $\log_3 9=2 \Rightarrow$ ~~не получилось~~ $\boxed{x=2 \text{ решение}}$

Если $2\log_{5x-1}(4x+1)=1$; $2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2$ и $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$

$\Downarrow$

$$\frac{x}{2}+2=4x+1$$

$$x+4=8x+2$$

$$7x=2$$

$$\Downarrow \quad x=\frac{7}{2}$$

$2\log_{\frac{5\cdot 7}{2}-1}(14+1)=1$ $\quad \log_{\frac{33}{2}}15=\frac{1}{2}$ опять не получилось; ~~значит таких x не существует.~~

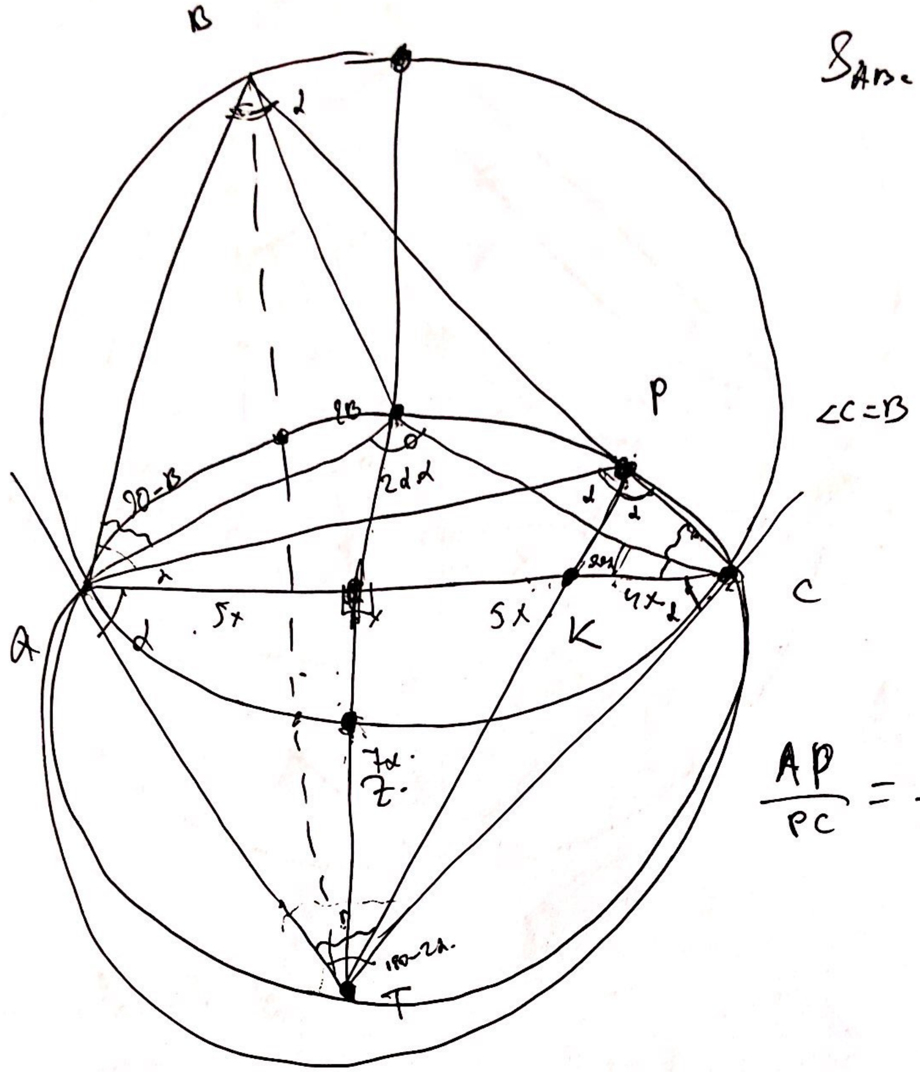
Ответ – ~~Не существует.~~ $\boxed{x=2}$

Чистовик No: 7

$S_{APK} = 6.$

$S_{CPK} = 4.$

$S_{ABC} - ?$



$$\frac{AP}{PC} = \frac{6}{4}$$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$ $\qquad$ $AC = ?$ $\qquad$ $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$

$\frac{z}{5x} = \frac{7}{5}$ $\qquad$ $25x^2 = 7x \cdot ?$

$z = 7x.$ $\qquad$ $? = \frac{25}{7}x.$

$$\begin{cases} (a:b:c) = 6 = 2 \cdot 3 \\ [a:b:c] = 2^{15} \cdot 3^{16}. \end{cases}$$

2:3 – [illegible]

$2 : 3 :$

$2 : 3$

$2 : 3^{16}$

$2^{15} \cdot 3$

3

$\boxed{A:B:C}$ 1

$a:b:c = 3^x \cdot 2^y$

1 ; y

$\boxed{x : y \geq 1}$

$3^x \cdot 2^y$

$a:b:c$

2

$\boxed{\begin{matrix} 2\,3 \\ 2^{15}\,3. \\ 2 \cdot 3^{16}. \end{matrix}}$

15 16

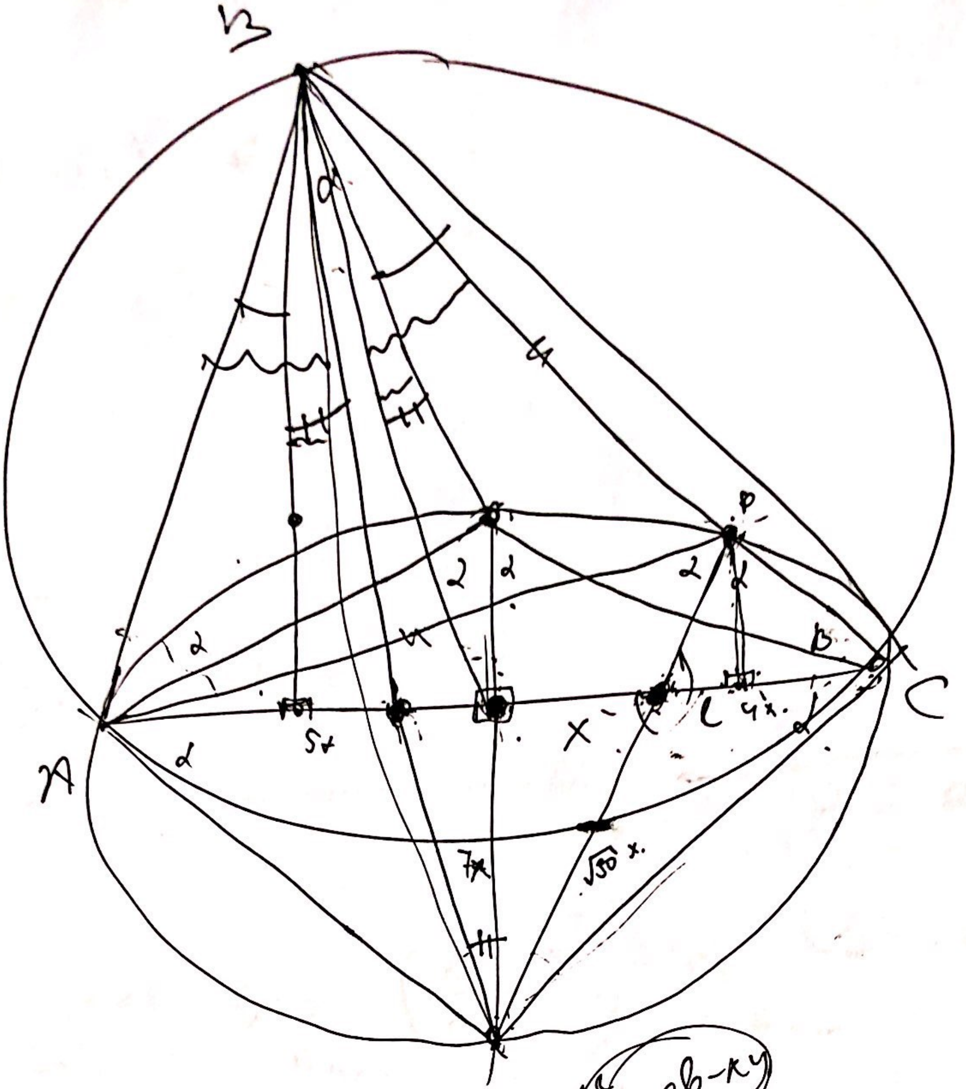
$2^{15} \quad 3$

$2 \quad 3^{16}$

$2 \quad 3$

15

$2^{15} : 3^{16}$



$l^2 = ab - xy$

$4x \cdot 6x = \sqrt{50}\,x \cdot t$

$t = \frac{x \cdot 24}{\sqrt{50}}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{5}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{5}$

$\cancel{6x \cdot 4x}$

$l = \frac{24x}{50}$

$\frac{\cancel{x} \cdot 24}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \cancel{x}}$

$\frac{24^2 x^2}{50} - \frac{24^2 x^2}{50^2} =$

$\frac{24}{50} = \frac{l}{x}$

$x^2 = \frac{50}{24 \cdot 7}$

$= \frac{50 \cdot 24^2 x^2 - 24^2 x^2}{50^2} = \sqrt{\frac{49 x^2 24^2}{50^2}} = \frac{7 \cdot x \cdot 24}{2 \cdot 50} \cdot \cancel{10}x = \cancel{10}$

$2\log_{5x-1}(4x+1)\,;\,2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right);\,\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-2)$

log

$\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$4x+1 - 5x+1$

1 2 $\quad 2-x.$

$1+\log_{(5x-1)}(2-x) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\frac{2x+4}{2}$

$2\left(\log_{4x+1}^{2x+4.} - \log_{4x+1} 2\right)$

9

3

2

9 1

3 : 9

$(a:b:c)$.

$$\begin{cases} (a:b:c) = 6 \\ [a:b;c] = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$2^{15}\cdot 3^{17}$ ~~НОК~~ НОК

$x = ?$ $\boxed{a : a : a-1}$

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) : \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 : \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$$

$$2\log_{5x-1}(4x+1) : 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) : \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$$

$$2\log_a b ; 2\log_b c : \log_c a$$

$$2\log_{5x-1}(4x+1);\ 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right);\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$$

$(a;\ a;\ a-1)$

$$2\log_{5x-1}(4x+1) \quad 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$2\log_a b;\ 2\log_b c;\ \log_c a$$

$$\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$2\log_{5x-1}\left(\frac{4x+1}{5x-1}\right) = 2\log$$

$$\log_{5x-1} \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 4x+1.$$

$$\log_a \log_b c$$

~~Участник № 4.~~

1 Задача.

$$\begin{cases} (a;b;c) = 6 = 2\cdot 3 \\ [a;b;c] = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

Черновик

Решим

$a:b:c = 2^x \cdot 3^y$ все:

$a = 2^{x_1} 3^{y_1}$

$b = 2^{x_2} 3^{y_2}$

$c = 2^{x_3} 3^{x_3}$

2

1

8

$k = 2^i \cdot 3^j \to i; j$ не могут одновременно быть больше единиц.

$k \in \{a:b:c\}$

Хотя бы одна должна из $x_1; x_2$ и x_3 быть 15; и из $y_1 : y_2 : y_3$ хотя одна должна быть 16 и $Max(x_1:x_2:x_3) = 15$ и $Max(y_1:y_2:y_3) = 16$

~~2^{15} может быть [illegible] 3 [illegible] [illegible]:~~

~~и 3^{16} может быть только 2.~~

~~Двух чисел известных нам из (a:b:c) трой к ч.~~

~~3-х цифра может быть:~~

~~[illegible]~~ с 2^{15} должна быть 3, и с 3^{16} все возможные тройки

$$4\log_{5x-1}(4x+1)\,\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) =$$