Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102040**

ID профиля: **814933**

Вариант 17

Чистовик. Вариант № 17 Математика 11кл.

№1.

$d>0,\ a_i \in Z;\ S_{10}=5(2a_1+9d)$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 5(2a_1+9d)+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 5(2a_1+9d)+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2 > 5(2a_1+9d)+1 \\ a_1^2+16a_1d+60d^2 < 5(2a_1+9d)+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2 > 5(2a_1+9d)+1 \\ -a_1^2-16a_1d-60d^2 > -5(2a_1+9d)-1 \end{cases}$$

$$-5d^2 > -16$$

$$-d^2 > -\frac{16}{5}$$

$$d^2 < 3{,}2$$

$$d_1 < \sqrt{3{,}2}$$

$d_2 > -\sqrt{3{,}2}$ (не подходит, т.к. $d>0$)

$$d < \sqrt{3{,}2} \Rightarrow d=1.$$

1

Продолжение на листе 2

21102040 (U814933 M1302614)

Чистовик. Вариант №17 Математика 11кл.

$$\begin{cases}(a_1+5)(a_1+11)>5(2a_1+9)+1\\(a_1+6)(a_1+10)<5(2a_1+9)+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+6a_1+9>0\\a_1^2+6a_1-2<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1\neq-3\\a_1\in(-3-\sqrt{11};\ -3+\sqrt{11})\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1\neq-3\\a_1\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$$

Ответ: $a_1\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

Чистовик Вариант №17 Математика 11 кл.

№2

Из неравенства ΔACD $CD<11$

Из неравенства ΔBCD $CD<11$

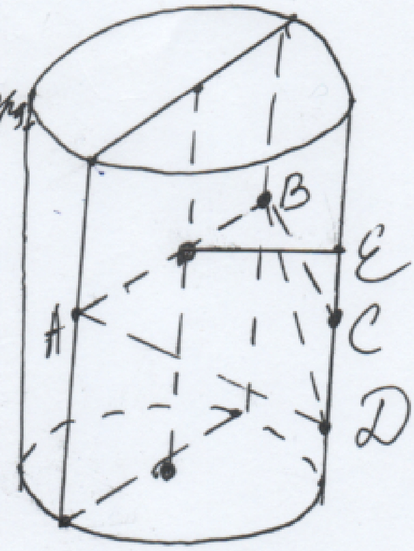
Т.е. длина $CD \in (0;11)$

$\Delta CDA = \Delta CDB$ (по трем сторонам)

=> эти треугольники расположены симметрично оси цилиндра и осевого сечения, проходящего через CD. Тогда AB параллельно плоскости основания цилиндра. AB – хорда;

Окружность, хорда которой равна 2, будет иметь наименьший радиус = 1.

Через AB проведем плоскость параллельную основанию цилиндра.



Пусть E точка пересечения этой плоскости с образующей CD

$AE=\sqrt{2}$. ΔAEC – прямоуг.

$\angle AEC = 90°$. $EC=\sqrt{5^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{23}$

ΔDEA – прямоуг. $\angle DEA = 90°$.

$ED=\sqrt{6^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{34}$

Если C и D лежат по разные стороны от т. E, то

$CD = \sqrt{23}+\sqrt{34}$.

Если по одну сторону, то $CD = -\sqrt{23}+\sqrt{34} = \sqrt{34}-\sqrt{23}$

Ответ: $CD=\sqrt{34}\pm\sqrt{23}$

3

21102040 (U814933 M1302614)

Чистовик Вариант №17 МАТЕМАТИКА 11кл.

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$

Рассмотрим 2-ое неравенство $a^2+b^2 \le \min(2a+2b,2)$.
Это равенство эквивалентно системе.

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2-2b \le 0 \\ \sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) \le 2 \\ \sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \\ \sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2} \le \sqrt{2} \\ \sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{2} \end{cases}$$

Это значит, что возможные а и b лежат на пересечении кругов с радиусом $\sqrt{2}$ и центрами в точках $(0;0)$ и $(1;1)$. Обозначим область пересечения за N. Теперь посмотрим на первое неравенство $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \le \sqrt{2}$. Это означает, что $(x;y)$ лежат в окружности с центром (a,b) и радиусом $\sqrt{2}$.
Получается, что условие исходной задачи можно переформулировать так: надо найти площадь объединения кругов с радиусом $\sqrt{2}$ и центром в области N. Обозначим точку $(0;0)$ как A, а точку $(1;1)$ как B. Пусть точки пересечения окружностей с радиусом $\sqrt{2}$ и центрами в

21102040 (U814933 M1302614)

этих точках будут C и D.

Продолжение на листе 5

4

Чистовик · Вариант №17 Математика 11кл.

Ясно, что окружность с центром в A проходит через точку B, а окружность с центром в B проходит через точку A, так как между ними расстояние $\sqrt{2}$.
Получается следующий рисунок:

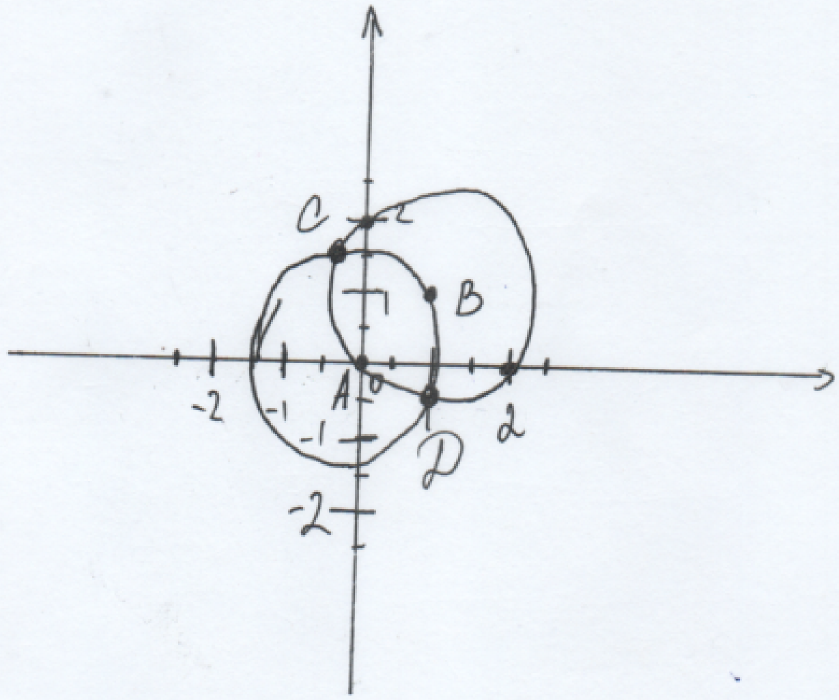


Рисунок симметричен относительно прямой CD. Поэтому достаточно посчитать площадь фигуры M в пересечении с одной из полуплоскостей, которая получается с помощью прямой CD, а дальше просто умножить ответ на 2. Далее будем считать площадь пересечения с полуплоскостью, которая содержит точку A.
Рассмотрим угол $\angle CBD$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > x+1 \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < x+17 \end{cases}$$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 - 1 > x \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 - 17 < x \end{cases}$$

$S = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 =$

$= 10a_1 + 45d$

$$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 - 17 < x < a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 - 1$$

$$5d^2 - 16 < 10a_1 + 45d - a_1^2 - 16a_1d - 55d^2 + 1 < 0$$

$$5d^2 - 16 < -a_1^2 - 16a_1d - 55d^2 + 10a_1 + 45d + 1 < 0$$

$$16 - 5d^2 > a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 - 10a_1 - 45d - 1 > 0$$

$$\cancel{a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 - 10a_1 - 45d - 1 > 0}$$

$$\cancel{a_1(a_1 - 10) + 5d(11d - 9) + 16a_1d - 1 > 0}$$

$$\cancel{a_1(16d + a_1 - 10) + 5d(11d - 9) - 1 > 0}$$

$$\cancel{a_1(a_{17} - 10)}$$

$$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 - 10a_1 - 45d - 1 < 16 - 5d^2$$

$$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 - 10a_1 - 45d - 17 < 0$$

$$a_1^2 + 60d^2 + 16a_1d - 10a_1 - 45d - 17 < 0$$

$$a_1(a_1 - 10) + 15d(4d - 3) + 16a_1d - 17 < 0$$

$$a_1^2 + 60d^2 + 16a_1d - 10a_1 - 45d - 17 < 0$$

$$\cancel{a_1(a_1 + 16d)} + \cancel{}$$

21102040 (U814933 M1302614)

$S_{n=10}$

$a_6 a_{12} > S+1$

$a_7 a_{11} < S+17$ $\quad a_1 - ?$

$$S_n = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5a_1 + 5a_{10}$$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > 5a_1 + 5a_{10} + 1 \\ a_7 a_{11} < 5a_1 + 5a_{10} + 17 \end{cases}$$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 5a_1 + 5a_1 + 45d + 1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 5a_1 + 5a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 11a_1d + 5a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 10a_1d + 6a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

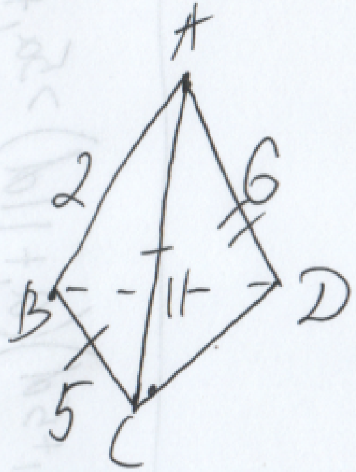
$10a_1 \cancel{+45d = x}$

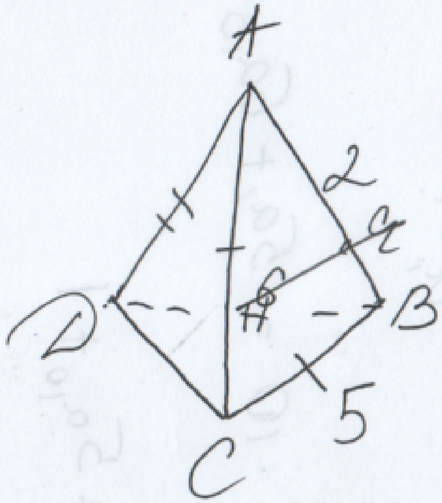
$$\boxed{S = 5(2a_1 + 9d)}$$

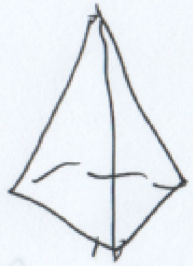
$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

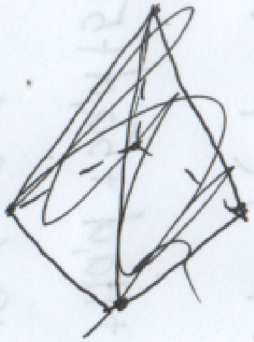
BCD
DCB
~~CDB~~

~~DBC~~
CDB
DBC
BCD









Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102040**

ID профиля: **814933**

Вариант 17

Чистовик Вариант №17 Математика 11кл.

№4

$a = 6a_1$

$b = 6b_1$

$c = 6c_1$

$НОД(a; b; c) = 6 \Rightarrow НОД(a_1; b_1; c_1) = 1$

$НОК(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \Rightarrow НОК(a_1; b_1; c_1) = 2^{14} \cdot 3^{15}$

Кол-во решений исходной системы совпадает с количеством решений системы

$$\begin{cases} НОД(a_1; b_1; c_1) = 1 & (1) \\ НОК(a_1; b_1; c_1) = 2^{14} \cdot 3^{15} & (2) \end{cases}$$

Из (1)-го ур-я следует, что либо одно из чисел $a_1; b_1; c_1$ $= 1$, либо два из них равны 1, либо одно число является степенью ~~в~~ числа 2, другое — степенью числа 3

1 случай:

$a_1 = 1$ $\begin{cases} НОД(1; b_1; c_1) = 1 \\ НОК(1; b_1; c_1) = 2^{14} \cdot 3^{15} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2^{14} \\ c_1 = 3^{15} \end{cases}$

Аналогично получим другие решение:

$(1; 2^{14}; 3^{15})$; $(1; 3^{15}; 2^{14})$; $(2^{14}; 1; 3^{15})$; $(2^{14}; 3^{15}; 1)$;

$(3^{15}; 1; 2^{14})$; $(3^{15}; 2^{14}; 1)$ — 6 решений

2 случай: Аналогично получим другие решения

$(1; 2^{14} \cdot 3^{15}; 1)$, $(2^{14} \cdot 3^{15}; 1; 1)$; $(1; 1; 2^{14} \cdot 3^{15})$ — всего три решения

1

3 случай:

$$\begin{cases} НОД(a_1; b_1; c_1) = 1 \\ НОК(a_1; b_1; c_1) = 2^{14} \cdot 3^{15} \end{cases}$$

$a_1 = 2$; $b_1 \in (3^1; 3^{15})$, $c_1 = 2^{14} \cdot 3^{15}$

Все решения ~~по~~ полученное перестановками a_1, b_1, c_1 – их 6

далее a_1 проходит все значение от 2^2 до 2^{14}.
Итак, решений будет:

$6 \cdot 14 \cdot 15 + 9 = 1269$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 15 \\ 14 \end{array} \\ \hline 60 \\ + 15 \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 210 \\ 6 \end{array} \\ \hline 1260 \end{array}$$

Ответ: 1269 троек решений.

Чистовик. Вариант № 17 Математика 11кл.

№5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$,

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$.

Решение:

обозначим:
$$\begin{cases}\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=a\\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=b\\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=c\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\log_{5x-1}(4x+1)=a\\ 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=b\\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=c\end{cases}$$

По формуле логарифмов $\log_x y\cdot\log_y z\cdot\log_y x=1$, находим, что:

$$abc=2\log_{5x-1}(4x+1)\cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=$$
$$=4$$

$abc=4$ Имеем три системы

1. $\begin{cases}a=b\\ a=c+1\\ b=c+1\\ abc=4\end{cases}$ или 2. $\begin{cases}b=c\\ b=a+1\\ c=a+1\\ abc=4\end{cases}$ или 3. $\begin{cases}a=c\\ b=a+1\\ c=a+1\\ abc=4\end{cases}$

Решим первую систему:

$\begin{cases}a=b\\ a=c+1\\ b=c+1\\ abc=4\end{cases} \Rightarrow (c+1)^2\cdot c=4 \Rightarrow c\left(c^2+2c+1\right)-4=0$

$c^3+2c^2+c-4=0$, $c=1$ – корень

$(c-1)\left(c^2+3c+4\right)=0$ $c=1$ или $c^2+3c+4=0$ (корней нет, $D<0$)

3

Продолжение на листе 4

Чистовик. Вариант №17 МАТЕМАТИКА 11кл.

Получим одну тройку $(a; b; c)$: $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$

Аналогично, решая две другие системы, найдем еще две тройки чисел

$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$

Вернемся к переменной x

$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ нет корней

$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=1 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{cases}$ $\longrightarrow$ нет корней.

$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1=5x-1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=4x+1 \\ 5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Проверка: $\left(\frac{2}{2}+2\right)^2=4\cdot 2+1$

$5\cdot 2-1=\left(\frac{2}{2}+2\right)^2$

Единственным значением x, удовлетворяющим ОДЗ, при котором два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1, это $x=2$

Ответ: $x=2$

4

№6 Чистовик. Вариант №17. Математика 11кл.

а) Лемма 1. Т. лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C.

Д-во: $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ как углы между радиусами и касательными (OA, AT и OC, CT). Тогда в четырехугольнике $ATCO$ сумма противоположных углов $\angle OAT + \angle OCT = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ все 4 вершины лежат на одной окружности.

Ч.т.Д.

Лемма 2. $\angle CBA = \angle CPT$

Д-во: $\angle CBA = \angle CAT$, так как угол между касательной AT и хордой AC (окр. ω) равен половине угла, на которую эта хорда опирается. $\angle CAT = \angle CPT$ как углы опирающиеся на одну дугу CT в окружности, описанной вокруг $ATCO$, $\angle CBA = \angle CAT$ и $\angle CAT = \angle CPT$, $\Rightarrow \angle CBA = \angle CPT$.

Ч.т.Д.

Лемма 3. $\dfrac{CK}{CA} = \dfrac{4}{10}$

Д-во: $S_{\Delta CPK} = 4$ и $S_{\Delta APK} = 6$ по условию.

Значит $S_{\Delta APC} = S_{\Delta CPK} + S_{\Delta APK} = 10$. С другой стороны $S_{\Delta CPK} = \frac{h}{2} \cdot CK$ и $S_{\Delta APC} = \frac{h}{2} \cdot CA$ по формуле площади треугольника, где h длина высоты, опущенной из P на AC. Но тогда $4 = \frac{h}{2} \cdot CK$ и $10 = \frac{h}{2} \cdot CA \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{CK}{CA} = \dfrac{4}{10}$ Ч.т.Д.

Из леммы 2 следует, что $\Delta ACB \sim \Delta KCP$ по общему углу C и равным углам $\angle KPC = \angle ABC$.

Но отношение площадей подобных треугольников равен квадрату отношение подобие. Из леммы 3 мы знаем, что $\frac{CK}{CA} = \frac{4}{10}$, то есть отношение подобие будет $\frac{4}{10}$

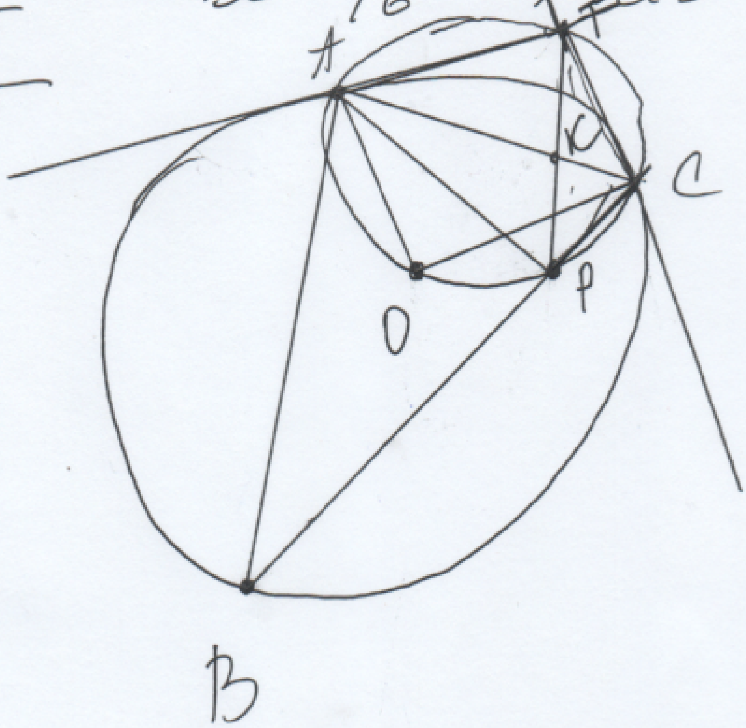
5

Чистовик. Вариант №17 Математика 11кл.

Тогда квадрат отношения подобия равен $\frac{16}{100}$.

Отсюда площадь $S_{\Delta ABC} = \frac{100}{16} \cdot 4 = 25$

а) Ответ: 25



21102040 (U814933 M1302615)

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$$2^{15}\cdot 3^{16} = 2^{15}\cdot 3^{15}\cdot 3 = 6^{15}\cdot 3$$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 \\ НОК(a;b;c) = 3\cdot 6^{15} \end{cases}$$

$$\frac{НОК(a;b;c)}{НОД(a;b;c)} = 3\cdot 6^{14}$$

$$НОК(a;b;c) = **\ldots *8$$

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^{2} = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1$$

$**6 \cdot **8 = **8$

$**2 \cdot **4 \ \cancel{**8}$

$**7 \cdot *4 = \cancel{**8}$

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1

$$\frac{\cancel{1}}{2\log_{(\frac{x}{2}+2)}^{4x+1}} = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1$$

$$\frac{1}{2\log_{(\frac{x}{2}+2)}^{4x+1}} = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1$$

21102040 (U814933 M1302615)

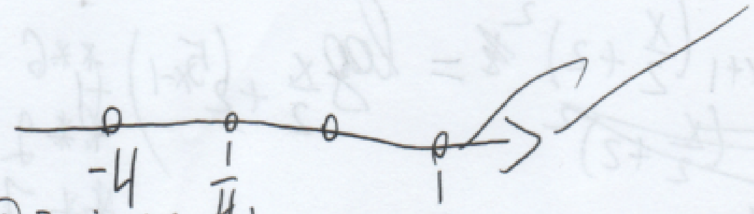
N5

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) + 1 = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$$\frac{1}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}} = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$\begin{cases} \cancel{\sqrt{5x-1} \neq 0} \quad 5x-1 \geq 0 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1 \neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x>-4 \end{cases}$$



ОДЗ: $x > \frac{1}{5}$

$$\frac{\log_{4x+1}4x+1}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}} - \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 0$$

$$\frac{\log_{4x+1}4x+1}{\log_{4x+1}(\sqrt{5x-1})\left(\frac{x}{2}+2\right)^2} = 0$$

$$1 = \left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) + \log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{x}{2}+2\right)\right) \cdot 2\log_{\frac{x}{2}+2} 4x+1$$

$$1 = \left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\left(\frac{x}{2}+2\right)\right) \cdot 2\log_{\frac{x}{2}+2} 4x+1$$

$$1 = \left(\log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{5x^2}{2} + 10x - \frac{x}{2} - 2\right)\right) \cdot \cancel{2}\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)^2$$

$$1 = \left(\log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{5x^2}{2} + \frac{19x}{2} - 2\right) \cdot\right) \log_{\frac{x}{2}}+2($$