Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101982**

ID профиля: **826560**

Вариант 17

Чистовик.

№1.

$S_n = n \cdot a_1 + \frac{b \cdot n \cdot (n-1)}{2}$ $\quad a_n = a_1 + b(n-1)$

$a_6 \cdot a_{12} > S_{10}+1 \Rightarrow (a_1+5b)(a_1+11b) > 10a_1 + 45b + 1$

$a_7 \cdot a_{11} < S_{10}+17 \Rightarrow (a_1+6b)(a_1+10b) < 10a_1 + 45b + 17.$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + 16ba_1 + 55b^2 > 10a_1 + 45b + 1$

$+ \; a_1^2 + 16ba_1 + 60b^2 < 10a_1 + 45b + 17$

$\cancel{5b^2 \Rightarrow 2+b}$

$\cancel{a_1^2} + 16\cancel{b}a_1 + 60b^2 + 10\cancel{a_1} + 4\cancel{5b} + 1 < 10\cancel{a_1} + 4\cancel{5b} + 17 + \cancel{a_1^2} + 16\cancel{a_1b} \cancel{55b}$

$5b^2 < 16$

Т.к. $a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{Z}$, $a_1 < a_2 < a_3 \ldots \Rightarrow b \in \mathbb{N}$

$b^2 < 4 \Rightarrow b^2 = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \boxed{b = 1.} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62.$

$a^2 + 6a + 9 > 0 \Rightarrow (a+3)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -3$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \Rightarrow a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 > \sqrt{11} > 3 \Rightarrow$

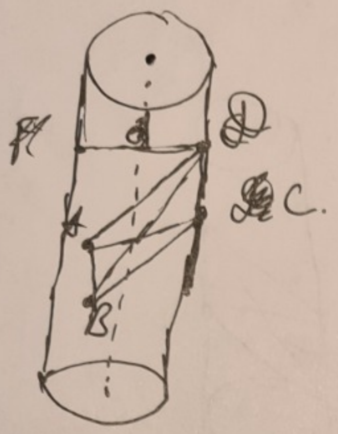
$a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: $-6, -5, -4, -2, -1, 0$.

Чистовик.

№2.

$d = 2R$.



Построим F | ~~$DF \perp$~~ $FD \perp CD$.

CDF - осевое сечение цилиндра

Пусть у точки D координаты $(0;0)$.

Ось $\vec{DC} = \vec{z}$. А осевое сечение через DC соотв. плоскости yz, тогда т.к. $AD = DB$, $AC = BB$, CD - общ =>

=> $DAC = BCD$.

Координата z, точки B складывается из DC и x_1, причём $DB^2 = (DC + x_1)^2 + (BC^2 - x_1^2)$

по т. пифагора

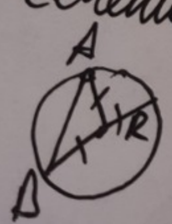
А координата z точки A складывается из DC и x_2, причём $DA^2 = (DC + x_2)^2 + (AC^2 - x_2^2)$

по т. Пифагора.

Т.к. $DA = DB$ $BC = AC$ => $x_1 = x_2$ =>

=> Координаты z у A и B равны =>

=> $AB \parallel$ основанию цилинда. Тогда проведем сечение через AB параллельное основанию:



→ отсюда видно, что $2R \geq AB$ =>

=> т.к. R минимальный!

$2R = AB$ => $R = 1$.

Чистовик

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2. \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;\ 2) \end{cases}$$ – круг с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

Рассмотрим какие значения могут принимать a и b:

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b;\ 2)$

$2a+2b=2$ – граница; $b=1-a$.

Пусть $2a+2b \le 2$, тогда

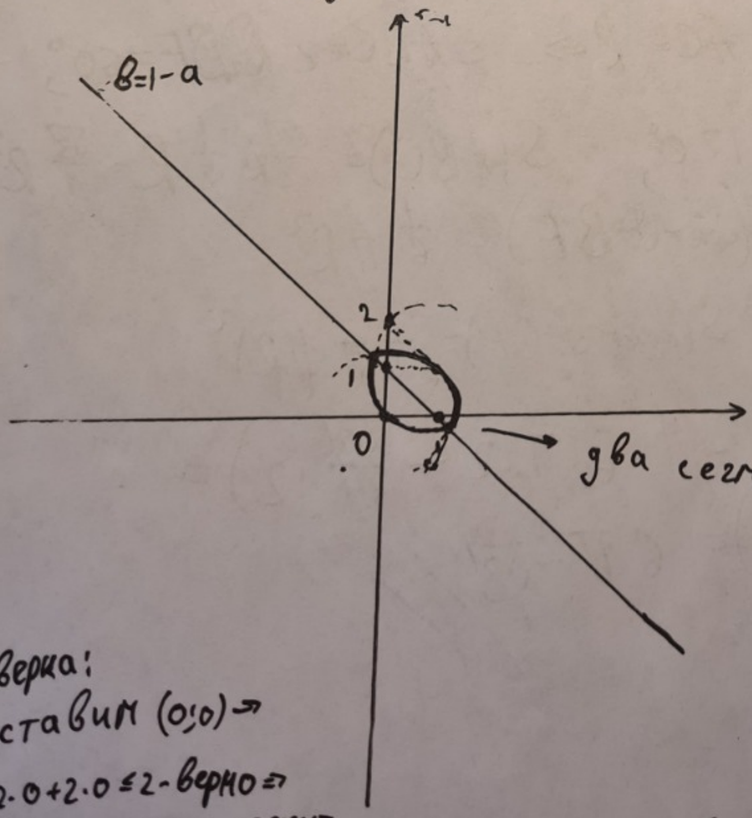
$a^2+b^2 \le 2a+2b \quad | \pm 2.$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 2.$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2.$ – круг с центром в $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$

Пусть $2a+2b>2$, тогда:

$a^2+b^2 \le 2$ – круг с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$.



→ два сегмента круга – это все значения (a,b) ⇒

⇒ ~~т.к. (x;y) (x;y) принадлежат кругам, построенным с центрами в данных точках:~~

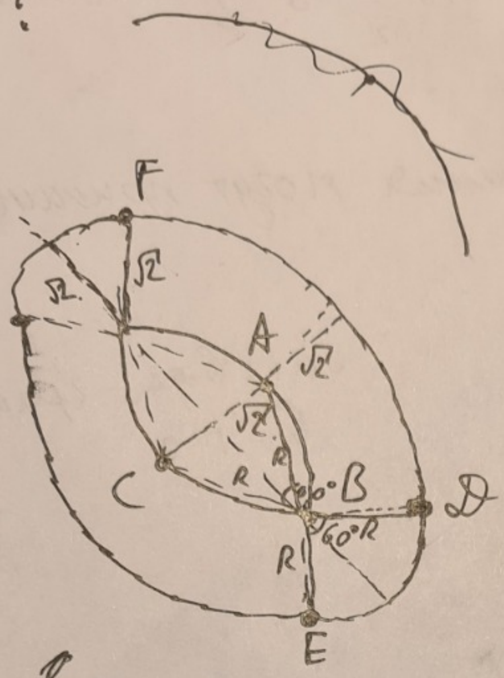
М – это два сегмента кругов с радиусом $2\sqrt{2}$.

Проверка:
Подставим $(0;0)$ →
→ $2\cdot 0+2\cdot 0 \le 2$ – верно ⇒
центр не принадлежит.

чистовик.

№3 (продолжение).

M:



Т.к. все точки M должен быть удалены от фигуры АВ не более чем на $\sqrt{2}$.

$$S(M) = 2\cdot S(\text{сект. } DBE) + 2\cdot S(\text{сект. } FCD) - 2\cdot S(ABC)$$

Т.к. $AB = BC = AC = R \Rightarrow \angle ABC = \angle DBE = 60^\circ$;

$\angle BCF = 120^\circ$, $S(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot\frac{1}{2}R = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

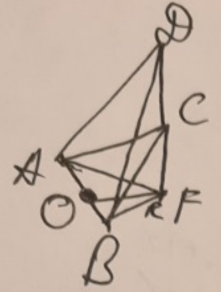
$\angle DBE = 60^\circ \Rightarrow S(\text{сект } DBE) = \frac{1}{6}\pi R^2$

$\angle BCF = 120^\circ \Rightarrow S(\text{сект. } DCF) = \frac{1}{3}\pi\cdot(2R)^2$

$$S(M) = 2\left(\frac{4}{3}\pi\cdot 2 + \frac{1}{6}\pi\cdot 2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\right) = 2\cdot\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\pi - \sqrt{3}$$ //

чистовик

№2 (продолжение).

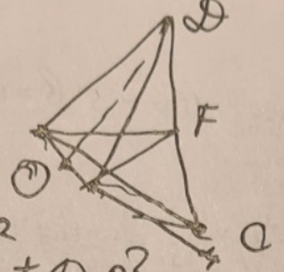


O → центр AB и сечения.

FO = 1 т.к. FO = R. FO ⊥ CD (т.к. сечение)

$CD = \sqrt{DO^2 - FO^2} \pm \sqrt{CO^2 - FO^2}$ ∨

∨ $CD = \sqrt{DO^2 - FO^2} + \sqrt{CO^2 - FO^2}$



$DO^2 = -\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + DB^2 = -1 + 36 = \cancel{37}\,35.$

$CO^2 = -\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + CB^2 = 25 - 1 = 24.$

⇒

т.к. ABD и ACB — равнобедр ⇒

⇒ т.к. O - середина:

$DO \perp AB$

$CO \perp AB$.

$\Rightarrow CD = \sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

черновик

№1.

$S_n = a_1 \cdot n + \frac{b \cdot n \cdot (n-1)}{2}$, при $a_n = a_{n-1} + b$

$a_1 \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{N}$

$a_6 \cdot a_{12} > S_{10} + 1$

$a_7 \cdot a_{11} < S_{10} + 17.$

$\left.\begin{array}{l} a_7 = a_6 + b \\ a_{11} = a_{12} - b \end{array}\right| \Rightarrow a_7 \cdot a_{11} = a_6 \cdot a_{12} + b a_{12} - b a_6 - b^2 < S_{10} + 17.$

$\cancel{S_{10}} + 1 + b(a_{12} - a_6) - b^2 < \cancel{S_{10}} + 17$

$b^2 - b(a_{12} - a_6) + 16 > 0$

$a_n = a_1 + b(n-1) \Rightarrow a_{12} - a_6 = 11b - 5b = 6b$

$b^2 - 6b^2 + 16 > 0.$

$5b^2 < 16$

$b \in \mathbb{N} \Rightarrow b^2 < 4$ $b^2 = \{3, 2, 1\} \Rightarrow b = 1. \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{10} = 10a_1 + 45$

$10a_1 + 46 < (a_1 + 5)(a_1 + 11) = a_1^2 + 16a + 55$

$10a_1 + 62 > (a_1 + 6)(a_1 + 10) = a_1^2 + 16a + 60$

$a_1^2 + 6a + 9 > 0.$ – всегда, при $a \neq -3$

$a_1^2 + 6a - 2 < 0.$ $a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}.$

36

< 3852

35

-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$a_6 = 4$

-15.

-7. -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 12

60+45. -25.

-5 > -14.

21

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

$-30 + 45 = \boxed{15}$ 55.

55 > 46

0 → 45. 16.

5·11 6·10 60 < 62.

Черновик

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2. \\ a^2+b^2 = \min(2a+2b, 2). \end{cases}$$

→ круг ~~с центром (a;b)~~ ~~и радиусом $\sqrt{2}$~~

$2a+2b \le 2 \Rightarrow$ граница $b = 1-a$.

(1;1) - не подходит

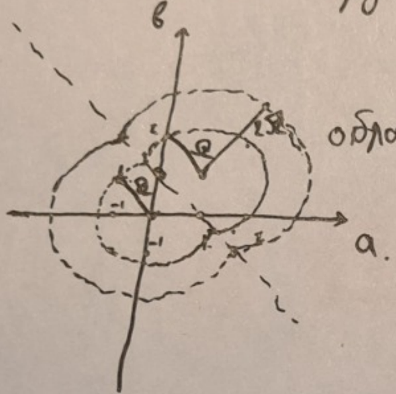
Пусть $2a+2b \le 2$, тогда:

$a^2+b^2 \le 2a+2b \Rightarrow a^2-2a+1+b^2-2b+1-2 \le 0.$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2. \Rightarrow$ ~~верно для~~ круг с центром (1;1) в координатах $a;b$. и радиусом $\sqrt{2}$.

$2a+2b > 2 \Rightarrow$

$a^2+b^2 \le 2$ - круг с центров в (0;0)

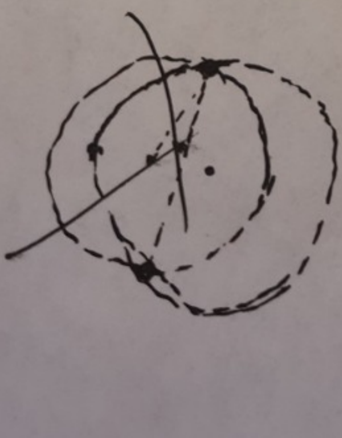


область удовлетворяющих a b

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \Leftrightarrow (a-x)^2+(b-y)^2 \le 2$ это круг с центром (x;y) и радиусом $\sqrt{2}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x;y это такая фигура ⊙⊙ → объединение двух кругов с радиусом $2\sqrt{2}$ и расстоянием между центрами $\sqrt{2} \Rightarrow$

$S = \pi R^2 + \pi R^2 - 2.$



21101982 (U826560 M1300545)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101982**

ID профиля: **826560**

Вариант 17

№4.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=6 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

Т.к. $\text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \Rightarrow$ вид этих чисел $2^x\cdot 3^y$

заметим, что $x, y > 0$ т.к. $\text{НОД}(a;b;c)=6$.

Также хотя бы у одного числа $x=1$ и $y=1$ тоже хотя бы у одного т.к. $6=2^1\cdot 3^1 \Rightarrow$ если у всех

$x>1 \Rightarrow \text{НОД}(a;b;c) \geq 2^{2}\cdot 3^1$ – противоречие

Также т.к. все числа состоят из двоек и троек найдётся хотя бы одно число со степенью тройки 16, т.к. иначе $\text{НОК}(a;b;c) \neq 2^{15}\cdot 3^{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ У нас ~~пары~~ наборы степеней таковы:

2 : $(1; 1\text{-}15; 15)$ выбрать два числа со степенью 1 и 15 $\rightarrow C_3^2$ вариантов и на каждый из них 15 вариантов оставшегося

3 : $(1; 1\text{-}16; 16)$ – аналогично.

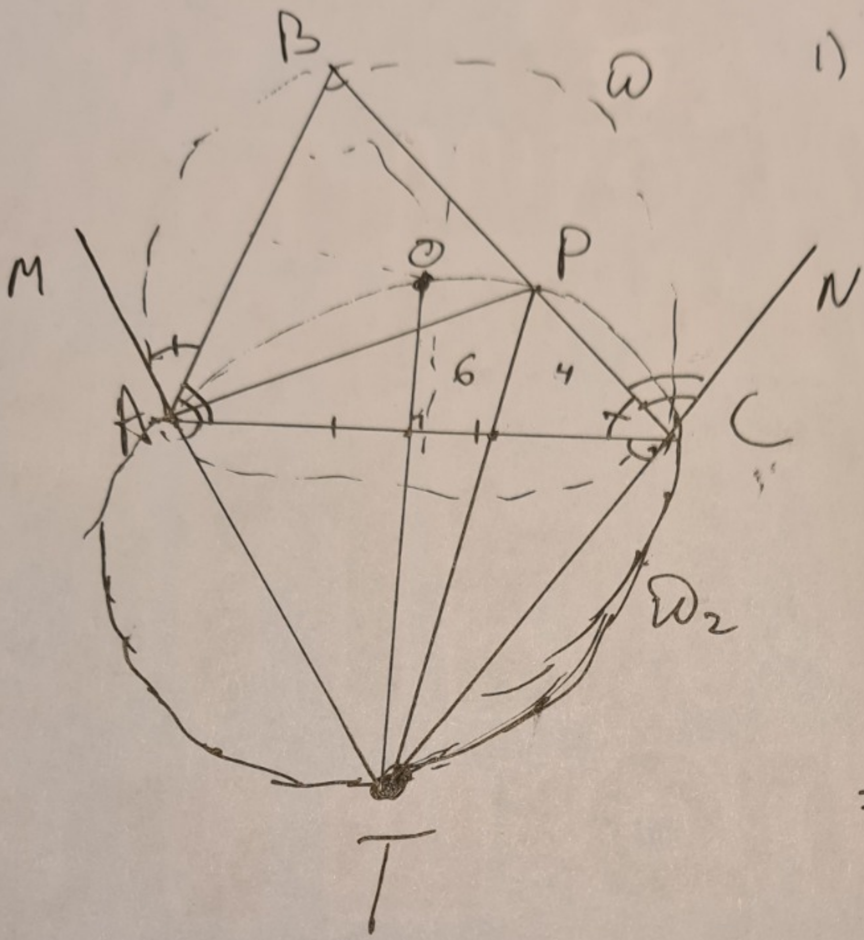
варианты независимы $\Rightarrow$ перемножаем

$$C_3^2\cdot 15\cdot C_3^2\cdot 16 = 3\cdot 3\cdot 15\cdot 16 = 30\cdot 72 = \underline{2160}$$

Ответ: 2160.

21101982 (U826560 M1300546)

№5.



1) $\angle AOC = \overset{\smile}{AC} = 2\angle B$

$\cancel{\angle ATC =}$

$\angle BCN = \angle BAC$

угол между

хордой и кас.

$\angle BAM = \angle BCA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATC = 180^\circ -$

$-\underbrace{(180^\circ - \angle BCA - \angle BAC)}_{=\angle B} -$

$-(180^\circ - \angle BCN - \angle BCA)$

$\angle B$

$\angle ATC = 180^\circ - 2\angle B$

$\angle ATC + \angle AOC = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow T \in \omega_2$

21101982 (U826560 M1300546)

№ 5.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ $\quad \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $\quad \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$a = 4x+1 \quad b = \frac{x}{2}+2 \quad c = 5x-1$, тогда

$2\log_c a \quad 2\log_a b \quad \log_b c.$

1) Пусть $2\log_c a = \log_b c = 2\log_a b + 1$, тогда:

$2\log_c a \cdot \frac{1}{\log_c b} = (2\log_a b+1)^2$

$2\log_b a = (2\log_a b+1)^2$

$\log_b a = x_1$

$2x_1 = \frac{4}{x_1^2} + \frac{4}{x_1} + 1.$ замена

$2x_1^3 - x_1^2 - 4x_1 - 4 = 0.$

Заметим, что 2 – это корень ⇒

⇒ $(x_1-2)(2x_1^2+3x_1+2).$

$D<0$ ⇒ 2 – единственный корень ⇒

⇒ $\log_b a = 2$ $\quad \log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1) = 2$ ⇒

⇒ $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 4x+1$ ⇒ $\frac{x^2}{4}+2x+4 = 4x+1$

$\frac{x^2}{4} - 2x + 3 = 0.$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$\boxed{x = 2 \vee 6}$ ← в одз вход[ят]

2) $2\log_a b = \log_b c = 2\log_c a + 1.$

$2\log_a c = (2\log_c a+1)^2$

то же ур-е ⇒ $\log_a c = 2$

$(4x+1)^2 = 5x-1.$

$16x^2+8x+1 = 5x-$[...]

$16x^2+3x+2.$ [...]

$\cancel{\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x-1}$

$\cancel{\frac{x^2}{4}+2x+4 = 5x-1.}$

$\cancel{x^2 - 12x + 20 = 0.}$

$\cancel{\boxed{x=2 \vee 10}}$

3) $2\log_a b = 2\log_c a = \log_b c + 1.$

$4\log_c b = (\log_b c+1)^2$

$4y = \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} + 1$

$4y^3 - y^2 - 2y - 1 = 0$ 1-корень $\quad (y-1)(4y^2+3y+1)$, $D<0$. ⇒ $\log_{5x-1}(4x+1) = 1$, $5x-1 = 4x+1$ $\quad x = 2$

Ответ: 2; [...]