Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101906**

ID профиля: **338774**

Вариант 17

Чистовик

№1. $S = \frac{10(a_1+a_1+9d)}{2} = 5(2a_1+9d) = 10a_1+45d$

$a_6a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2+16a_1d+55d$

$a_7a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2+16a_1d+60d$

$$+\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d > 10a_1+45d+1 \\ 10a_1+45d+17 > a_1^2+16a_1d+\cancel{88}60d \end{cases}$$

$55d+17 > 1+60d$

$5d < 16$

$d \le 3 \Rightarrow d \in \{1;2;3\}$ — т.к. d - целое

Рассмотрим все возможные варианты d:

$d=1:$ $\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+45+1 \\ 10a_1+45+17 > a_1^2+16a_1+60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9 > 0 \Rightarrow a \ne -3 \\ a_1^2+6a_1-2 < 0 \end{cases}$ $a_1^2+6a_1-2=0$ $D=36+8=44$ $a_1=\frac{-6\pm2\sqrt{11}}{2}=-3\pm\sqrt{11}$

т.к. $\sqrt{11}\in(3;4) \Rightarrow a_1\in[-6;0] \Rightarrow a_1\in\{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$

$d=2:$ $\begin{cases} a_1^2+32a_1+110 > 10a_1+90+1 \\ 10a_1+90+17 > a_1^2+32a_1+120 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+22a_1+19 > 0 \\ a_1^2+22a_1+13 < 0 \end{cases}$ $\varnothing$

$a_1^2+22a_1+19=0:$ $D=22^2-4\cdot19=4(121-19)=4\cdot102$ $a_1=\frac{-22\pm2\sqrt{102}}{2}=-11\pm\sqrt{102}$

т.к. $\sqrt{102}\in(10;11) \Rightarrow$ $a_1\in(-\infty;-22]\cup[0;+\infty)$

$a_1^2+22a_1+13<0$ $D=22^2-4\cdot13=4(121-13)=4\cdot108$ $a_1=\frac{-22\pm2\sqrt{108}}{2}=-11\pm\sqrt{108}$

т.к. $\sqrt{108}\in(10;11) \Rightarrow a_1\in[-21;-1]$ $\Rightarrow$ при $d=2$ $\varnothing$

см. на след. листе

Чистовик №2 - продолжение

$d=3$: $\begin{cases} a_1^2+48a_1+165>10a_1+135+1 \\ 10a_1+135+17>a_1^2+48a_1+180 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+38a_1+29>0 \\ a_1^2+38a+28<0 \end{cases}$

$a_1^2+38a_1+29=0: D=38^2-4\cdot29=4(361-29)=4\cdot332 \quad a_1=\frac{-38\pm2\sqrt{332}}{2}=-19\pm\sqrt{332}$

т.к. $\sqrt{332}\in(18;19) \Rightarrow a_1\in(-\infty;-38]\cup[0;+\infty)$

$a_1^2+38a_1+28=0: D=38^2-4\cdot28=4(361-28)=4\cdot333 \quad a_1=\frac{-38\pm2\sqrt{333}}{2}=-19\pm\sqrt{333}$

т.к. $\sqrt{333}\in(18;19) \Rightarrow a_1\in[-37;-1] \Rightarrow$ при $d=3$ $\varnothing$

Ответ: $a_1\in\{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$.

№3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le2 \\ a^2+b^2\le\min(2a+2b,2) \end{cases}$

$a^2+b^2\le\min(2a+2b,2)$

при $2a+2b\le2 \Rightarrow a+b\le1 \Rightarrow b\le1-a$:

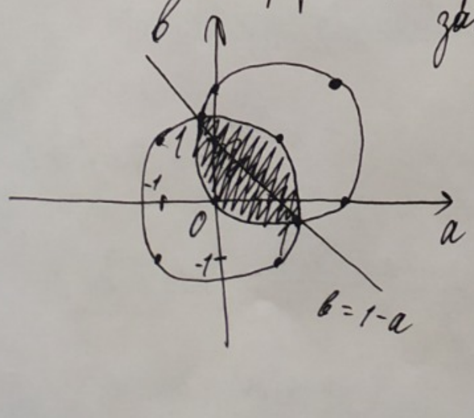
$a^2+b^2\le2a+2b$

$(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\le2$

$(a-1)^2+(b-1)^2\le2$ - круг с центром $(1;1)$ и $r=\sqrt2$

при $2a+2b>2 \Rightarrow b>1-a$:

$a^2+b^2\le2$ - круг с центром $(0;0)$ и $r=\sqrt2$



заштрихованная область подходит нам т.к. в функции нет деления $\Rightarrow$ её графики непрерывны $\Rightarrow$ граница разделения ($b=1-a$) проходит через их точки пересечения $\Rightarrow$ подходящая область - пересечение кругов

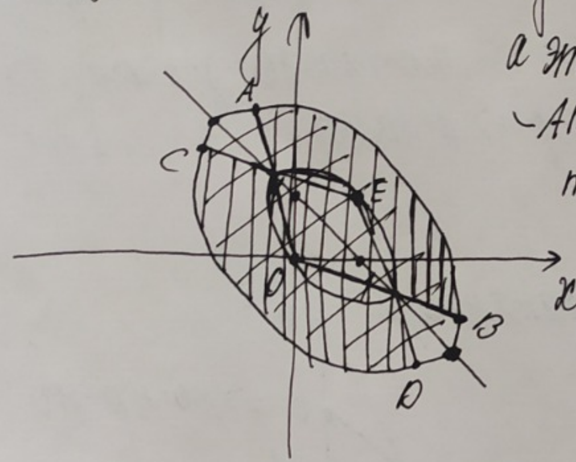
см. на след. листе

Чистовик №3 - продолжение

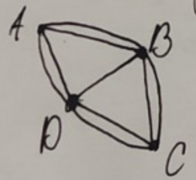
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ - круг с центром $(a;b)$ и $r=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ все подходящие $(a;b)$ - все подходящие $(x_0;y_0)$, тогда в Oxy подходить будут все точки, принадлежащие пересечению кругов, или лежащие ~~во~~ от него не больше, чем на $\sqrt{2}$.

нарисуем:



подходит заштрихованная область а это — ~~пересечение кругов с радиусами R=~~ $\smile AB$ и $\smile CD$ - дуги окружности $R=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ тех же угловых размеров, что и дуги меньших окружностей, чтобы найти этот угол нарисуем меньшие окружности



$AB=BC=CD=AD=r=\sqrt{2}$

$DB=\sqrt{2}$, т.к. $d((0;0),(1;1))=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \angle ADB=\angle ABD=\angle DBC=\angle CDB=60^\circ$

$\Rightarrow \angle ADC=\angle ABC=120^\circ$

$S_{ADBC}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$S_{\text{сектора } AOB}=\frac{120^\circ}{360^\circ}\cdot\pi R^2=\frac{8}{3}\pi$

$S_{\text{сектора } CEB}=\frac{120^\circ}{360^\circ}\cdot\pi R^2=\frac{8}{3}\pi$

$S_{\text{их пересеч.}}=\frac{8}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi-\frac{2}{2}\sqrt{3}=\frac{16}{3}\pi-\sqrt{3}$

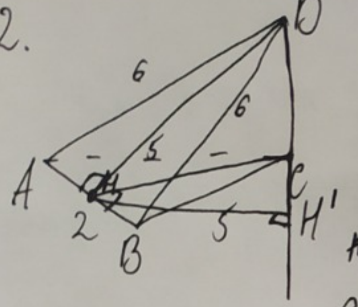
В свою очередь $\smile AC$ и $\smile BD$ - дуги окр. с $r=\sqrt{2}$ (т.к. находятся на расстоянии $\sqrt{2}$ от точки пересечения окр.) $\Rightarrow$ ~~их S~~ их суммарный угловой размер равен $360^\circ-120^\circ-120^\circ=120^\circ \Rightarrow$ их суммарная площадь $S=\frac{120^\circ}{360^\circ}\pi r^2=\frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow$ площадь всей области $S=\frac{16}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}=\frac{18}{3}\pi-\sqrt{3}=6\pi-\sqrt{3}$

Ответ: $S_M=6\pi-\sqrt{3}$.

Чистовик

№2.



т.к. $AD = BD$ и $AC = BC \Rightarrow DH$ - высота в $\triangle ABD$ и CH - высота в $\triangle ABC$

$DH = \sqrt{35}$

$HC = \sqrt{24}$

~~т.к.~~ Пусть OO' - ось цилиндра, тогда $CD \parallel OO'$, т.к. $HD \perp AB$, $HC \perp AB \Rightarrow$ по Т о трёх перпендикулярах $CD \perp AB \Rightarrow AB \perp OO' \Rightarrow r$ - min при AB - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow r = 1$ и AB - диаметр $\Rightarrow d(AB, CD) = r = 1$ и $H \in OO'$

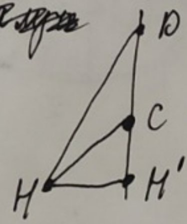
проведём $HH' \perp CD$

I)

$H'C = \sqrt{HC^2 - HH'^2} = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$

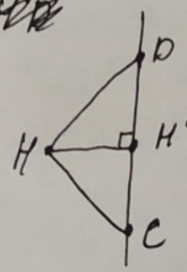
$H'D = \sqrt{HD^2 - HH'^2} = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

$CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$



$\Rightarrow CD = H'D - H'C$

II



$\Rightarrow CD = H'D + H'C \Rightarrow CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $CD = \sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101906**

ID профиля: **338774**

Вариант 17

Чистовик

ОДЗ:

$x > \frac{1}{5}$

$x \neq \frac{2}{5}$

№5. $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1) = C1$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = C2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = C3$

Если $\log_{5x-1}(4x+1) = 0$

$4x+1 = 1$

$x = 0$ – не подходит по ОДЗ

Если $\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 0$

$\frac{x}{2}+2 = 1$

$x = -2$ – не подходит по ОДЗ.

Если $\log_{5x-1}(4x+1) = 1 \Rightarrow C1 = 2$

$5x-1 = 4x+1$

$x = 2$

$C2 = 2\log_9(3) = 1$

$C3 = \log_3(9) = 2 \Rightarrow x = 2$ - подходит

Если $\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 1 \Rightarrow C1 = 2$

$5x-1 = \frac{x}{2}+2$

$10x-2 = x+4$

$x = \frac{2}{3}$

$C2 = 2\log_{\frac{8}{3}+1}\left(\frac{1}{3}+2\right) = 2\log_{\frac{11}{3}}\left(\frac{7}{3}\right) \neq 3,\ \neq 1,\ \neq 2 \Rightarrow$ не подходит

Иначе пусть $\log_{5x-1}(4x+1) = a$, $\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = b$, $a, b \neq 0$, $a, b \neq 1$

$C1 = 2a$

$C2 = \frac{2b}{a}$ - по формуле перехода к новому основанию

$C3 = \frac{1}{b}$

см. на след. листе

Чистовик №2 продолжение

Рассмотрим все случаи равенства C1, C2 и C3:

I) $C1=C2 \Rightarrow 2a=\frac{2b}{a} \quad b=a^2$

$C3=C1-1 \Rightarrow 2a-1=\frac{1}{b} \Rightarrow b=\frac{1}{2a-1}$

$2a-1\neq0$ т.к. $\frac{1}{b}\neq0$

$\Rightarrow a^2=\frac{1}{2a-1}$

$2a^3-a^2-1=0$

$(a-1)(\underbrace{2a^2+2a+1}_{\text{нет корней}})=0$

$\Rightarrow a=1$, но $a\neq1$ по условию замены $\Rightarrow \varnothing$

II) $C1=C3 \Rightarrow 2a=\frac{1}{b} \quad b=\frac{1}{2a}$

$C2=C1-1 \Rightarrow \frac{2b}{a}=2a-1 \quad b=a^2-\frac{a}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2a}=a^2-\frac{a}{2}$

$2a^3-a^2-1=0$

$(a-1)(2a^2+2a+1)=0$ аналогично (I) $\varnothing$

III $C2=C3 \Rightarrow \frac{2b}{a}=\frac{1}{b} \quad a=2b^2$

$C1=C3-1 \Rightarrow 2a=\frac{1}{b}-1 \quad a=\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2b^2=\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}$

$4b^2=\frac{1}{b}-1$

$\frac{1-b-4b^3}{b}=0$

$4b^3+b-1=0$

$(2b-1)(\underbrace{2b^2+2b+2}_{\text{нет корней}})=0$

$\Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

подставим $a=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{1}{2}$: $\begin{cases}\log_{5x-1}(4x+1)=\frac{1}{2}\\ \log_{5x-1}(\frac{x}{2}+2)=\frac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}5x-1=(4x+1)^2\\ 5x-1=(\frac{x}{2}+2)^2\end{cases}$

$\begin{cases}5x-1=16x^2+8x+1\\ 20x-4=x^2+8x+16\end{cases}$ $\begin{cases}16x^2+3x+2=0\\ x^2-12x+20=0\end{cases}$ $D<0 \Rightarrow$ корней нет $\Rightarrow \varnothing \Rightarrow$ единственный подходящий $x=2$

$\boxed{\text{Ответ: } x=2.}$

Чистовик

№4. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$

Пусть $a=2^{a1}\cdot 3^{a2}$, $b=2^{b1}\cdot 3^{b2}$, $c=2^{c1}\cdot 3^{c2}$ – множителей кроме 2 и 3 нет, т.к. иначе они были бы и в НОКе; перепишем систему:

~~min(a1,a2~~

$$\begin{cases} \min(a1,b1,c1)=1 \\ \max(a1,b1,c1)=15 \\ \min(a2,b2,c2)=1 \\ \max(a2,b2,c2)=16 \end{cases}$$

тогда всё количество = (количество вар. выбрать (a1, b1, c1)) · (количество вариантов выбрать (a2, b2, c2)). ~~[illegible]~~

Пусть среди a1, b1, c1 нет равных, тогда $k = 3\cdot 2\cdot 13$

(3 – число способов выбрать 1; 2 – число способов выбрать 15; 13 – варианты для оставшегося числа)

если есть две 1, тогда $k=3$

если есть две 15, тогда $k=3$

$k_{1общ.} = 6\cdot 13+3+3=6\cdot 14$

аналогично если a2, b2, c2 различные $k=3\cdot 2\cdot 14$

если есть две 1, $k=3$

если есть две 16, $k=3$

$k_{2общ.} = 6\cdot 14+3+3=6\cdot 15$

$k = k_{1общ.}\cdot k_{2общ.} = 6\cdot 14\cdot 6\cdot 15 = 7560$

Ответ: $6\cdot 14\cdot 6\cdot 15 = 7560$