Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101904**

ID профиля: **88893**

Вариант 17

№1.

d - ~~знач~~ шаг прогрессии т.к. ~~вс~~ прогрессия целая, то d - целое, $d>0$

$S = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \ldots + a_1 + 9d = 10a_1 + 45d$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_7 a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) < S + 17 = 10a_1 + 45d + 17. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(a_1+5d)(a_1+11d) + 10a_1 + 45d + 17 > (a_1+6d)(a_1+10d) + 10a_1 + 45d + 1$$

$$16 > 5d^2$$

$$d < \sqrt{\frac{16}{5}} < 2 \Rightarrow d = 1.$$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1 + 46 \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1 + 62 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \quad D = 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases}$$ т.к. a_1 - целое, то $a_1 \in \{-6,-5,-4,-2,-1,0\}$

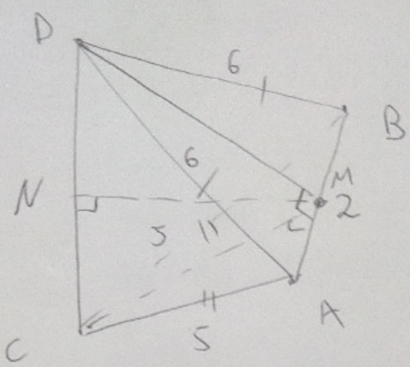
$-3-\sqrt{11} > -7$

$-3+\sqrt{11} < 1$

Для любых $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$ и $d=1$ условие верно.

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$

№2. Чистовик 17 вар М11



M-середина AB
$DM \perp AB, CM \perp AB$, т.к. DM-высота и медиана для $\triangle ABD, \triangle ABC$.

Т.к. $AB \perp DM$, $AB \perp CM \Rightarrow AB \perp CMD \Rightarrow CD \perp AB$

Заметим, что основание ~~цил~~ цилиндра $\perp CD$.
И т.к. $CD \perp AB$, то AB параллельно основанию цилиндра.
~~Значит~~, если возьмем сечение цилиндра, проходящее через AB параллельное основанию. Т.к. ~~AB~~ это окр-ть и AB в нем хорда, то т.к. $D_у \geq AB$, то минимальный диаметр равен AB, т.е минимальный радиус равен $\frac{AB}{2} = 1$.
В таком цилиндре AB- диаметр.
Опустим из M перпендикуляр на DC: MN
~~Сечение ABN~~ Заметим, что т.к. AB-диаметр, а M-его середина, то M лежит на оси ~~цил~~ цилиндра. Т.к. CD-параллельно оси, то $\rho(M, CD)$ = радиусу цилиндра. $\Rightarrow MN = r = 1$.

по т. пифагора: $DM^2 = DB^2 - BM^2 = 35$, $DN = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$.

$CM^2 = AC^2 - BM^2 = 24$, $CN = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$.

Значит, если N- между C и D, то $CD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$.
если N- вне отрезка CD, то $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{23} + \sqrt{34}$

$\sqrt{34} - \sqrt{23}$.

21101904 (U88893 M1300091)

Чистовик 17 вар М11

№3.

Найдем мн-во точек a,b.

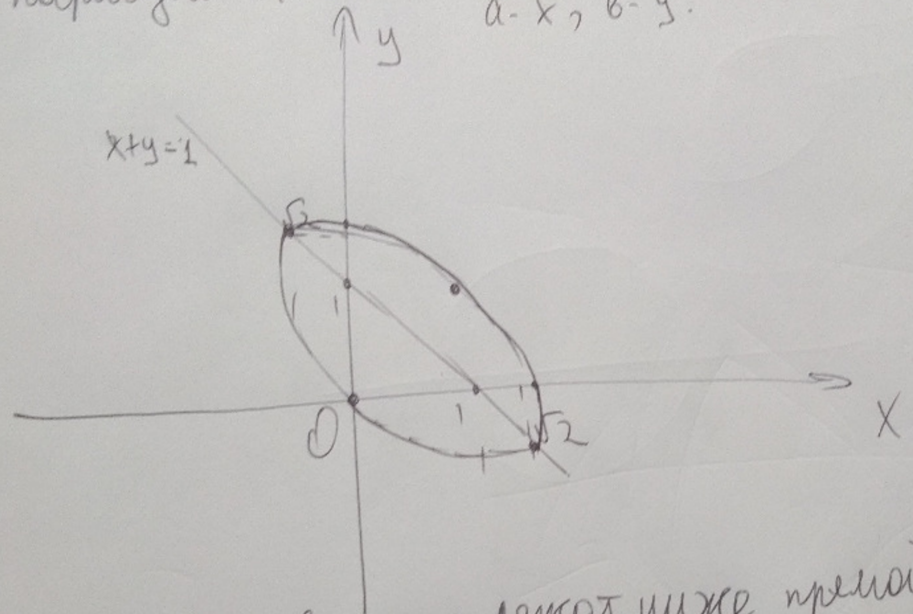
если $2a+2b \le 2$, то $a+b \le 1$, то $a^2+b^2 \le 2a+2b$

$(a-1)(b-1)^2 \le 2$

если $2a+2b \ge 2$, то $a+b \ge 1$, то $a^2+b^2 \le 2$

нарисуем ~~их~~ мн-во точек a,b на ~~оси~~ Oxy.

a-x, b-y.



при $a+b \le 1$ все точки лежат ниже прямой внутри ~~окр-ти~~ круга с центром в (1;1) и радиусом $\sqrt{2}$. (заметим, что окр-ть проходит т/з O).

найдем пересечение этой окр-ти с $x+y=1$ $\begin{cases} x+y=1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=2 \end{cases}$

$x=1-y$: $y^2+(y-1)^2=2$ $\quad 2y^2-2y-1=0$

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ x=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{cases}$.

при $a+b \ge 1$ все точки лежат выше прямой внутри круга с центром в (0;0) и радиусом $\sqrt{2}$. т.к. (1;1) и (0;0) симметричны относительно $x+y=1$, то точки пересечения с данной прямой такие же у второй окр-ти как и у первой.

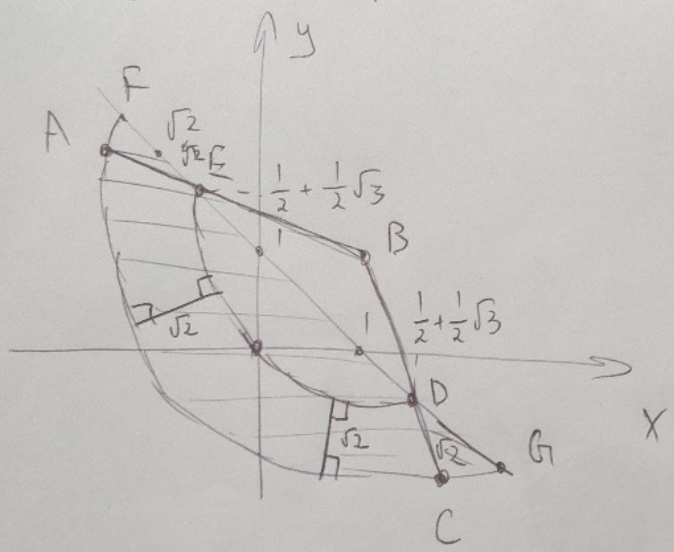
Это все возможные точки a и b. ~~а вдоль~~

первое нер-во — это круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в т. (a;b)

стр3

№3 продолжение. Чистовик 17 Вар М 11

Значит, мн-во точек $(x; y)$ - это мн-во точек, расстояние от которых до ~~и~~ какой-нибудь точки и фигуры точек $(a; b)$ не более, чем $\sqrt{2}$. Найдем площадь мн-ва этих точек. Очевидно, что фигура симметрична относительно $x+y=1$. Поэтому найдем только часть этой фигуры, лежащую ниже данной прямой. - закрашенная часть.



$S_{общ} = 2\cdot\left(S_{AEDC} + S^{сегмента}_{\cancel{сектора}\ ED} + S_{CDG} + S_{AEE}\right)$

~~$S_{ABC} = S_{сектора}$~~ $S_{AEDC} = S_{сектора\ ABC} - S_{\triangle BED}$.

где $r = 2\sqrt{2}$

~~$S_{AEE} = S$~~ S_A

стр 4.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101904**

ID профиля: **88893**

Вариант 17

Чистовик 17 Вар М11

№6.

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{7}{3} = \alpha$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{7}{3}}{1-\frac{49}{9}} = -\frac{21}{20} = \frac{\sin\alpha}{-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

Тогда: $\sin 2\alpha = \frac{21}{\sqrt{841}}$

$S_{\triangle CPA} = 6y^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha = 10$

$$y = \sqrt{\frac{10\cdot\sqrt{841}}{63}}$$

по т. косинусов: $25x^2 = 4y^2 + 9y^2 + 2\cdot 2y^2 \cdot 3 \cdot (-\cos 2\alpha) =$

$= y^2\left(13 + 12\cdot\frac{20}{\sqrt{841}}\right) = \cancel{\frac{10\cdot 29}{63}\left(10+\frac{240}{29}\right) = \frac{10\cdot 550}{63}}$

~~Ответ: $\frac{10\cdot 550}{63}$~~

$\cancel{AC\ 5x = \sqrt{\frac{10\cdot 550}{25\cdot 63}} = \sqrt{\frac{220}{63}}}$

$\cancel{AC = 5x = \sqrt{\frac{5500}{63}}}$

~~Ответ: $\sqrt{\frac{5500}{63}}$~~

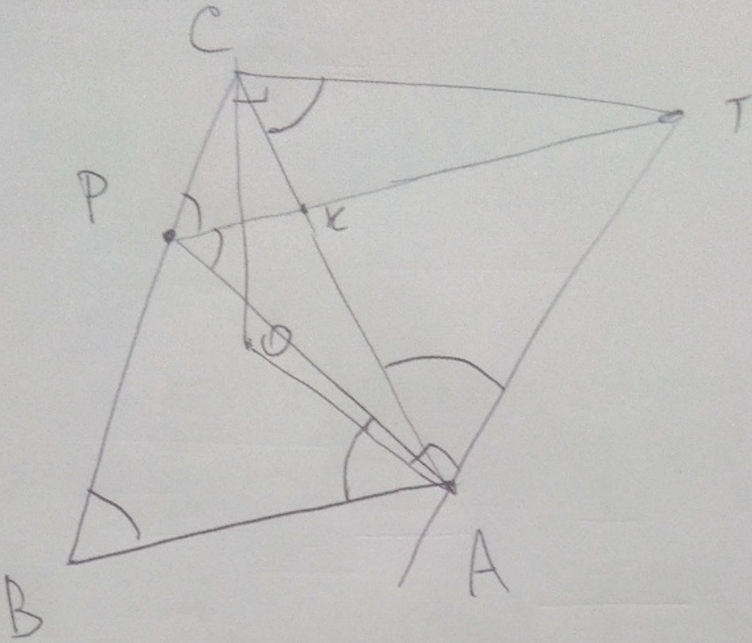
$$= \frac{10\cdot 29}{63}\left(13+\frac{240}{29}\right) = \frac{617\cdot 10}{63}$$

$$AC = 5x = \sqrt{\frac{617\cdot 10}{63}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{6170}{63}}$

6 стр.

№6.



$\angle OCT = \angle OAT = 90°$ $\angle OCT + \angle OAT = 180 \Rightarrow O, C, A, T$ лежат на одной окр-ти. На этой же окружности лежит точка P.

$\angle ACT = \angle CAT = \angle B$, т.к. CT и AT - касательные. $\angle CAT = \angle CPT = \angle ACT = \angle TPA$ ~~из~~ исходя из вписанности. Значит, PK - бисс-са $\angle CPA$.

$\angle CPA = 180$ $\angle PBA + \angle PAB = 2\angle PBA \Rightarrow \angle PAB = \angle PBA$

пусть $CK = 2x$. Т.к. у $\triangle CPK$ и $\triangle PKA$ общая высота из вершины C, то $\frac{S_{CPK}}{S_{PKA}} = \frac{CK}{KA} = \frac{2}{3} \Rightarrow KA = 3x$. Т.к. PK - бисс-са, то по теореме о биссектрисе: $\frac{PC}{PA} = \frac{CK}{KA}$ $PC = 2y \Rightarrow PA = 3y$.

Т.к. $\angle B = \angle PAB \Rightarrow BP = PA = 3y$. Тогда: $\frac{S_{PCK}}{S_{ABC}} = \frac{CP \cdot CK}{CB \cdot CA} = \frac{4}{25}$

$S_{ABC} = \frac{25}{4} \cdot 4 = 25.$

Ответ: 25.

5 стр

№5. Чистовик ~~ТМ~~ 17 вар М 11.

3 сл.

$n=k$ аналогично $n=k=2$.

$$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2$$

$$4x+1=\frac{x}{2}+2$$

$$3{,}5x=1 \quad x=\frac{1}{3{,}5}$$

$\log_{\frac{x}{2}+1}(5x-1)=\log_{\frac{8}{7}}\left(\frac{1{,}5}{3{,}5}\right)\neq 2$ - не уд.

Значит, $x=2$

Ответ: $x=2$.

4 стр

21101904 (U88893 M1300092)

т2. №5 Чистовик 17 вар М11

$\overset{m}{\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)}$, $\overset{n}{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}$, $\overset{k}{\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)}$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x>1 \\ 4x+1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$

Исходя из ОДЗ можем преобразовать наши логарифмы. Получаем:

$2\log_{5x-1}(4x+1), 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right), \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Заметим

Рассмотрим 3 случая

1. $\begin{cases} 2\log_{5x-1}(4x+1)=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \\ 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1+\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \end{cases}$

Заметим, что $2\log_{5x-1}4x+1\cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$

$=4\cdot\log_{4x+1}4x+1\cdot\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=4$, т.к

$\log_a b\cdot\log_c d=\log_c b\cdot\log_a d$

$mnk=4.$

1 сл. $m=n, k=n-1$ $\quad n^2(n-1)=4$ $\quad (n-2)(\underbrace{n^2+n+2}_{D<0})=0$

$n=2=m.$

$2\cdot\log_{5x-1}4x+1=2 \Rightarrow 5x-1=4x+1\Rightarrow x=2$

Тогда $n=\log_9 3^2=1\neq 2$ – не уд.

2 сл. $m=k$ аналогично $m=k=2$

$2\log_{5x-1}4x+1=2\Rightarrow x=2$ Тогда $k=\log_3 9=2$ – уд.

$n=\log_9 9=1$ – уд: $m=k, n=m-1$ – уд

3 стр

21101904 (U88893 M1300092)

№4.

чистовик 17вар м11

2. ст. вхождение 2 в одно из чисел 14, а ст. вхождение 3 во все числа меньше 15.
всего случаев: ~~$3 \cdot 15^3 \cdot 13^2$~~ $3 \cdot 15^3 \cdot 14^2$

3. ст. вхождение 2 в два числа 14, а ст. вхождение 3 во все числа меньше 15.
всего случаев: $3 \cdot 15^3 \cdot 14$.

4. ст. вхождение 2 во все числа 14, а ст. вхождение 3 во все числа меньше 15. всего случаев: $15^3 \cdot 1$

Аналогично для случаев, когда 3 хотя бы в одно из чисел входит в степени 15, а 2 во все числа входит в степени не более 14.
Аналогично таких случаев всего:

$3 \cdot 14^3 \cdot 15^2 + 3 \cdot 14^3 \cdot 15 + 14^3$

Значит, всего плохих случаев: $(14 \cdot 15)^3 + 14^3(3 \cdot 15^2 + 3 \cdot 15 + 1) + 15^3(3 \cdot 14^2 + 14 + 1)$

Значит, всего троек:

Ответ: $(15 \cdot 16)^3 - (14 \cdot 15)^3 - 14^3(3 \cdot 15^2 + 3 \cdot 15 + 1) - 15^3(3 \cdot 14^2 + 3 \cdot 14 + 1) = 455951$

№4.

Чистовик 17 вар М11

$\begin{cases} НОД(a,b,c)=6 \\ НОК(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases} \Rightarrow a=6m,\ b=6k,\ c=6n;\ m,k,n\in N$

$НОК(6m,6n,6k)=2^{15}\cdot 3^{16} \Rightarrow НОК(m,n,k)=2^{14}\cdot 3^{15}$

Т.к. в НОК(m,n,k) нет делителей кроме 2, 3, в их разложении на простые множ. входят только 2 и 3.

Заметим, что ~~в~~ хотя бы в одно из чисел m,n,k 3 входит в степени 15. (если больше, то НОК будет иметь степень больше. Если у всех чисел степень вхождения числа 3 меньше, то НОК не будет иметь 3 в 15 степени)

Аналогично хотя бы одно имеет ~~в~~ степень вхождения двойки ~~хотя бы~~ 14.

Очевидно, что 2 и 3 не входят ни в одно число больше чем в степени 14 и 15 соответственно.

Найдем количество таких троек m,n,k без условия, что хотя бы одно должно иметь степень вхождения двойки равную 14, а ст. вхожд. тройки равную 15 таких троек: ~~14~~ $(15\cdot 16)^3$, т.к. каждое число может иметь степень 2 от 0 до 14 и степень 3 от 0 до 15. Найдем среди них кол-во троек, которые не удовлетворяют условию. Т.е. ~~нали~~ среди трех чисел нет числа, ст. вх 2 в которое 14 или нет числа, степень вхождения 3 в которое 15.

1. если ст. вхождения 2 меньше 14, а 3 меньше 15.

тогда таких чисел ~~18~~ $\cdot (14\cdot 15)^3$. т.к. в каждое число 2 входит в степени от ~~1~~ 0 до 13, а 3 в степени от 0 до 14.

~~2. если ст. вхождения 2 в хотя бы в одно из чисел 14,~~

21101904 (U88893 M1300092)

1стр