Часть 1

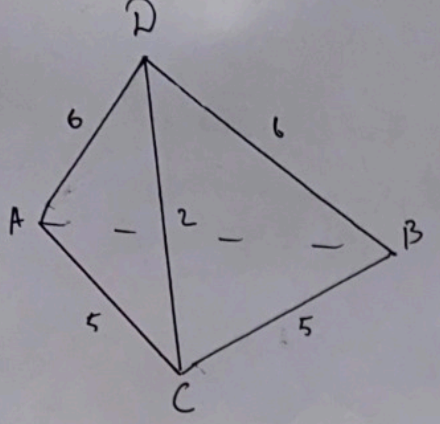
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

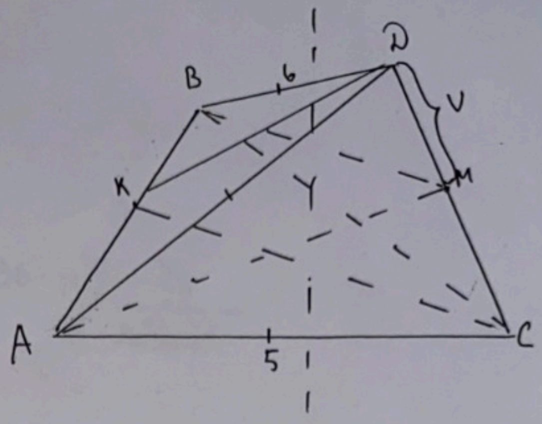
Шифр: **21101884**

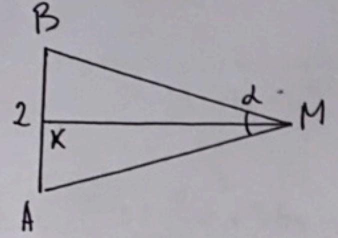
ID профиля: **874618**

Вариант 17

Чистовик
№2







$DK = \sqrt{35}$

$CK = \sqrt{24}$

$MK = \sqrt{35 - u^2}$

$MK = \sqrt{24 - (x-u)^2}$

$35 - v^2 = 24 - (x^2 - 2vx + v^2)$

$11 = -x^2 + 2vx$

$v = \dfrac{11 + x^2}{2x}$

$MK = \sqrt{35 - \left(\frac{11+x^2}{2x}\right)^2}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{36 - u^2}}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{BM}$ $\qquad BM = \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$u = DM = \sqrt{36 - \dfrac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{35 - u^2}}{\sqrt{36 - u^2}}$

$\dfrac{2}{\sin\alpha} = 2R \qquad R = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \dfrac{2\sqrt{35 - u^2}}{36 - u^2}$

$R = \dfrac{36 - u^2}{2\sqrt{35 - u^2}} \qquad 0 \le u \le 6$

$$R'_u = \frac{-2u \cdot 2\sqrt{35 - u^2} - (36 - u^2) \cdot 2\dfrac{(-2u)}{2\sqrt{35 - u^2}}}{4(35 - u^2)}$$

Черновик

$a_1^2+6a_1+9>0$ $D=36+$

$D=0$

$a_1=-3$

$V=BM=\sqrt{36-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$

$-a_1^2-16a_1d-60d^2$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{BM}$

$\frac{2}{\sin\alpha}=2R$ $R=\frac{1}{\sin\alpha}$

34
11

$BM=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

-7

$(35-y^2)^{\frac{3}{2}}$

36
4
4

$\frac{-2y(35-y^2)+36y-y^2}{(35-y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-70y+2y^3+36y-y^2}{11^{\frac{3}{2}}}$

70
36
34

34
11
23

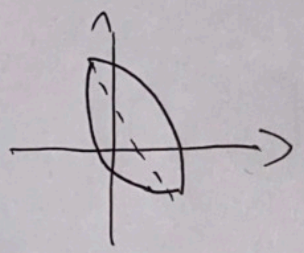
$\sqrt{34}$ 6

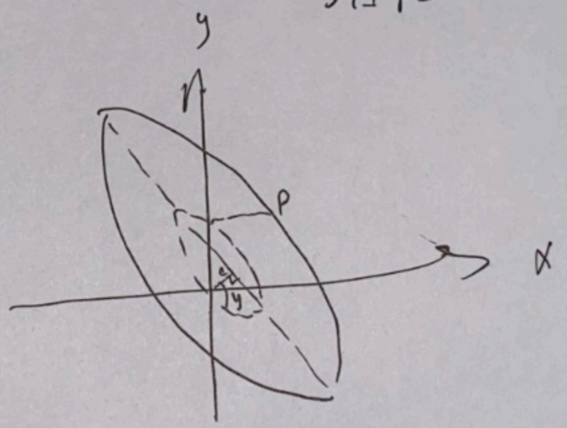
$x^2+11=2x\sqrt{34}$

$4\cdot34-44$

$34\pm\sqrt{23}$

$x^2-2x\sqrt{34}+11=0.$



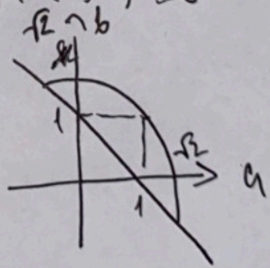


$a^2+b^2\leq2$

$(a-1)^2+(b-1)^2\leq2$

$b=1-a$

$(x-1)^2+(y-1)^2=8$



$a^2+1-2a-1=0.$

$a=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$a^2+1-2a+a^2=2a+2-2a$

$2a^2-2a-1$

21101884 (U874618 M1300839)

Чистовик

Граница M форм-а за счет точек $(a, b) \in$ пункт лин и макс удаление $\sqrt{2}$,
т.е огибающая есть дуги соотв-их окр-тей. Площадь это удвоенная
площадь сегмента. $S_{сегм} = S_{сектAOB} - S_{\Delta AOB}$

Найдем коор-ты точек A и B

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \quad 2x^2-2x-7=0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2} \qquad y = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{15}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{15}}{2}$$

$$OC = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad AB = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2} - \frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{15}}{2} - \frac{1+\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \sqrt{30}$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{AB \cdot OC}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{BC}{OB} = \frac{\sqrt{30}}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\angle AOB = 2\arcsin = \frac{\sqrt{15}}{4} \qquad S_{сек} = 2\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 8\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$S_{сегм} = 8\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Площадь фигуры M $\quad S = 2S_{сегм} = 16\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4} - \sqrt{15}$

Ответ: $16\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4} - \sqrt{15}$

Внутренность, ограниченная пунктирными линиями, тоже входит в M

когда центр в (.) P

5

21101884 (U874618 M1300839)

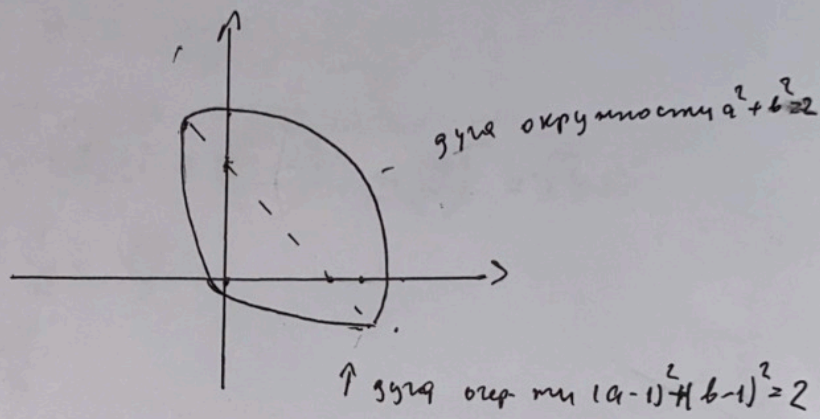
№3 Чистовик

$\left[\begin{array}{l} 2a+2b\geq 2 \\ 2a+2b<2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a^2+b^2\leq 2 \\ a^2+b^2\leq 2a+2b \end{array}$

$a+b\geq 1 \Rightarrow a^2+b^2\leq 2$

$a+b<1 \Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2\leq 2$

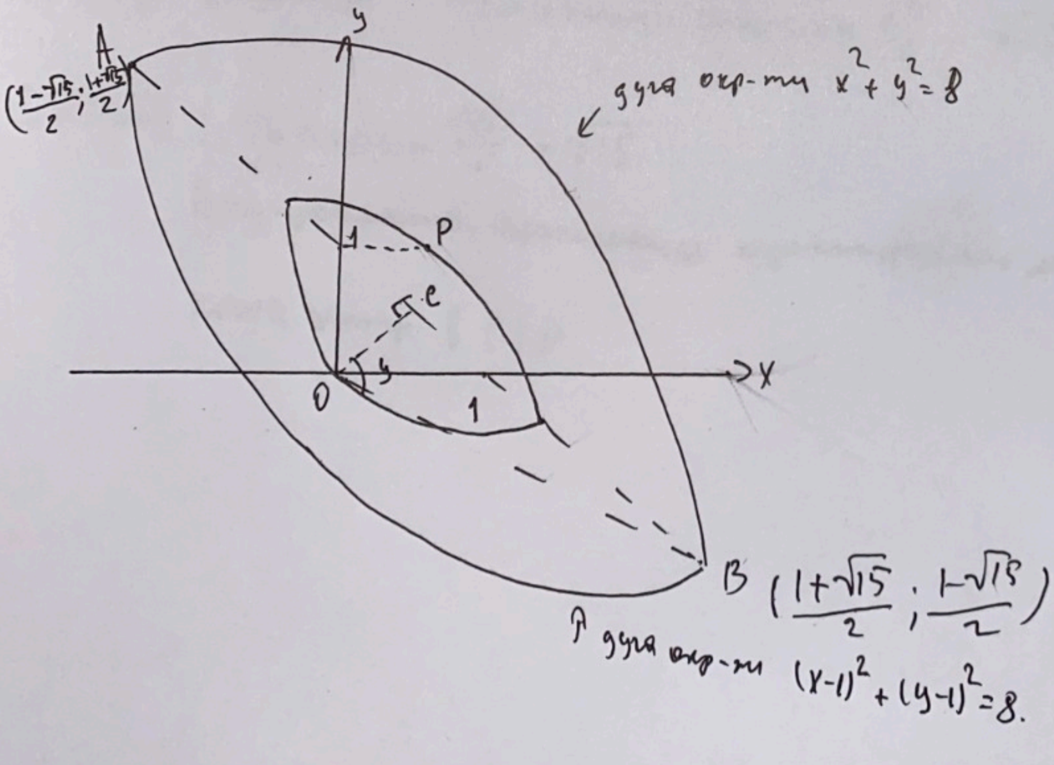
Нарисуем на пл. Oab



Эта линза описывается системой нер-в

$\begin{cases} a^2+b^2\leq 2 & \text{(при } a+b\geq 1) \\ (a-1)^2+(b-1)^2\leq 2 & \text{(при } a+b<1) \end{cases}$

Нарисуем множество M



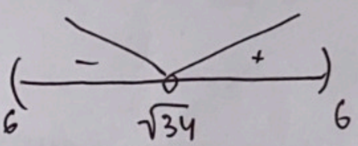
Чистовик

$$B_v' = \frac{-4u\sqrt{35-u^2} + \frac{2u(36-u^2)}{\sqrt{35-u^2}}}{4(35-u^2)}$$

$$\frac{36-u^2}{\sqrt{35-u^2}} \qquad -2u\sqrt{35-u^2} - (36-u^2)\frac{-2u}{2\sqrt{35-u^2}}$$

$$\frac{-2u\sqrt{35-u^2} + \frac{u(36-u^2)}{\sqrt{35-u^2}}}{(35-u^2)} = \frac{-2u(35-u^2)+36u-u^3}{(35-u^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{-70u+2u^3+36u-u^3}{(\ \ )^{3/2}} = \frac{u^3-34u}{(\ \ )^{3/2}}$$



$B\,min = B(\sqrt{34})$

$x^2+11 = 2x\sqrt{34}$

$x^2 - 2x\sqrt{34} + 11 = 0$

$\sqrt{34} \pm \sqrt{34-11} = \sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

Чистовик

№1

$$\frac{2a_1+d(10-1)}{2}\cdot 10=S$$

$(2a_1+9d)5=S$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+11d)>(2a_1+9d)\cdot5+1\\(a_1+6d)(a_1+10d)<(2a_1+9d)\cdot5+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+16a_1d+55d^2>10a_1+45d+1\\a_1^2+16a_1d+60d^2<10a_1+45d+17\end{cases}$$

$-a_1^2-16a_1d-60d^2>-10a_1-45d-17$

$-5d^2>-16$

$d^2<\frac{16}{5}$ (3,2)

$d\in Z$, т.к a_1 и $a_2\in Z$

$d=0$ не подх. $a_n\uparrow$

$d=1$

$$\begin{cases}a_1^2+16a_1+55>10a_1+46\\a_1^2+16a_1+60<10a_1+62\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+6a_1+9>0\\a_1^2+6a_1-2<0\end{cases}\quad\begin{cases}a_1\neq 3\\-3-\sqrt{11}<a_1<-3+\sqrt{11}\end{cases}$$

$-6{,}3<a_1<0{,}3$; $a_1=-6;-5;-4;-2;-1;0$

Ответ: $-6;-5;-4;-2;-1;0$.

1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101884**

ID профиля: **874618**

Вариант 17

$$z^2 = \frac{10}{3 \cdot 2\sin\beta\cos\beta} = \frac{74}{21}$$

$\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{74}}$ $\sin\beta = \frac{7}{\sqrt{74}}$

$$z = \sqrt{\frac{74}{21}}$$

$$AC^2 = (3z)^2 + (2z)^2 - 2 \cdot 3z \cdot 2z \cos 2\beta = 13z^2 - 12z^2\left(2 \cdot \frac{25}{74} - 1\right) =$$

$$= \frac{1250z^2}{74} = \frac{1250}{74} \cdot \frac{74}{21} = \frac{1250}{21}$$

$$AC = \sqrt{\frac{1250}{21}}$$

Ответ: а) 25

б) $\sqrt{\frac{1250}{21}}$

№4

Черновик

$a=2^{x_1}\cdot 3^{y_1}$, $b=2^{x_2}\cdot 3^{y_2}$, $c=2^{x_3}\cdot 3^{y_3}$

Хотя бы одно $x_i=1$, и хотя бы одно $x_k=15$, а оставшееся $1\le x_n\le 15$ любое

Всего 45 случаев по x

Хотя бы одно $y_i=1$, и хотя бы одно $y_k=16$, оставшееся $1\le y_n\le 16$ любое, т.е 48 случаев

В итоге ответ $45\cdot 48=2160$

Ответ: 2160

№5

$a=2\log_{5x-1}(4x+1)$, $b=2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)$, $c=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\begin{cases} a=c \\ b+1=c \end{cases}$ $\qquad \dfrac{2\ln(4x+1)}{\ln(5x-1)}=\dfrac{\ln(5x-1)}{\ln(\frac{x}{2}+2)}$

$$\frac{2\ln(\frac{x}{2}+2)}{\ln(4x+1)}+1=\frac{\ln(5x-1)}{\ln(\frac{x}{2}+2)}$$

$x=2$ единств-ый корень при $x>2/5$

$f(x)=\dfrac{2\ln(\frac{x}{2}+2)}{\ln(4x+1)}+1$ $\nearrow$, а $g(x)=\dfrac{\ln(5x-1)}{\ln(\frac{x}{2}+2)}$ $\searrow$

больше нет корней

Ответ: 2

Черновик

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \frac{2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\cancel{2\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)}}$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

$74 \,|\, \frac{2}{37}$

$45 \cdot 48 = 360 + 1800 = 2160$

a b c

$2^{x_1}\cdot 3^{y_1}$ $2^{x_2}\cdot 3^{y_2}$ $2^{x_3}\cdot 3^{y_3}$

$2\cdot\frac{25}{74}$ $\frac{25}{37}-1=\frac{25-37}{37}$

$-\frac{8}{37}$

$\Delta KPC \sim \Delta ABC$, т.к. $\angle C$ – общий ~~, $\angle KPC = \angle ABC$~~

Коэф подобия $k=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$(3z)^2+(2z)^2-2\cdot 3z\cos 2\beta$ $\frac{S_{\Delta PKC}}{S_{ABC}}=k^2=\frac{4}{25}$ $\Rightarrow S_{ABC}=25$

$=13z^2-12z^2\left(2\cdot\frac{25}{74}-1\right)=\frac{1250z^2}{74}=\frac{1250}{\cancel{74}}\cdot\frac{\cancel{74}}{21}=\frac{1250}{21}$

б)

$AC=\sqrt{\frac{1250}{21}}$

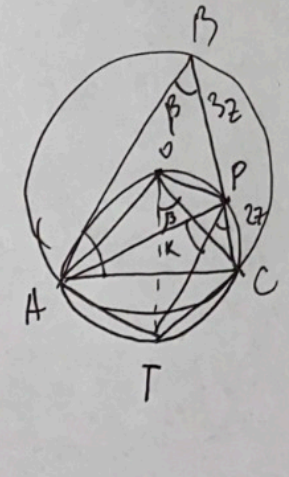
$x_i=1$
$x_k=15$

$1\le x_n\le 15$ любое $\}45$ ш

$\underline{45\cdot 48}$

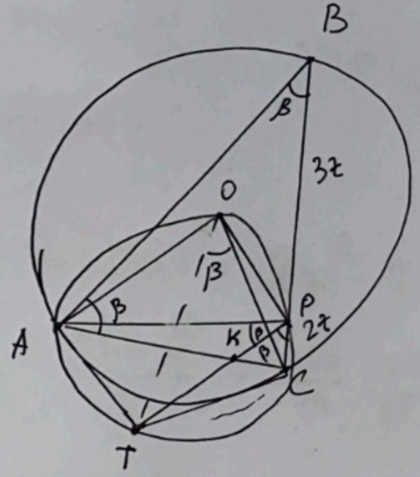
$y_i=1$
$y_k=16$

$1\le y_n\le 16$ $\}48$ ш



Чистовик

№6



$R = \frac{AC}{\sin\beta}$

$R_1 = \frac{AC}{\sin 2\beta}$

$\angle AOC = 2\beta$ $\angle OCT = 90^\circ$, т.е OT - диаметр второй окр-ти (около $\triangle AOC$)

Тогда $\angle OPT = 90^\circ$

$AK : KC = 6:4$

$AK = 3x$ $KC = 2x$

~~$\angle AOC = 2\beta$ $\angle OCT = 90^\circ$~~

$\triangle KPC \sim \triangle ABC$, т.к $\angle C$ - общий, а коэф. подобия $K = \frac{KC}{AC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

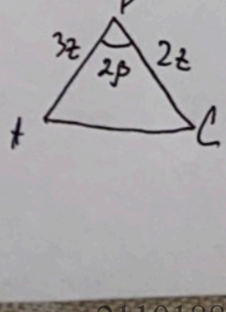
$\frac{S_{\triangle PKC}}{S_{ABC}} = K^2 = \frac{4}{25}$

$S_{ABC} = 25$

б) $\beta = \arccos 7/5$

$S_{\triangle ABP} = 15 \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{15}{10} = 3/2$

но $AP = BP = 3z$ т.к $\angle APC = 2z$



$S_{\triangle APC} = 10$ и $10 = \frac{1}{2} \cdot 3z \cdot 2z \cdot \sin 2\beta \Rightarrow$

2