Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101862**

ID профиля: **836312**

Вариант 17

Математика 11 кл, Часть I

Вариант 17

Чистовик

Задан. №1

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$(a_6 + d)(a_{12} - d) < S+17$

$a_6 a_{12} + \underbrace{(a_{12} - a_6)}_{6d} d - d^2 < S+17$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} + 5d^2 < S+17 \\ a_6 a_{12} > S+1 \end{cases} \Rightarrow a_6 a_{12} + 5d^2 \le a_6 a_{12} + 16$$

$5d^2 < 16$

$S < a_6 a_{12} - 1$

$d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = \pm 1, 0$

Прогрессия возрастает $\Rightarrow d = 1$

$S = \frac{a_1 + (a_1 + 9)}{2} \cdot 10 = 5 \cdot (2a_1 + 9) = 10a_1 + 45$

1

$$\begin{cases} (a_1 + 5)(a_1 + 11) > 10a_1 + 45 + 1 \\ (a_1 + 6)(a_1 + 10) < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (a_1 + 3)^2 \\ (a_1 + 3)^2 < 11 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 \ne -3 \\ a_1 \in (-\sqrt{11} - 3; \sqrt{11} - 3) \end{cases}$$

$a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

Ответ: ~~[illegible]~~ $a_1 = \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

21101862 (U836312 M1295231)

Математика 11 кл, Часть I

Вариант 17

Чистовик

Задан. №2

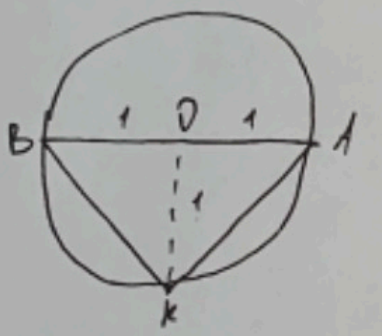
1 случай

$AB = 2 \quad AC = BC = 5 \quad AD = BD = 6$

ABK - пл-ть ∥ основанию цилиндра

т.к CD ∥ оси цилиндра ⇒ $CD \perp ABK$

⇒ $AK \perp CD$ и $BK \perp CD$



т.к радиус наименьший, а диаметр не может быть меньше AB, то $R = \frac{AB}{2} = 1$

AK = BK из симметрии в тетраэдре

$(\sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{BD^2 - DK^2})$

$AK = \sqrt{AO^2 + OK^2} = \sqrt{2} = BK$

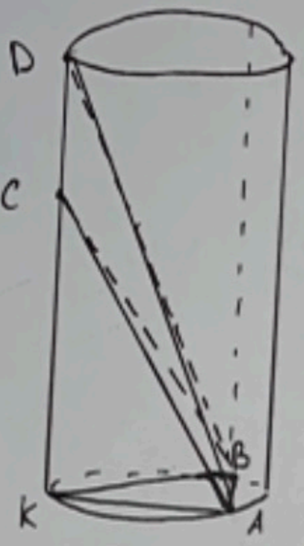
$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

$CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

$CD = CK + DK = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

2

Чистовик



2 случай

аналогично $ABK \perp CD$

$R = \frac{AB}{2} = 1$ (аналогично 1 случаю

$AK = BK = \sqrt{2}$

$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{34}$

$CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{23}$

$CD = DK - CK = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Ответ: 1) $\sqrt{34} + \sqrt{23}$; 2) $\sqrt{34} - \sqrt{23}$

3

21101862 (U836312 M1295231)

Математика 11 кл., Часть I

Вариант 17

Чистовик

Задан. №3

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ – круг с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$

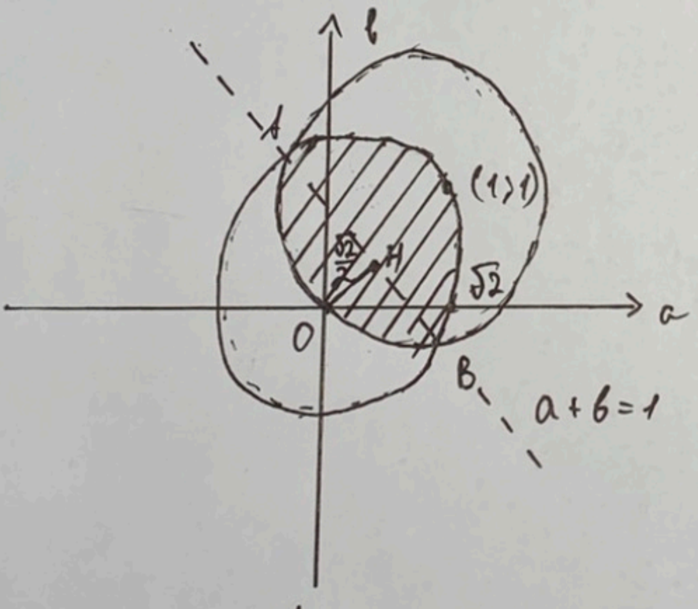
$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$

а) $a+b \geq 1 \Rightarrow a^2+b^2 \le 2$ – круг с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$

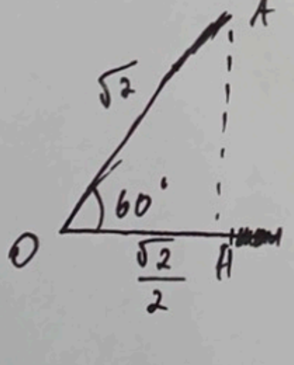
б) $a+b<1 \Rightarrow a^2+b^2 \le 2(a+b)$

$(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) \le 2$ – круг с центром в $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$

Изобразим множество $Ф$: $a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$



Тогда множ-во M – геометрическое место точек плоскости, находящихся на расстоянии не более, чем $\sqrt{2}$ от $Ф$



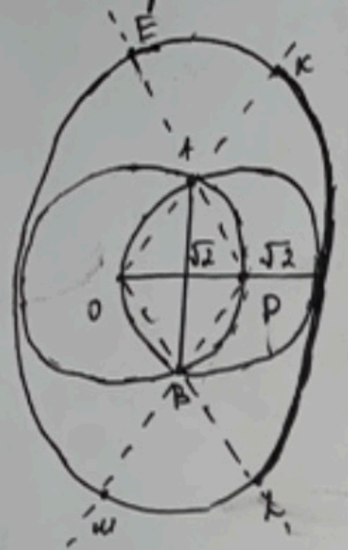
$\Rightarrow \smile AB = 120°$

4

21101862 (U836312 M1295231)

Чистовик

Изобразим М



Ek - дуга с центром в A

LM - дуга с центром в B

ШE - дуга с центром в P

KL - дуга с центром в O

$$\cancel{S_{KLBPA} = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{2})^2 = \frac{8}{3}\pi}$$

$$\cancel{S_{ABK} = \frac{1}{6}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{3}\pi}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}S_{\varphi} = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{2})^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cancel{S_M = 2\Big(\underbrace{\frac{1}{3}\pi}_{S_{AEK}} + \frac{1}{2}S_{\varphi} + S_{KLBPA}\Big) =}$$

$$\cancel{= 2\Big(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{3}\pi\Big) = 2\Big(\frac{11}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{22}{3}\pi - \sqrt{3}}$$

~~Ответ: $\frac{22}{3}\pi - \sqrt{3}$~~

5

Чистовик

$S_{KLBPA} = \frac{1}{3}\pi\left[(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2\right] = 2\pi$

$S_{ABK} = \frac{1}{6}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{3}\pi$

$\frac{1}{2}S_{ф} = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{2})^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ш} = 2\left(S_{ABK} + \frac{1}{2}S_{ф} + S_{KLBPA}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi\right) =$

$= 6\pi - \sqrt{3}$

Ответ: $S_{ш} = 6\pi - \sqrt{3}$

6

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101862**

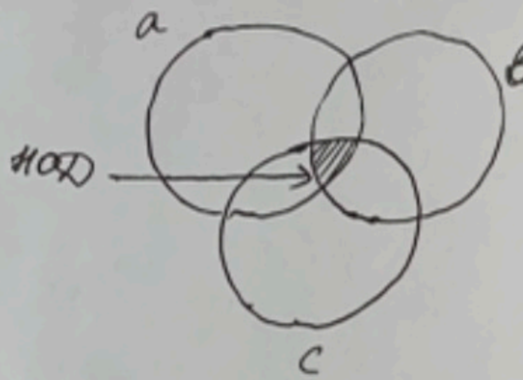
ID профиля: **836312**

Вариант 17

Математика 11 кл, Часть II
Вариант 17

Чистовик
Задан. №4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

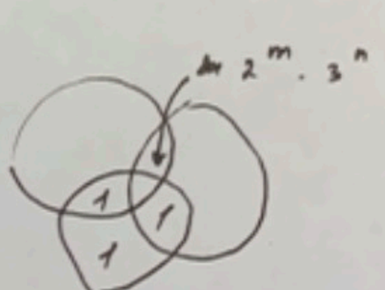


Круги - это множители чисел a, b, c. Если круги пересекаются, то это общие сомножители.
НОД (a;b;c) - пересечение 3-х кругов
НОК (a;b;c) - вся структура.

Рассмотрим $a_1; b_1; c_1$; такие, что
$a=6a_1$
$b=6b_1$ $НОК(a_1;b_1;c_1)=2^{14}\cdot 3^{15}$
$c=6c_1$

1) Пусть НОД двух чисел из $a_1, b_1; c_1$ имеет и 2, и 3. Тогда оставшееся может быть только 1.

$НОД(a_1;b_1)=2^m\cdot 3^n$



$a_1=2^m\cdot 3^n\cdot 2^k$
$b_1=2^m\cdot 3^n\cdot 3^l$
$m+k=14;\ n+l=15$

в целом числах имеем 13·14 - решений
умножить на 6 из-за перестановок чисел

21101862 (U836312 M1295232)

$13\cdot 14\cdot 6=1092$

1

Чистовик

2) Пусть НОД $(a_1; b_1) = 2^m$, НОД $(a_1; c_1) = 3^n$

$0 \le m \le 14$; $0 \le n \le 15$

Тогда

$b_1 = 2^m \cdot 1$

$c_1 = 3^n \cdot 1$

$a_1 = 2^m \cdot 3^n \cdot 2^k \cdot 3^l$

$m + k = 14$ $\quad n + l = 15$

$15 \cdot 16 = 240$

Умн. на 6 из-за повторов

1440 чисел

Ответ: $1440 + 1092 = 2532$

2

Математика 11 кл, Часть II

Вариант 17

Чистовик

Задан. №5

Пусть равные числа обозначим y, тогда третье меньшее $y-1$. Перемножим их:

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=y\cdot y\,(y-1)$$

$$\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=y^3-y^2$$

$$2\cdot\log_{\sqrt{5x-1}}(5x-1)=y^3-y^2$$

$y^3-y^2-4=0$

$y=2$ – решение

$(y-2)(y^2+y+2)=0$

$y^2+y+2=0$ – не имеет реш.

1) Пусть $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

$4x+1=5x-1$

$x=2$

При $x=2$: $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$ подходит

2) Пусть $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$

$\frac{x^2}{4}+2x+4=16x^2+8x+1$

$63x^2+24x-12=0$

$21x^2+8x-4=0$

$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+336}}{42}=\frac{-8\pm20}{42}$

$x_1=-\frac{2}{3}$ – не подходит т.к. $5x-1=-\frac{10}{3}-1<0$

$x_2=\frac{2}{7}$

3

~~Черновик~~

Чистовик

при $x = \frac{2}{7}$: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\sqrt{\frac{3}{7}}} \frac{15}{7}$

Это не равно 1 или 2 $\Rightarrow$ $x = \frac{2}{7}$ - не подходит

3) При $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$ случай аналогично 1)

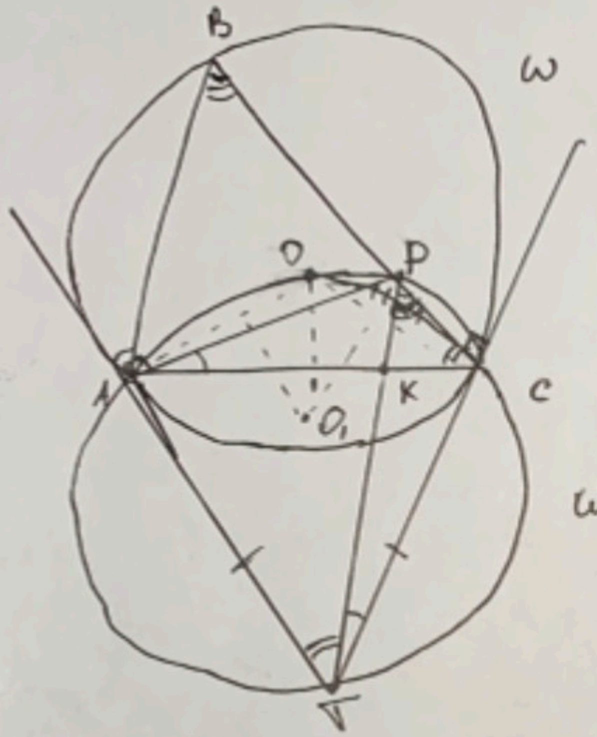
Ответ: $x = 2$

4

Математика 11 кл, часть II
Вариант 17

Чистовик.

Задан. №6



Обозначим ω_1 - окр-ть, описанную вокруг AOC.
Заметим, что $T \in \omega_1$, так как $\angle OAT = \angle OCT = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$\angle OAT + \angle OCT = \pi \Rightarrow$
Вокруг $AOCT$ можно описать окр-ть

$\angle B = \frac{1}{2} \overset{\smile}{AC} = \frac{1}{2} \angle AOC$

$\angle P = \frac{1}{2} \overset{\smile}{TC} = \frac{1}{4} \overset{\smile}{ATC} = \frac{1}{2} \angle AOC$

$\Downarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle TPC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ по 2 углам

Из условия $\frac{AK}{KC} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{10}{4}$ – коэф подобия

$S_{ABC} = \left(\frac{10}{4}\right)^2 S_{KPC} = 25$

Ответ: а) $S\ ABC = 25$

5

21101862 (U836312 M1295232)