Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101848**

ID профиля: **880643**

Вариант 17

№1 Сумма первых 10 членов $= S = 10a_1 + 45d$.

$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_6 a_{12} + 16 > S+17 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 + a_6 a_{12} > a_7 \cdot a_{11}$

$(a_1+5d)(a_1+11d) + 16 > (a_1+6d)(a_1+10d)$

$a_1^2 + 55d^2 + 16a_1 d + 16 > a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2$

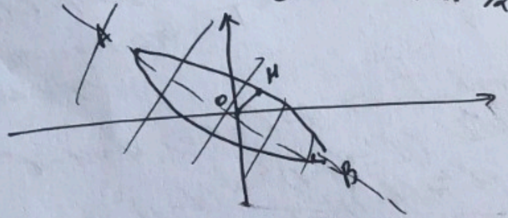
Чистовик

Тогда получим, что (а и в мы можем брать только из закраш фигуры. (гр. включ)

Вспомним про (1) - это круг (т.е ис внутр точ с цен в $(a;b)$)

Тогда получим, что фигура это площадь кот мы ищем это совокуп (иногда пересек) кругов с центром из закраш ф. и $R = \sqrt{2}$

Поймем, что „технически" нужная на площадь - площадь такой же фигуры как закрашенную но „растянутой" на $\sqrt{2}$



$OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (как в. в1)

$|OL| = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+1\right)^2 + \left(\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)-1\right)^2} = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$HL^2 = OL^2 - OH^2 = 4+2\sqrt{3} - \frac{1}{2} = 3{,}5 + 2\sqrt{3} \Rightarrow HL = \sqrt{3{,}5+2\sqrt{3}}$

$\sin\alpha = \frac{HL}{OL} = \sqrt{\frac{3{,}5+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}$ $\cos\alpha = \frac{OH}{OL} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

$\sin \widehat{MOL} = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= 2\alpha = \sqrt{\frac{3{,}5+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}$

Площадь сегмента по формуле:

$S' = \frac{1}{2} r^2 \cdot \left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$; $\left(\cancel{\pi - \arcsin} \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}\right) =$ т.к arcsin от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{2} r^2 \left(\cancel{\arcsin}\ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow S_{иском} = 2 \cdot S'$

4

21101848 (U880643 M1298673)

№3 Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2-(y-b)^2\le 2. \ (1)\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2) \ (2)\end{cases}$$

Рассмотрим (2)

Рос. Решим след. систему.

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 2a+2b\\ 2a+2b\le 2\end{cases} \cup \begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ 2a+2b\ge 2\end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2\le 2, \text{ круг с } r=\sqrt{2} \text{ ц. т. } O(1;1) \ \mathrm{I}\\ 2a+2b\le 2, \text{ это полуп-ть от прямой } \mathrm{II}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 2 \ \mathrm{III} \text{ круг с } R=\sqrt{2} \text{ и центр. в } (0;0)\\ 2a+2b\ge 2 \ \mathrm{IV} \text{ это пл-ть от прямой}\end{cases}$$

Рассмотрим прямую $2a+2b=2$ V

найдем 2 т. пересеч V и I' $\Rightarrow a+b=1 \Rightarrow a=1-b$

$\Rightarrow (1-b-1)^2+(b-1)^2=2 \Rightarrow b^2+(b-1)^2=2$ $\quad (\mathrm{I}'=(a-1)^2+(b-1)^2=2)$

Аналогично поймем, что III' и V тоже $(b^2+(b-1)^2=2$

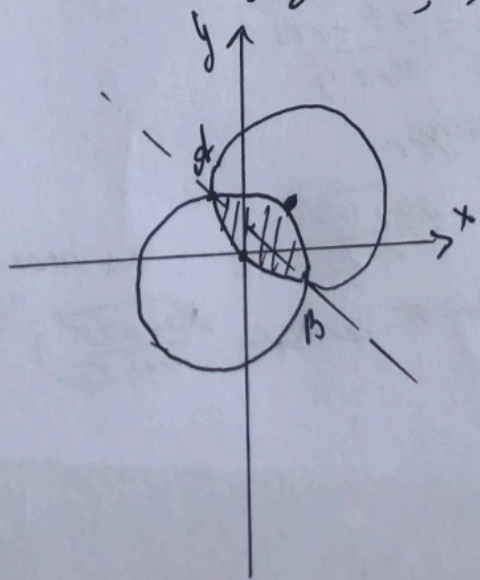
Можно сделать вывод, что картинка сим-на, и т. пересеч

$$\left|\begin{array}{l} b^2+b^2-2b+1=2\\ 2b^2-2b-1=0\\ D=4\cdot 8=12 \quad \sqrt{D}=2\sqrt{3}\\ \frac{2\pm 2\sqrt{3}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}=b\end{array}\right.$$

$b=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

А еще заметим, что S между центрами равно радиусу $=\sqrt{2}$, тогда картинка следующ.



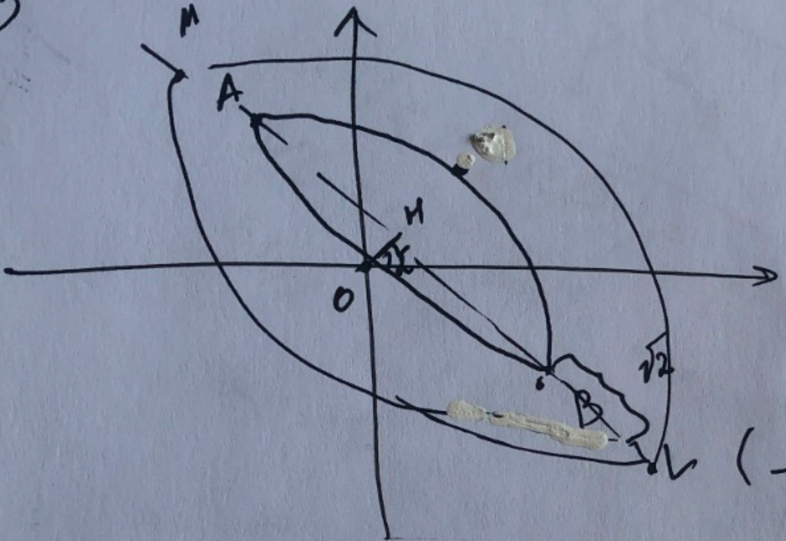
$A\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

21101848 (U880643 M1298673)

№3

Чистовик



$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+1;\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}-1 \right)$

5

21101848 (U880643 M1298673)

$S = 10a_1 + 45d.$ Черновик

$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_6 a_{12} + 16 > S+17. \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$

$a_6 a_{12} + 16 > a_7 a_{11}$

$(a_1+5d)(a_1+11d) + 16 > (a_1+6d)(a_1+10d)$

$\cancel{a_1^2} + 55d^2 + 16a_1d + 16 > \cancel{a_1^2} + 60d^2 + \cancel{16da_1}$

$5d^2 < 16.$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d = 1$

$16 : 5 = 0{,}32$

$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1 + 46. \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases}$

$\cancel{a_1^2 + 55 + 16a_1 > 46}$

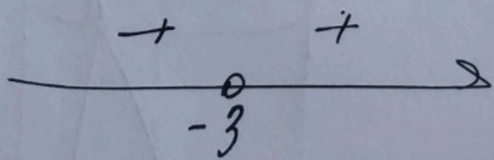
$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 - 10a_1 > 46 - 55 \\ a_1^2 + 16a_1 - 10a_1 < 45 + 17 - 60. \end{cases}$

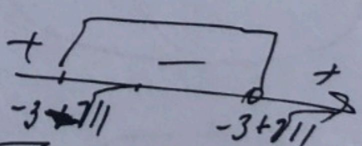
$-3-\sqrt{11} < a_1 < -3+\sqrt{11}$

$45 + 17 = 62$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ \cancel{a_1^2 + 16a_1 -} \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0. \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ (a_1+3)^2 - 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2 > 0 \\ (a+3-\sqrt{11})(a+3+\sqrt{11}) < 0 \end{cases}$





$-3-\sqrt{11} < -3-\sqrt{9} = -6$

$-3+\sqrt{11} > -3+\sqrt{9} = 0$

$\{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

№1.

21101848 (U880643 M1298673)

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10$$

Черновик

$$a_6 = a_1 + d(n-1) = a_1 + 5d$$
$$a_{12} = a_1 + 11d$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 + 1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 5da_1 + 55d + 11da_1 > \frac{10(a_1+a_{10})+2}{2} \\ a_1^2 + 6da_1 + 10da_1 + 60d < \frac{10(a_1+a_{10})+34}{2} \end{cases}$$

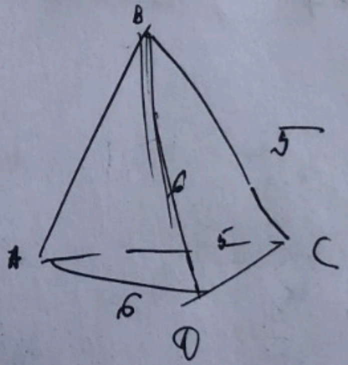
$5(a_1+a_{10})+1$

$-\ 5(a_1+a_{10})+17.$

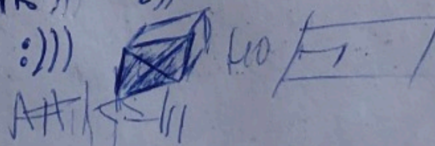
$-16.$

$55d - 60d = -5d.$

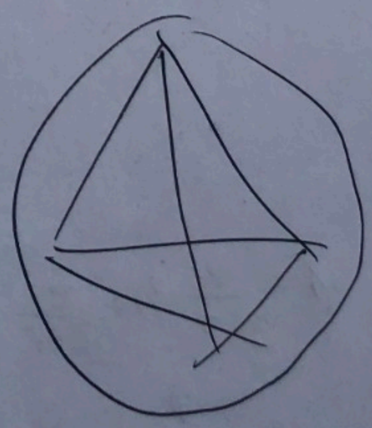
$55d - 50d = 5d$



Гык)) :)) :)))

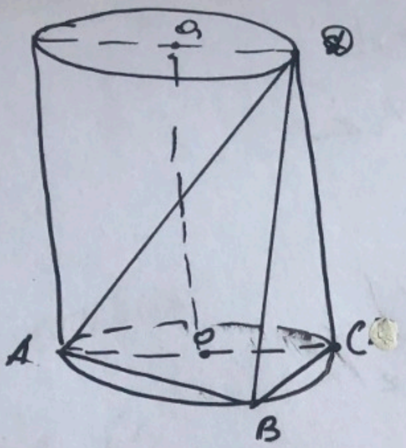


№3) Окруж в т. $(a; b)$ и $r = \sqrt{2}$.



21101848 (U880643 M1298673)

№2



21101848 (U880643 M1298673)

Чистовик

№1 Сумма первых 10 членов $= S = 10a_1 + 45d$.

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_6 \cdot a_{12} + 16 > S+17 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 16 + a_6 a_{12} > a_7 \cdot a_{11}$

$(a_1+5d)(a_1+11d) + 16 > (a_1+6d)(a_1+10d)$

$\cancel{a_1^2} + 55d^2 + \cancel{16a_1 d} + 16 > \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 d} + 60d^2$

$16 > 5d^2$

$d^2 < 3\frac{1}{5}$

$d = 1$, т.к. разност. положит $\Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1 + 46 \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1 + 45 + 17 - 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 55 + 16a_1 - 10a_1 > 46 \\ a_1^2 + 16a_1 - 10a_1 < 45 + 17 - 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 - 10a_1 < 45 + 17 - 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ (a_1+3)^2 - 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$+ \quad -3 \quad + \quad a_1$

$+ \quad -3-\sqrt{11} \quad - \quad -3+\sqrt{11} \quad + \quad a_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 > -3-\sqrt{9} = -6 \\ a_1 < -3+\sqrt{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2 > 0 \\ (a+3-\sqrt{11})(a+3+\sqrt{11}) < 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a_1 : \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: a_1 $\{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

①

21101848 (U880643 M1298673)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

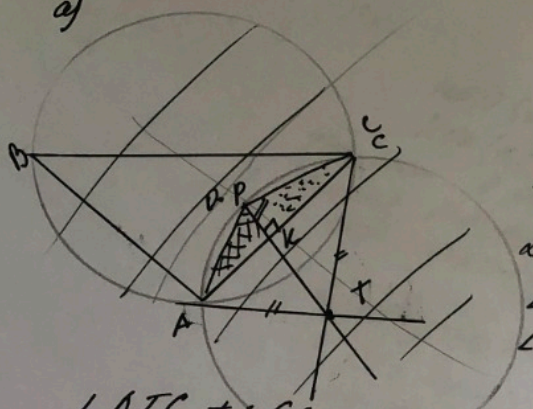
Шифр: **21101848**

ID профиля: **880643**

Вариант 17

№3 Чистовик

а)



P! △APK

$S_{APK} = 6 = \frac{1}{2} h \cdot KC$

$S_{CPK} = 4 = \frac{1}{2} h \cdot AK$

$\angle APC = 2 \angle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\alpha = \angle TAC = \angle ABC = \angle ACT$ (м/у хордой и касат)

$\angle AOC = \angle APC$ (как вписан)

$\angle AOC = \angle 2 \angle ABC = 2\alpha$ (центральный)

$\angle ATC + \angle CAT + \angle ACT = 180°$

$\angle ATC + 2\alpha = 180°$

$\angle \cancel{AAO}\,AOC = \angle APC = 2\alpha$ (как вписан) $\Big\} \Rightarrow \angle ATC + \angle APC = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow APCT$ – вписанный (сумма против углов равно)

$AT = CT$ (по св-ву касат)

$\angle APK = \angle CPK$, т.к опираются на один хорду

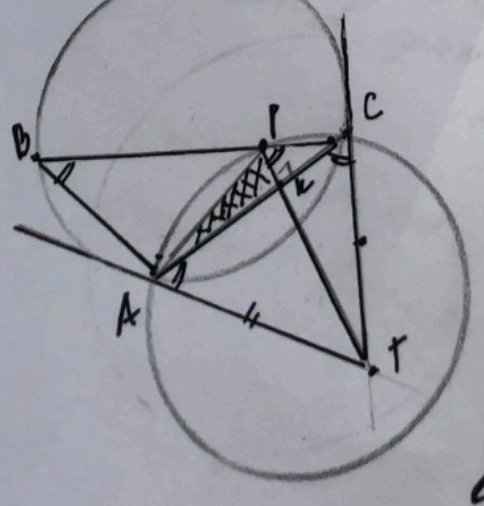
$\Rightarrow PK$ – бис-са $\Rightarrow \angle APK = \angle KPC = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle KPC = \alpha$

$BCA = PCA$ $\Big\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ (по двум углам) $\Rightarrow$

$\frac{PH_1}{BH_2} = \frac{KC}{AC} = \frac{2}{5}$

$\left.\begin{matrix}\frac{S_{\triangle PKC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \\ S_{PKC} = 4\end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{ABC} = 25$



Ответ: а) 25;

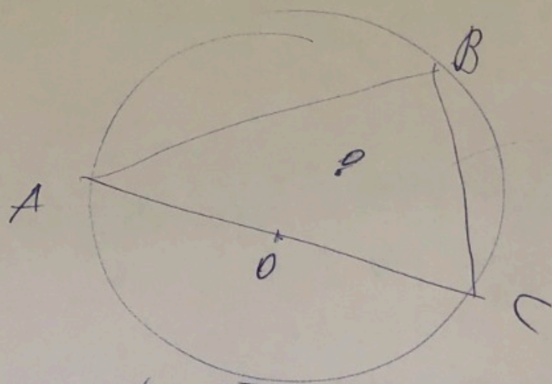
3

1

21101848 (U880643 M1298674)

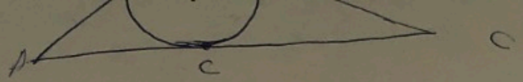
Ш

Черновик



$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_4 \frac{x}{2x}$

$\frac{1}{2}\log^{5x} - 5x$



№1 Чистовик

$НОД(a, b, c) = 6$

$НОК(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16} = E$

Так как в НОК входят max степень всех простых чисел, на которых распадается a, b, c, то есть в их разлож есть только 2 и 3

Очевидно, что найдите хоть бы одно число равное 6 (т.к если min степень 2 или 3 будет больше 1, то НОД > 6)

1) два числа равны 6. $\Rightarrow$ $E\,6\,6$, $6\,E\,6$; $6\,6\,E$ — 3 вар.

2) одно число равно 6 (у нас система)

$\Rightarrow$ у нас система

$\max(2a, 2b) = 15$ $\quad$ $2a$ — степень 2 ки в разл. a

$\max(3a; 3b) = 16$

$2a + 3a > 2$

$2b + 3b > 2$

1. Если в обоих числах есть max, степень. 2 $\Rightarrow$ числа заданы одно — 3 вар.

2. Если в одном числе есть max с > 2, а в другом max степень. 3

16·15 и умножить на кол-во перестановок 3 числа.

3. Если в один сразу 2 max степени.

15·14+2 (~~когда~~ когда в числе 1 тоже снов)

$\Rightarrow 3! \cdot (15 \cdot 14 + 2)$

Ответ: $3 + 3 + 3! \cdot 16 \cdot 15 + 3!(15 \cdot 14 + 2)$

(1)

21101848 (U880643 M1298674)

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{7}{5}$ $AC - ?$

$tg\angle ABC = \frac{7}{5}$ $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\angle ABC = \frac{1}{tg^2\alpha+1} = \frac{1}{\frac{49}{25}+1}$

$\sin^2\angle ABC = 1 - \cos^2\angle ABC = \frac{49}{74}$

$\sin\angle ABC = \frac{+7}{\sqrt{74}}$

$\sin\angle AOC = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}} \cdot \frac{5}{\sqrt{74}} = \frac{35}{74}$

$\Rightarrow |\cos\alpha| = \sqrt{1-\left(\frac{35}{74}\right)^2} = \sqrt{\frac{4251}{5476}}$

из подобия Δ $BP = 3x$

$\frac{AP}{PC} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ $AP = 3x$
$PC = 2x$

$S_{APC} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AP \cdot PC = S_{APK} + S_{PKC} = 10$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{35}{74} \cdot 6x^2 = 10$

$x^2 = \frac{20 \cdot 74}{35 \cdot 6} = \frac{74}{7}$

$x = \sqrt{\frac{74}{7}}$

По т. косинусов.

$AC^2 = PC^2 + AP^2 - 2PC \cdot AP\cos 2\alpha = 4x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 6x^2\cos 2\alpha =$

$AC = \sqrt{4 \cdot \frac{74}{7} + 9 \cdot \frac{74}{7} - 2 \cdot 6 \cdot \frac{74}{7} \cdot (1 - 2\sin^2\alpha)} =$

$= \sqrt{13x^2 + 12x^2 \cdot \frac{\sqrt{4251}}{74}}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \cancel{1 - \frac{2 \cdot 49}{74} = -\frac{12}{37}}$, т.к. $tg > 1$ $\cos 2\alpha < 0$

$\cos 2\alpha = \frac{12}{37}$ $\alpha > 45^\circ \Rightarrow 2\alpha > 90^\circ$ $tg\alpha > 1$

$AC = \frac{13 \cdot 74}{7} + \frac{12 \cdot 74 \cdot \sqrt{4251}}{7 \cdot 74} = 137\frac{3}{7} + \frac{12\sqrt{4251}}{7}$

Ответ: $AC = \sqrt{137\frac{3}{7} + \frac{12\sqrt{4251}}{7}}$

4

21101848 (U880643 M1298674)