Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101675**

ID профиля: **847278**

Вариант 17

Чистовик ①

Математика 11кл.

№1

$a_{n+1} = a_n + k$ $\qquad S = 10a_1 + 45k$

$a_1, a_i \in Z$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = a_1 + (a_1+k) + (a_1+2k) + \ldots (a_1+9k) = 10a_1 + (1+2+\ldots+9)k = 10a_1 + 45k = S$

$a_6 = a_1 + 5k$

$a_7 = a_1 + 6k$

$a_{11} = a_1 + 10k$

$a_{12} = a_1 + 11k$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1+5k)(a_1+11k) = a_1^2 + 16a_1k + 55k^2 > S+1$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1+6k)(a_1+10k) = a_1^2 + 16a_1k + 60k^2 < S+17$

$a_7 \cdot a_{11} - a_6 \cdot a_{12} = \begin{cases} 5k^2 > 0 \\ 5k^2 < 16 \end{cases}$; т.к $\begin{cases} a_7 \cdot a_{11} < S+17 \\ a_6 \cdot a_{12} > S+1 \end{cases} \Rightarrow a_7 \cdot a_{11} - a_6 \cdot a_{12} < 16$

$k^2 < \frac{16}{5}$

$k < \sqrt{\frac{16}{5}} \Rightarrow k < 2$

т.к $k \in Z$, то $k \leq 1$; но при $k = 0$ прогрессия невозможна $\Rightarrow k = 1$

Подставим $k = 1$:

$S = 10a_1 + 45$

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} = a_1^2 + 16a_1 + 55 \\ a_7 \cdot a_{11} = a_1^2 + 16a_1 + 60 \end{cases}$

Решаем систему

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > (10a_1 + 45) + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < (10a_1 + 45) + 17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$

1) $(a_1+3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3$

2) $a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$D = 36 + 8 = 44 = (2\sqrt{11})^2$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$\begin{cases} 3 < \sqrt{11} < 4 \\ a_1 \in [-6; 0] \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} a_1 \in [-6; 0] \\ a_1 \in Z \\ a_1 \neq -3 \end{cases} \Rightarrow a_6 \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: $\{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Черновик

Чистовик ②

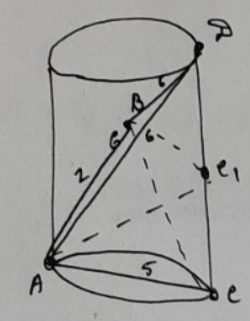
Математика 11кл

№2

Дано: $AB=2$; $AC=CB=5$; $AD=DB=6$

$\triangle ABC$ и $\triangle ADB$ – равнобед. ~~[illegible]~~

$AB \perp CD$ ~~[illegible]~~



Решение:

Проведём через т. A плоскость $\alpha \parallel CD$

~~[illegible]~~ $B \in \alpha$; AB – хорда на окр-ти цилиндра с радиусом r

$AB \leq 2r$ (диаметр – самая большая хорда)

$r \geq \frac{AB}{2} = 1$

Цилиндр с $r=1$ существует

Высоты из D и C на α обозначим h_D h_C

$1^2 + h_D^2 + 1^2 = AD^2 = 36$

$h_D = \sqrt{34}$

Возможны 2 конфигурации когда C и D в одном полупространстве отн-но α и D разных.

$1^2 + h_C^2 + 1^2 = AC^2 = 25$

$h_C = \sqrt{23}$

CD – либо $h_D - h_C = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

либо $h_D + h_C = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} - \sqrt{23}$; $\sqrt{34} + \sqrt{23}$

Черновик

$a_6 \cdot a_{12} > S+1$ $\quad a_7 = a_6 + d$

$a_7 \cdot a_{11} < S+17$ $\quad a_{12} = a_{11} + d$

$a_6 \cdot (a_{11} + d) > S+1$

$(a_6 + d) \cdot a_{11} < S+17$

$\begin{cases} a_6 a_{11} + a_6 d > S+1 \\ a_6 a_{11} + a_{11} d < S+17 \end{cases}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 $\quad$ 45

$S = \frac{10a_1 + 45d}{}$

$\begin{cases} S < a_6 a_{11} + a_6 d - 1 \\ S > a_6 a_{11} + a_{11} d - 17 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 10a_1 < a_6 a_{11} + a_6 d - 11 - 45d \\ 10a_1 > a_6 a_{11} + a_{11} d - 17 - 45d \end{cases}$

$\frac{a_6 \cancel{a_{11}} + a_6 d - 11 - \cancel{45d}}{10} > a_1 > \frac{a_6 \cancel{a_{11}} + a_{11} d - 17 - \cancel{45d}}{10}$

$a_1^2 + 10a_1 k + 5a_1 k + 50k^2$

$a_{n+1} = a_n + k$

$a_1, a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = a_1 + (a_1 + k) + \ldots + (a_1 + 9k) = 10a_1 + (1 + 2 + \ldots + 9)k = 10a_1 + 45k = S$

$a_6 = a_1 + 5k$

$a_7 = a_1 + 6k$

$a_{12} = a_1 + 11k$

$a_{11} = a_1 + 10k$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + 5k)(a_1 + \overset{11}{\cancel{10}}k) = a_1^2 + 16a_1 \cdot k + 55k^2 > S+1$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1 + 6k)(a_1 + 10k) = a_1^2 + 16a_1 \cdot k + 60k^2 < S+17$

$a_7 \cdot a_{11} - a_6 \cdot a_{12} = \begin{cases} 5k^2 > 0 \\ 5k^2 < 16 \end{cases}$, т.к. $\begin{matrix} a_7 \cdot a_{11} < S+17 \\ a_6 \cdot a_{12} > S+1 \end{matrix}$ => их разность меньше чем $S+17-(S+1) = 16$

$\begin{cases} k^2 > 0 \\ k^2 < \frac{16}{5} \end{cases}$ $\Rightarrow k < \sqrt{\frac{16}{5}} \Rightarrow k < 2$

Т.к. k - целое, то $k \le 1$, но $k \ne 0$, тогда $\underline{k = 1}$

Подставим $k = 1$, тогда

$S = 10a + 45$

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} = a_1^2 + 16a_1 + 55 \\ a_7 \cdot a_{11} = a_1^2 + 16a_1 + 60 \end{cases}$

Решаем систему

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > (10a_1 + 45) + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < (10a_1 + 45) + 17 \end{cases}$

21101675 (U847278 M1304352)

1) $(a_1+3)^2 \geq 0 \Rightarrow a_1 \neq -3$

2) $a_1^2+6a_1-2<0$

$D = 36+8=44$

$a_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{D}}{2} = -3\pm\sqrt{11}$

$a_1 \in \cancel{[-\sqrt{3}]} [-3-\sqrt{11}\,; -3+\sqrt{11}]$

$\begin{cases} 3<\sqrt{11}<4 \quad \text{т.к. } a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \in [-6;0] \end{cases}$

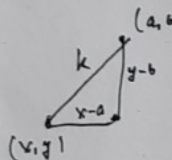
$a_1 \neq -3$

$a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

M – фигура на декартовой плоскости, множество (x,y), что $\exists (a,b)$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2 \\ a^2+b^2 \leq \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$

Первое ур-е говорит, что $d((x,y);(a,b))$ не более $\sqrt{2}$



$k^2 = (x-a)^2+(y-b)^2$

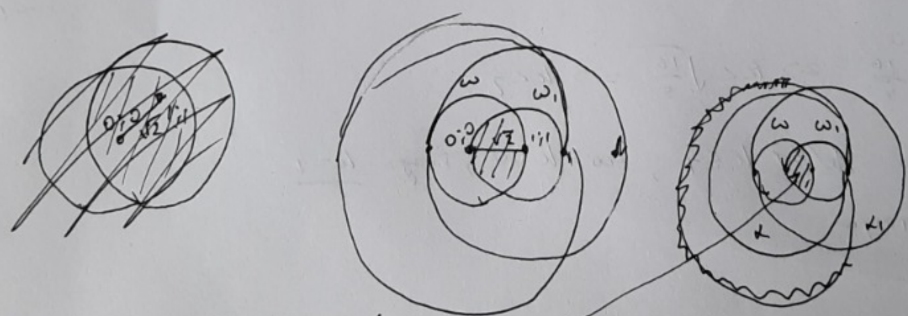
$k^2 \leq 2 \Rightarrow k \leq \sqrt{2}$

$a^2+b^2 \leq \min(2a+2b, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \leq 2 \\ a^2+b^2 \leq 2a+2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \leq 2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$ Это пересечение окр-тей с центрами $(0;0)$; $(1;1)$

$R = \sqrt{2}$

α (центр в т. $(0;0)$)

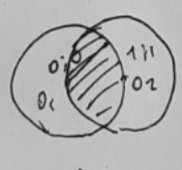
α_1 (центр в т. $(1;1)$)

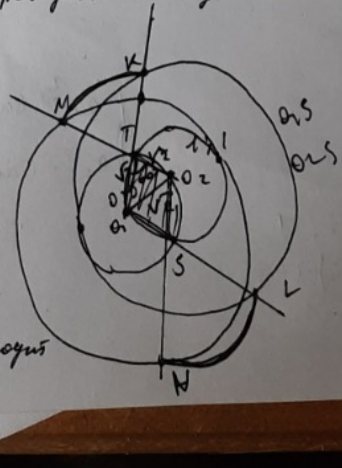


Множество (a,b), откуда проводим всевозможные окр-ти радиусом $\sqrt{2}$ с центром в (a,b)

подходит SSN центром

подходит TMK центром S





весь сектор KO_1L окр-ти α подходит

весь сектор MO_2N окр-ти α_1 подходит

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101675**

ID профиля: **847278**

Вариант 17

Чистовик 1

Математика 11кл

№4

НОД $(a,b,c) = 6 = 3 \cdot 2$

НОК $(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16} = N \vdots a;\ N \vdots b;\ N \vdots c$

Тогда

$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2}$

$$\begin{cases} \min(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ \min(a_2, b_2, c_2) = 1 \\ \max(a_1, b_1, c_1) = 15 \\ \max(a_2, b_2, c_2) = 16 \end{cases}$$

$\{a_1; b_1; c_1\} = \{1; x; 15\}$

$1 \le x \le 15$

$\{a_2; b_2; c_2\} = \{1; y; 16\}$

$1 \le y \le 16$

Выберем степени для 2:

При $1 \le x \le 15$ можно переставить $3!$ способами, если $x = 1$ или $x = 15$ есть 3 способа переставить; всего $15 \cdot 3! - 3 - 3 = 84$ способа

Выберем степени для 3:

Аналогично всего $16 \cdot 3! - 3 - 3 = 90$ способов.

После выбора степеней вхождения 2 и 3 однозначно определяются (a,b,c)

Получаем $84 \cdot 90 = 7560$ способов.

Ответ: 7560

21101675 (U847278 M1304353)

Чистовик ②

Математика 11 кл.

№5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$a,\ a\ ,\ a-1$

Заметим, что произведение логарифмов из условия равно

$2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)\cdot 2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 4\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a$

Заменим $5x-1=a$

$4x+1=b$; $xyz\neq 0$, т.к. $a,b,c\neq 1$

$\frac{x}{2}+2=c$

Пусть $a=e^x$

$b=e^y$

$c=e^z$

$4\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}=4$, нужно решить

$a\cdot a\cdot(a-1)=4$

$a^3-a^2=4$

$a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$D<0$ корней нет

Единственное решение при $a=2$

Третий логарифм равен либо 2, либо 1

$\left[\begin{array}{l} 1)\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \\ 2)\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{array}\right.$

1) $\frac{x}{2}+2=5x-1$

$4{,}5x=3$

$x=\frac{2}{3}$

Тогда $5x-1=\frac{7}{3}$; но $\log_{\frac{7}{3}}\frac{11}{3}\neq 1\neq 2$ => не подходит

$4x+1=\frac{11}{3}$

2) $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1$

$\frac{x^2}{4}+4+2x=5x-1$

$\frac{x^2}{4}-3x+5=0\ |\cdot 4$

$x^2-12x+20=(x-2)(x+10)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-10 \end{array}\right.$; $x=-10$ не подходит, т.к. $5x-1<0$

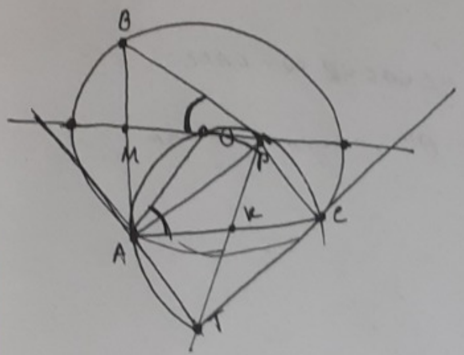
Рассмотрим $x=2$

$\{\log_3 9;\ \log_9 9;\ \log_3 9\}=\{2;\ 1;\ 2\}$

Ответ: $x=2$

Итоговик (3)

№6



$\angle AOC = 2\angle ABC \Rightarrow \angle OAC = 90 - \frac{1}{2}\angle AOC = 90 - \angle ABC \Rightarrow$

Если окр-ть AOC пересекает вторично BC в т. P и C, то $\angle OPB = \angle OAC = 90^\circ - \angle ABC \Rightarrow OP \perp AB \Rightarrow OP$ – серединный перпендикуляр к AB. Пусть M – середина AB, тогда $AP = BP$

$\frac{AP}{PC} = \frac{\sin\angle ATP}{\sin\angle PTC}$ (т.к. точки на одной окр-ти) $= \frac{AK}{KC}$ (т.к. ΔATC – равнобед.) $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC}$

Т.к $S_{\Delta APK} = 6$, а $S_{\Delta CPK} = 5$, то $\frac{AK}{KC} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{6}{4}$

$\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta APC}} = \frac{BP}{PC}$; То есть $BP = AP = \frac{6}{4}$

Тогда $S_{\Delta ABP} = \frac{6}{4} \cdot (6+4) = \frac{60}{4} = 15$

21101675 (U847278 M1304353)

Черновик.

N ~~Чистовик~~ ~~1~~(3) Черновик

N6

$\angle AOC = 2\angle ABC \Rightarrow \angle OAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ - \angle ABC$

Тогда если окр-ть AOC пересекает вторично отрезок BC, то угол $\angle OPB = \angle OAC = 90 - \angle ABC$

$OP \perp AB \Rightarrow OP$ - серединный перпендикуляр к AB. Пусть M - середина AB, тогда $AP = BP$

21101675 (U847278 M1304353)

Черновик.

№5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\sqrt{5x-1} = 4x+1$

№4

НОД$(a,b,c) = 6 = 3\cdot 2$

НОК$(a,b,c) = 2^{15}\cdot 3^{16} = N \vdots a$; $N \vdots b$; $N \vdots c$

Тогда

$a = 2^{a_1}\cdot 3^{a_2}$

$b = 2^{b_1}\cdot 3^{b_2}$

$c = 2^{c_1}\cdot 3^{c_2}$

НОД$(a,b,c) = 6$

НОК$(a,b,c) = 2^{15}\cdot 3^{16}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \min(a_1,b_1,c_1) = 1 \\ \min(a_2,b_2,c_2) = 1 \\ \max(a_1,b_1,c_1) = 15 \\ \max(a_2,b_2,c_2) = 16 \end{cases}$

$\begin{cases} \{a_1;b_1;c_1\} = \{1;x;15\} \\ 1 \le x \le 15 \\ \{a_2;b_2;c_2\} = \{1;y;16\} \end{cases}$

$1 \le y \le 16$

Выберем степень для 2:

При $1 \le x \le 15$

можно переставить $3!$ способами, если $x=1=15$ есть

3 способа переставить; всего $15\cdot 3! - 3 - 3 = 84$ способа

Выберем степени для 3:

Аналогично всего $16\cdot 3! - 3 - 3 = 90$ способов

После выбора степеней вхождения 2 и 3 однозначно определяются (a,b,c).

Получаем $84\cdot 90 = 7560$ способов.

$\begin{array}{r} 3 \\ 84 \\ \times 90 \\ \hline 7560 \end{array}$

21101675 (U847278 M1304353)