Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101541**

ID профиля: **356125**

Вариант 17

Беловик

Лист 1

№1

$S = a_1 + a_2 + \dots a_{10} = 10a_1 + \frac{9 \cdot 10}{2} k = 10a_1 + 45k$

$(a_1+5k)(a_1+11k) = a_1^2 + 16a_1k + 55k^2 > 10a_1 + 45k + 1$

$(a_1+6k)(a_1+10k) = a_1^2 + 16a_1k + 60k^2 < 10a_1 + 45k + 17$

$60k^2 + k < 55k^2 + 17$

$5k^2 < 16$

$k < \sqrt{3,2}$, ~~k~~, прогрессия возрастающ.,

~~$k \in Z \Rightarrow k > 0$~~. числа прогр-ии цельie $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$k \in$~~ $k > 0, k \in Z$

$\begin{cases} k > 0 \\ k \in Z \\ k < \sqrt{3,2} \end{cases} \Rightarrow k = 1$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}) \end{cases}$

~~$a_1 \in Z \Rightarrow a_1 \in \{0, 1, 2\}$~~

~~Ответ: $a_1 \in$~~ $\{6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$

$a_1 \in Z \Rightarrow a_1 \in \{6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$

Ответ: $a_1 \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$

№2

Беловик

1) Проведем высоты AH_1 и BH_2

Докажем, что H_1 и H_2 это одна точка

1. $\triangle CBD = \triangle CAD$, т.к. $CB = AC$, $AD = DB$; CD-общая

тогда $\frac{CH_1}{H_1D} = \frac{CH_2}{H_2D} \Rightarrow H_1 = H_2 = H$

2) т.к. $BH \perp CD$, $AH \perp CD$, то AH и $BH \perp$ оси цилиндра, т.к. CD параллельна оси цил-ра

3) т.к. $BH \perp$ оси и $AH \perp$ оси, то $(BHA) \perp$ оси, тогда описанной окр-ть около $\triangle ABH$ — окруж-ть, равная основанием цилиндра, то есть радиус окр-ти, описанной около $\triangle ABH$ равен радиусу основания цилиндра

4) по теореме синусов рассм. $\triangle ABH$

$$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R$$

AB постоянн., а $\sin\angle AHB \in [0;1]$

AB постоянн., а $\sin\angle AHB = 1 \Rightarrow$ тогда $2R$ будет наименьш, при $\sin\angle AHB = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$, а $R = 1$

Рассмотрим $\triangle BHA$: $HB = HA$, $\angle BHA = 90^\circ$, $BA = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow BH^2 + HA^2 = BA^2$

$BH = \frac{BA}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

5) Рассм. $\triangle CDB$(п/уг): $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{23}$

$HD = \sqrt{DB^2 - BH^2} = \sqrt{34}$

$CD = CH + HD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$

6) Другого расположения не может быть, т.к. CD- фиксированная, а при изменении мест A и B между собой - ничего не изменяется

Ответ: $CD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$

Лист 2

Беловик №3 Лист 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)\end{cases}$$

(начало)

1) $a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)$

$$\left[\begin{array}{l}a^2+b^2\le 2a+2b;\ 2a+2b<2\\ a^2+b^2\le 2;\ 2a+2b\ge 2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(a-1)^2+(b-1)^2\le 2;\ b<1-a\\ a^2+b^2\le 2;\ b\ge 1-a\end{array}\right.$$

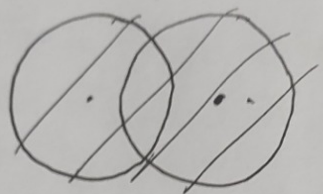
Итак, у нас есть 2 окр-ти, у кот. одинак. радиус $r=\sqrt{2}$. При этом расстояние между центрами этих окружностей $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, что тоже равно радиусу. Прямая $b=1-a$ – радиальная ось, ~~тогда мно-жество точек (a;b)~~ ~~Укажем на графике множество точек, удовлетворяющих условию: $(x-a)^2+(y-b)^2\le 2$. На этом графике область внутри окружности, центр которой лежит в точке (a;b)~~ Тогда множество точек, удовлетворяющих усл-ю $a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)$ указываем на графике

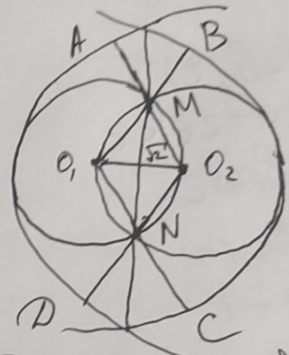
Теперь рассм. $(x-a)^2+(y-b)^2\le 2$: область внутри окр-ти с центром в $(a;b)$ и $r=\sqrt{2}$. Возьмем все точки из выделенной области и те, которые будут удалены от нее не более, чем на $\sqrt{2}$

продолжение

Беловик лист 4

№3 (продолжение)





$$S(B \cup C O_1) = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{2})^2 = \frac{8\pi}{3}$$

$$S(O_1 M O_2 N) = \frac{2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2 = \sqrt{3}$$

$$S(D \cup C N) = \frac{1}{6}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{3}\pi$$

$$S_{общ} = 6\pi - \sqrt{3}$$

Ответ: $6\pi - \sqrt{3}$

№1 Черновик [redacted]

$a_1+a_2+a_3\ldots\uparrow$

лист 1

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5q)(a_1+11q) > \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot n+1 \\ (a_1+6q)(a_1+10q) < \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5q)(a_1+11q) > \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n+1 \\ -(a_1+6q)(a_1+10q) > -\frac{a_1+a_n\cdot n}{2}-17 \end{cases}$$

$$a_1^2+16a_1q+55q^2-a_1^2-16a_1q-60q^2 > -16$$

$$x^2+6x-2<0$$

$$5q^2 > 3{,}2,\quad q>0,\ q\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{D}{4}=9+2$$

$$q\in(\sqrt{3{,}2};+\infty)$$

$$x=-3\pm\sqrt{11}$$

$$q_{min}=2$$

$$\begin{cases} (a_1+5q)(a_1+11q) > \frac{2a_1+9q}{2}\cdot 10+1 \\ (a_1+6q)(a_1+10q) < \frac{2a_1+9q}{2}\cdot 10+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16aq+55q^2 > 10a_1+45q+1 \\ a_1^2+16aq-60q^2 < 10a+45q+17 \end{cases}$$

$$(a+3)^2>0$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1-2<0 \end{cases}$$

Черновик

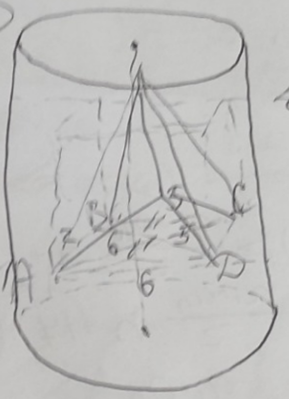
N2

лист 2

AB = 2

AC = CB = 5

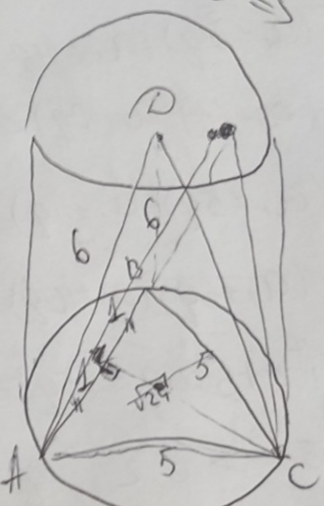
AD = DB = 6

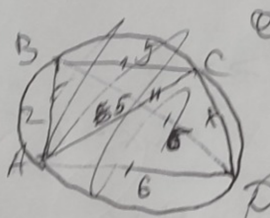


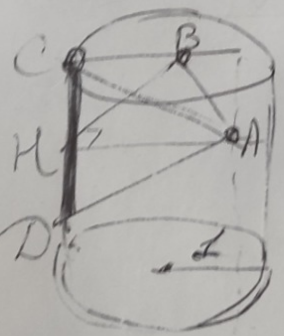
$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R$

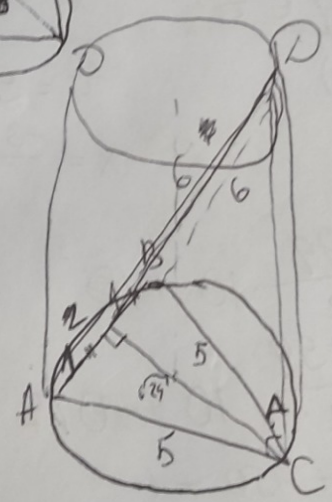
$\triangle ABH$ $\sqrt{11}$

$\frac{CH_1}{H_1D} = \frac{CH_2}{H_2D} \Rightarrow H_1 = H_2 = H$









$CH = \sqrt{CB^2 - BH^2}$

$\sqrt{36-25} = \sqrt{11}$

$HD = \sqrt{DB^2 - BH^2}$

$2x^2 = 4$

$x = \sqrt{2}$

$55 > 46$

$60 < 45 + 17$

$\cancel{\frac{0+3}{2}}$ ~~10~~ ~~45+17~~

$\sqrt{23} + \sqrt{34}$

Черновик

№ 3

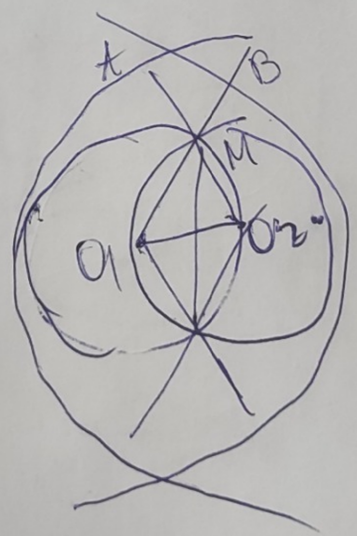
лист 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)\end{cases}$$

1) $a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)$

$$\left[\begin{array}{l}a^2+b^2\le 2a+2b\ ;\ 2a+2b<2\\ a^2+b^2\le 2\ ;\ 2a+2b\ge 2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(a-1)^2+(b-1)^2\le 2\ ;\ b<1-a\\ a^2+b^2\le 2\ ;\ b\ge 1-a\end{array}\right.$$



21101541 (U356125 M1301163)

Часть 2

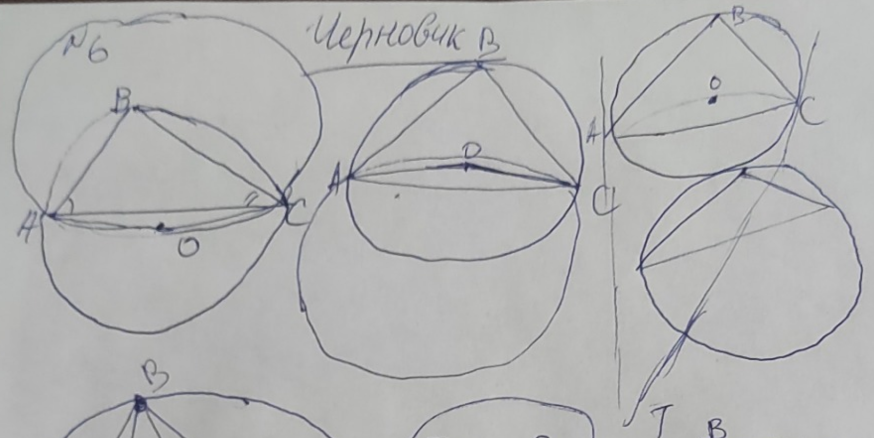
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101541**

ID профиля: **356125**

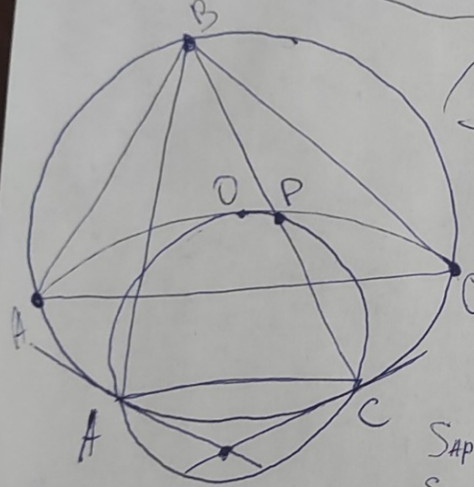
Вариант 17

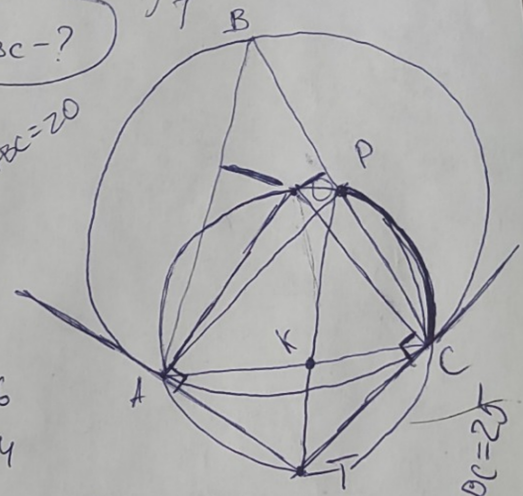
№6 Черновик



S_{ABC} – ?

$S_{ABC} = 20$





$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

$S_{APC} = 6 + 4 = 10$

$S_{APB} = \frac{3k}{2k} \cdot 10 = 15$

$\angle APC = \angle AOC = 2\angle ABC$ - вписан

$\angle CAT = \angle ACT = \angle ABC$ - касат

$\angle ATC + \angle ABC = 180 \Rightarrow T$ на окр

PT - бисс. из впис. APC т.

$\frac{AP}{PC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{4}$, $BP = AB = 3k$, $PC = 2k$

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BC}{PC} = \frac{5k}{2k} \Rightarrow S_{ABC} = 25$

Черновик

№5

ОДЗ-?

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{5x-1}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\cancel{\log}$

$\frac{1}{\log_{4x+1}(5x-1)}=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\cancel{\log}$

$\frac{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{4x+1}(5x-1)+1}{\log_{4x+1}(5x-1)}=0$

$\cancel{\log}\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{4x+1}(5x-1)=-1$

2) $\cancel{\log_{\sqrt{5x-1}}(4}\ 2\log_{(5x-1)}(4x+1)=\cancel{lo}\ \frac{1}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$

$-2\log_{5x-1}(4{,}5x+3)+1=0$

$\log_{5x-1}(4{,}5x+3)=\frac{1}{2}$

замена:

$5x-1=a$, $4x+1=b$, $\frac{x}{2}+2=c$

$\log_{\sqrt{a}}b$; $\log_b(c^2)$; $\log_c a$

Черновик

№4

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 & \text{наибольш общ делитель} \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} & \text{наименьш общ кратн} \end{cases}$

$a=2^{x_1}\cdot 3^{y_2}$ $b=2^{x_2}\cdot 3^{y_2}$ $c=2^{x_3}\cdot 3^{y_3}$

~~15 ≥ x ≥ 16 ≥ y~~ $15\geq x_i\geq 1$; $16\geq y_i\geq 1$

Хотя б 1 $x_i=15$ и $x_j=1$

~ $y_i=16$ и $y_j=1$

а) для степ-й 2:

выбрать какое из $x_j=1$

$3\cdot 2\cdot 13$ ← выбр. $2\leq x_k\leq 14$

выбрать какое из $x_i=15$

$3\cdot 2\cdot 13+\underbrace{3}_{\text{выбрать какие}}$

$x_i=x_j=15$

$x_k=1$

$3\cdot 2\cdot 13+3+\underbrace{3}$ выбрать какие

$x_i=x_j=1$

$x_k=15$

б) анал-но для 3:

$3\cdot 2\cdot 14+3+3=6\cdot 15$

Ответ: $6^2\cdot 14\cdot 15$

Беловик лист 3

$\triangle APB$ (т. Син): $\frac{3k}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin^2\beta} \Rightarrow AB = \frac{30k}{\sqrt{74}}$

$\triangle ABC$ (по т. кос.)

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot \cos\beta = \cdot\ \frac{1250}{21}$

$= \cancel{\frac{30^2k^2}{74} + 25k^2}\ \cdot$

$AC = \sqrt{\frac{1250}{21}}$

Ответ: $S_{ABC} = 25$, $AC = \sqrt{\frac{1250}{21}}$

Беловик лист № 5

$\cancel{\log_{\sqrt{a}} a = 2\log_a c}$

$\log_{\sqrt{a}} b = \frac{\log_c b}{\log_{\sqrt{a}} c} = \frac{1}{k}$

$\cancel{\log_{\sqrt{a}} c}$

$\log_{\sqrt{a}} c = 2\log_a c = \frac{2}{\log_c a} = \frac{2}{\log_b (c^2)}$

$k - 1 = \frac{1}{k} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\cancel{\log_{\frac{x}{2}+2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$ $\log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ – невозможно

$\log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

21101541 (U356125 M1301164)

Беловик лист 4

№2

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

замена:

$5x-1=a$; $4x+1=b$; $\frac{x}{2}+2=c$

$\log_{\sqrt{a}} b$, $\log_b c^2$; $\log_c a$

1) $\begin{cases}\log_{\sqrt{a}} b = \log_b(c^2)=k\\ \log_c a = \log_b c^2 - 1 = \log_{\sqrt{a}} b - 1\end{cases}$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_c b} = \frac{2}{\log_{\sqrt{a}} b}\cdot\frac{\log_b c^2}{2} = k$$

$k-1>k \Rightarrow$ не подходит

$$\log_b c^2 = 2\log_b c \Rightarrow \log_b c = \frac{\log_b(c)^2}{2}$$

$$\log_c b = \frac{2}{\log_b (c)^2} \qquad \log_{\sqrt{a}} b = 2\log_a b$$

$$\log_b a = \frac{2}{\log_{\sqrt{a}} b}$$

2) $\begin{cases}\log_{\sqrt{a}} b = \log_c a = k\\ \log_b(c^2) = 2\frac{\log_a c}{\log_b a} = \log_a c\cdot\log_{\sqrt{a}} b = k^2\end{cases}$

$k^2>k-1$ – нет реш., не подх-т

3) $\begin{cases}\log_b c^2 = \log_c a = k\\ \log_{\sqrt{a}} b = k-1\end{cases}$

Беловик лист 2

№6 B a) S...

Беловик лист ~~4~~ 5

~~$\log_{\sqrt{a}} c = 2\log_a c$~~

$\log_{\sqrt{a}} b = \frac{\log_c b}{\log_{\sqrt{a}} c} = \frac{1}{k}$

~~$\log_{\sqrt{a}} c$~~

$\log_{\sqrt{a}} c = 2\log_a c = \frac{2}{\log_c a} = \frac{2}{\log_b(c^2)}$

$k-1=\frac{1}{k} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

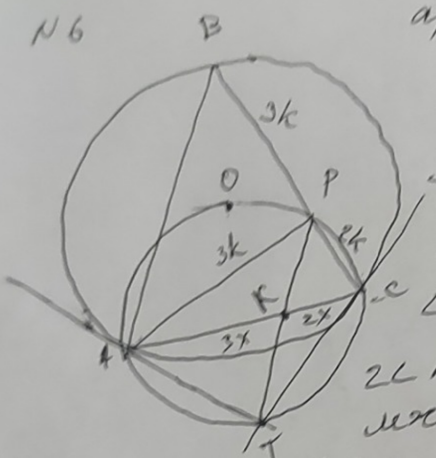
~~$\log_{\frac{x}{2}+2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$~~ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5^x-1) = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ - невозможно

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Беловик лист 2

№6



а) $S_{APK}=6$

$S_{CPK}=4$

$S_{APC}=6+4=10$

$S_{APB}=\frac{3k}{2k}\cdot 10=15$

$\angle APC=\angle ADC=2\angle ABC$ - вписан.

$\angle CAT=\angle ACT=\angle ABC$ - касат

$2\angle ATC+\angle ABC=180^\circ \Rightarrow$ точка T лежит на окр-ти, проходящей через точки A, O, C

PT - биссектриса из вписан. APC т.

$\frac{AP}{PC}=\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{6}{4}$, $BP=AB=3k$, $PC=2k$

$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}=\frac{BC}{DC}=\frac{5k}{2k} \Rightarrow \boxed{S_{ABC}=25}$

б) $tg\,\beta=\frac{7}{5}$

$\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{49}{25}$

$\sin^2\beta=49t$, $\cos^2\beta=25t$,

$74t=\sin^2+\cos^2=1 \Rightarrow t=\frac{1}{74}$

$\sin\beta=\sqrt{49t}=\frac{7}{\sqrt{74}}$ $\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{74}}$

$\sin 2\beta=2\sin\beta\cdot\cos\beta=\frac{70}{74}$

$S_{ABP}=15=\frac{3k\cdot 3k\cdot \sin(180-2\beta)}{2}=\cancel{3k}\ \frac{3k^2\cdot 70}{2\cdot 74}$

$k^2=\frac{15\cdot 2\cdot 74}{9\cdot 70}=\frac{74}{3\cdot 7}$

Беловик Лист 1

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot3^{16} \end{cases}$$

$a=2^{x_1}\cdot 3^{y_1}$ $b=2^{x_2}\cdot3^{y_2}$ $c=2^{x_3}\cdot3^{y_3}$

$15\geq x_i\geq 1$; $16\geq y_i\geq 1$

Хотя бы одно $x_i=15$ и $x_j=1$

Хотя бы одно $y_i=16$ и $y_j=1$

а) для степ-й 2:

выбрать какое из $x_j=1$

$3\cdot 2\cdot 13$ ← выбрать $2\leq x_k\leq 14$

выбрать какое из $x_i=15$

$3\cdot2\cdot13+\underbrace{3}$ выбрать какие $x_i=x_j=15$, $x_k=1$

$3\cdot2\cdot13+3+\underbrace{3}$ выбрать какие $x_i=x_j=1$, $x_k=15$

б) аналогично для 3:

$3\cdot2\cdot14+3+3=6\cdot15$

Ответ: $6^2\cdot14\cdot15$ натур-х $(a;b,c)$