# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101475**

ID профиля: **847214**

Вариант 17

## Задача 1. Чистовик

$$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$$ , $a$ – целые, $d > 0$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S + 1 \\ a_7 a_{11} < S + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1 \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16ad + 55d^2 - 10a_1 - 45d - 1 > 0 \\ a_1^2 + 16ad + 60d^2 - 10a_1 - 45d - 17 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16ad + 55d^2 - 10a_1 - 45d - 1 > 0 \\ -a_1^2 - 16ad - 60d^2 + 10a_1 + 45d + 17 > 0 \end{cases}$$ сложим две строчки

$$-5d^2 + 16 > 0$$

$$d^2 < \frac{16}{5}$$

$$d < \frac{4}{\sqrt{5}}$$ , учитывая, что $d > 0$ (прогрессия возр)

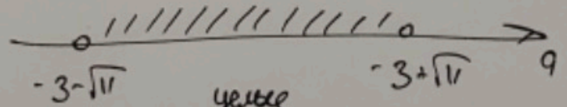
$d = 1$

Подставим $d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+3)^2 > 0 \\ (a - (-3 - \sqrt{11}))(a - (-3 + \sqrt{11})) < 0 \end{cases}$$

$$a \neq -3$$




$-3 - \sqrt{11} > -7$

$4 > \sqrt{11}$

$-3 - \sqrt{11} < -6$

$3 < \sqrt{11}$

$-3 + \sqrt{11} < 1$

$\sqrt{11} < 4$

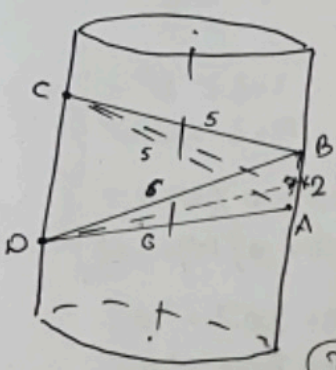
$-3 + \sqrt{11} > 0$

$\sqrt{11} > 3$

Отберем целые корни на числовой прямой и получим $a_1 = \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: $\{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Задача 2 Чистовик



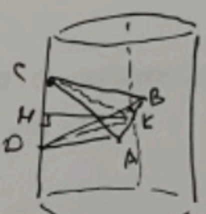

① Т.к. тетраэдр вписан в цилиндр, то все его вершины лежат на боковой поверхности, т.е на образующих, а т.к. CD ∥ оси цилиндра, которая в свою очередь параллельна образ., то (·)C и (·)D ∈ одной образ. => CD ⊥ основанию

② Т.к. необходимо рассмотреть тетраэдр, для которого радиус цилиндра наименьший, тогда диаметр цилиндра будет равен наименьшей стороне, т.е. $r = \frac{1}{2}AB = 1$

③ Найдем высоты в равноб тр-ках BDA и BCA по т. Пифагора: (пусть K - основание высоты)

$CK = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$

$DK = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$




④ Т.к. $\triangle BCA$ и $\triangle ABD$ - равноб., то $AK = KB = 1 = r$ => $K \in$ оси цилиндра

⑤ Построим $KM \perp CD$, т.к. $CD \perp$ осн., $KM \perp CD$, то $KM \parallel$ осн., а т.к. $K \in$ оси, то $KM = r = 1$

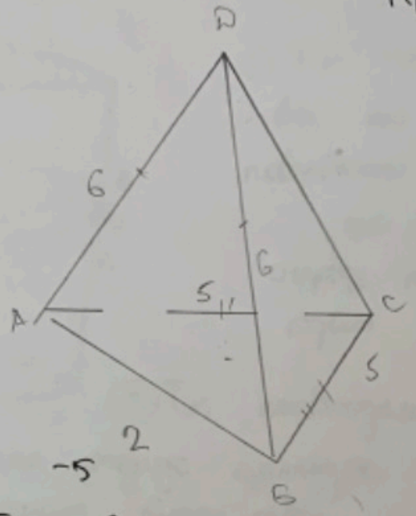
⑥ По т. Пифагора $MD = \sqrt{KD^2 - KM^2} = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$;

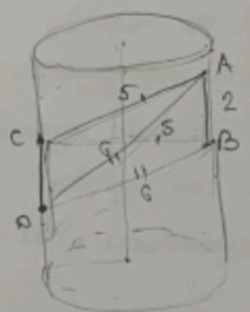
$CM = \sqrt{CK^2 - MK^2} = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$ =>

$CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{23}$

Черновик




$\sqrt{15} - 8$

2

$-5$

$\sqrt{15}$ 3

~~66~~ 5

552

$S = \cancel{\sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}}$

$\cancel{6}2 = 2\sqrt{6}$

$2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$= \sqrt{15} - 8$  $-4$

$\sqrt{15}$  4

$h = \frac{\sqrt{6}}{3}$

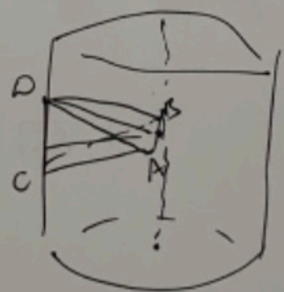
$\sqrt{25 - \frac{6}{9}} = \sqrt{219}$

$= \sqrt{318}$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 9 \\ \hline 225 \\ -\ 6 \\ \hline 219 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 9 \\ \hline 324 \\ -\ 6 \\ \hline 318 \end{array}$$

$\sqrt{36 - \frac{6}{9}} = \sqrt{318}$



$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (2a_1 + 9d) \cdot 5$ $d > 0$

Черновик

(1) $a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1$

(2) $(a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S + 17$

$a_1^2 + 11a_1d + 5da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a^2 + 16ad + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

~~$9a^2 + 16da_1 + 45d + 1 - 55d^2 < 0$~~

$a^2 + 16ad - 10a - 45a - 17 + 60d^2 < 0$

$$\begin{cases} a^2 - 10a + 16da_1 + 55d^2 - 45d - 1 > 0 \\ a^2 + 10a + 16da_1 + 60d^2 - 45d - 17 < 0 \end{cases}$$

$S_7 = 2a_1 + 6$

$a^2 - 10a + 16da_1 - 45d = b$

$$\begin{cases} b > 1 - 55d^2 \\ b < 17 - 60d^2 \end{cases}$$

$+ \begin{cases} a^2 - 10a + 16da_1 + 55d^2 - 45d - 1 > 0 \\ -a^2 + 10a - 16da_1 - 60d^2 + 45 + 17 > 0 \end{cases}$

$-5d^2 + 16 > 0$

$16 < 5d^2$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d < \frac{4\sqrt{5}}{5}$, т.к. целое $d \leq 3$, т.е. $d = 1, 2, 3$

$\frac{4}{\sqrt{5}}$ 3 $3\sqrt{3}$ 16

$36 + 8 = 44$

$\frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{d = 1 \cdot 2}$

~~$a_1^2 + 16a_1 +$~~ $\begin{cases} a^2 + 6a + 9 > 0 \\ a^2 + 6a - 2 < 0 \end{cases}$

$(a+3)^2 > 0$ $a \neq -3$

$36 + 8 = 124$

$a = \frac{-6 \pm 4\sqrt{11}}{2}$

-5 -4 -2 -1 0

$-3 - \sqrt{11}$ $-3$ $-3 + \sqrt{11}$

$4 - \sqrt{11}$

$-1 > -\sqrt{11}$

$\sqrt{11} > 1$

$-5 > -\sqrt{11} - 3$

$-2 > -\sqrt{11}$

$\sqrt{11} > 2$

$a = \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

$-3 - \sqrt{11}$ $-7$

$-\sqrt{11}$ $-4$

21101475 (U847214 M1301555)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101475**

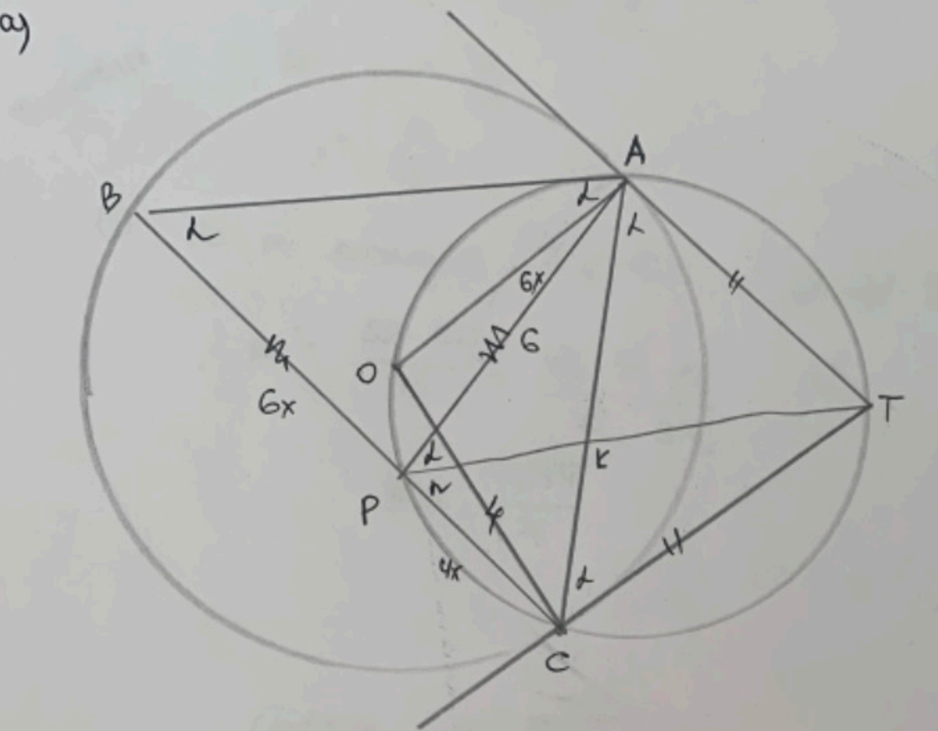
ID профиля: **847214**

Вариант 17

Чистовик

Задача 6

а)




① Построим $OA$ и $OC$: $OA \perp AT$ и $OC \perp TC$ (как рад. в точку касания): в $OATC$ $\angle OAT + \angle OCT = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ около $OATC$ можно опис. окр-ть $\Rightarrow$ те окр, описанной около $\triangle AOC$.

② $AT = TC$ (как касат. провед. из одной точки) $\Rightarrow \angle TAC = \angle ACT$ (пусть они равны $\alpha$)

③ Угол между касат. и хордой равен половине дуги, которую он стягивает $\Rightarrow \smile AC = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = \alpha$ (как вписанный)

④ $\angle CPT = \angle TAC = \angle ACT = \angle APT = \alpha$ (как опирающиеся на одну дугу)

⑤ По т. о внешнем угле тр-ка $\angle BAP = \angle APC - \angle ABP = 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow AP = BP$

⑥ из п.4 $PK$ – бисс. $\Rightarrow$ по св-ву бисс. и площадей

$\frac{AP}{PC} = \frac{S_{PKA}}{S_{PKC}} = \frac{6}{4}$, пусть $AP = 6x$, тогда $PC = 4x$

⑦ $S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 4x \cdot \sin 2\alpha = 10 \Rightarrow x^2 = \frac{10}{12 \sin 2\alpha}$

⑧ $S_{BPA} = \frac{1}{2} BP \cdot PA \cdot \sin\angle BPA = \frac{1}{2} \cdot 36x^2 \cdot \sin 2\alpha = 36 \cdot \frac{5}{12 \sin 2\alpha} \cdot \sin 2\alpha = 15 \Rightarrow$

$S_{ABC} = 10 + 15 = 25$

①

б) (9) По условию $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{7}{5} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{7}{\sqrt{74}} \Rightarrow 2\alpha = \arcsin\frac{35}{37} = \arccos\frac{12}{37}$

(10) $S_{APC} = \frac{1}{2}\cdot \sin\angle APC \cdot 24x^2 = 10$

чистовик

$$20 = 24x^2 \cdot \frac{35}{37}$$

$$x^2 = \frac{37}{42}$$

(11) По т. косинусов в $\triangle APC$: $AC^2 = 36x^2 + 16x^2 - 2\cdot 24x^2 \cdot \cos\angle APC$

$$AC^2 = \frac{52\cdot 37}{42} - \frac{48\cdot 37\cdot 12}{42\cdot 37}$$

$$AC = \frac{\sqrt{14154}}{21}$$

Ответ: а) 25

б) $\frac{\sqrt{14154}}{21}$

Чистовик

Задача 4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

① Т.к. НОД(a;b;c) = 6, то $a \vdots 2$ $a \vdots 3$, $b \vdots 2$ $b \vdots 3$, $c \vdots 2$ $c \vdots 3$, а т.к.

НОК(a;b;c) $= 2^{15}\cdot 3^{16}$, то значит, что у чисел a, b и c никаких делителей кроме 2 и 3 в различных степенях нет.

② Учитывая, что делителей, кроме 2 и 3 нет, каждое число можно представить в виде

$a = 2^{x_1}\cdot 3^{y_1}$

$b = 2^{x_2}\cdot 3^{y_2}$

$c = 2^{x_3}\cdot 3^{y_3}$, причем так как 6 - наибольший общий делитель, то хотя бы у одного из чисел $x=y=1$.

Т.к. НОК $= 2^{15}\cdot 3^{16}$, то хотя бы у одного числа $x=15$, $y=16$

③ ~~Рассмотрим, какими способами можно выбрать необходимые тройки x, который будет равен 1 можно выбрать тремя способами.~~

~~$2^1$; $2^{x_i}$; $2^{15}$, если $2 \le x_i \le 15$, то возможно 14 случаев и 6 перестановок => итого 84 случая, если $x_1 = 1$, то еще 6 переста~~

~~$2^1$; $2^{x_i}$; $2^{15}$ $x_i$ может принимать 16 значений и возможны 6 перестановок, то есть $16\cdot 6 = 96$, аналогично и с y: $17\cdot 6 = 102$ перестановок.~~

④ ~~Таким образом получим $96\cdot 102 = 9792$~~

~~Ответ: 9792~~

③

Задача 4.

Чистовик

(3) $2^1; 2^{x_i}; 2^{15}$, если $2 \le x_i \le 15$, то возможно ~~13~~ случаев и 6 перестановок, то есть ~~...~~ 78 случаи, аналогично с $y$:

$3^1; 3^{x_i}; 3^{16}$ 14 случаев, 6 перестановок: всего ~~...~~ 84 случаев

(4) А если $x = 1$ или $x = 15$ возможно еще 3+3 перестановку 3
так-же если $y = 1$ и $y = 16$ 3+3 перестановки

(5) Таким образом получаем ~~...~~ $90 \cdot 84 = 7560$ случаев

Ответ: 7560

4

21101475 (U847214 M1301556)

Задача 5. Чистовик

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{(5x-1)}(4x+1)$

$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

ОДЗ:

$\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{2}{5} \end{cases}$

* Заметим, что $2\log_{(5x-1)}(4x+1)\cdot 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot \log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1) = 4$

Пусть $x$ и $y$ - равные логарифмы, а $z$ - третий, тогда

$\begin{cases} x = y \\ z = x-1 = y-1 \end{cases}$

Учитывая * получим $x^2 z = 4$

$x^2(x-1) = 4 \Rightarrow x = 2 = y$

Проверим:

$2\log_{(5x-1)}(4x+1) = 2$ $\quad$ $2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 2$ $\quad$ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x+1) = 2$

$x = 2$ $\quad$ $x = \frac{2}{7}$ $\quad$ $x_1 = 2$, $x_2 = 10$,

то есть при $x = 2$ $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x+1)$,

а $\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ меньше их на 1.

Ответ: $x = 2$

4