Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101429**

ID профиля: **804793**

Вариант 17

Чистовик

Стр 1

№1

Пусть d - разность ариф. прогр.

$a_1 = a$

Тогда:

$a_6 = a + 5d$

$a_7 = a_6 + d$

$a_{12} = a + 11d$

$a_{11} = a_{12} - d$

Преступим к решению:

По условию:

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S + 1 \\ S + 17 > a_7 a_{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_6 a_{12} > S + 1 \\ S + 17 > (a_6 + d)(a_{12} - d) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_6 a_{12} > S + 1 \\ S + 17 > a_6 a_{12} + d(a_{12} - a_6) - d^2 \end{cases}$$

Т.к в обоих неравенствах знак „>" $\Rightarrow$ имеем право сложить: получим:

$$a_6 a_{12} + S + 17 > S + 1 + a_6 a_{12} + d(a_{12} - a_6) - d^2$$

$$16 > d(a_{12} - a_6) - d^2 \cancel{\geq 0}$$

$$d^2 - (a_{12} - a_6)d + 16 > 0$$

Т.к коэффициент перед d^2: > 0 $(= 1)$ $\Rightarrow$ $D < 0$ (чтобы не было решений)

Т.е $D = (a_{12} - a_6)^2 - 4 \cdot 16 < 0$

$$(a_{12} - a_6)^2 < 4 \cdot 16$$

$$a_{12} - a_6 < 2 \cdot 4$$

Т.к прогрессия возрастающая $\Rightarrow a_{12} > a_6 \Rightarrow a_{12} - a_6 > 0$ $\Rightarrow$ можем расскрывать без модуля:

$$(a + 11d) - (a + 5d) < \cancel{16}\ 8$$

$$6d < 8$$

$$d < \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \Rightarrow d \leq 1$$

(~~Т.к $d \in$~~ Но т.к все члены - целые $\Rightarrow$ $d > 0$ и $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow \boxed{d = 1}$$

Осталось проверить начальное условие: $\begin{cases} a_6 a_{12} > S + 1 & 1) \\ a_7 a_{11} < S + 17 & 2) \end{cases}$

$$\boxed{S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{a + a + 9d}{2} \cdot 10 = 10a + 45d}$$

1) $a_6 a_{12} > S + 1$

$(a + 5d)(a + 11d) > 10a + 45d + 1$

Т.к $d = 1$ $\Rightarrow$

$(a + 5)(a + 11) > 10a + 46$

$a^2 + 6a + 9 > 0$

$(a + 3)^2 > 0$

$a \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

2) $a_7 a_{11} < S + 17$

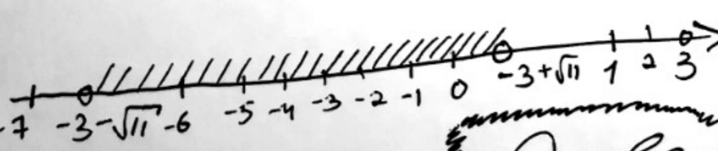
$(a + 6d)(a + 10d) < 10a + 45d + 17$

Т.к $d = 1$ $\Rightarrow$

$(a + 6)(a + 10) < 10a + 62$

$a^2 + 6a - 2 < 0$

$a \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11})$



Пересечение этих решений я нарисовал, т.к ар. прог состоит из целых членов $\Rightarrow a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ в данном промежутке подходят только числа: $-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow$

Ответ: $a \in [-6; 0]; a \in \mathbb{Z}$

№3

Чистовик

стр 2

Итак, условие задачи можно переформулировать и тогда оно будет звучать так:

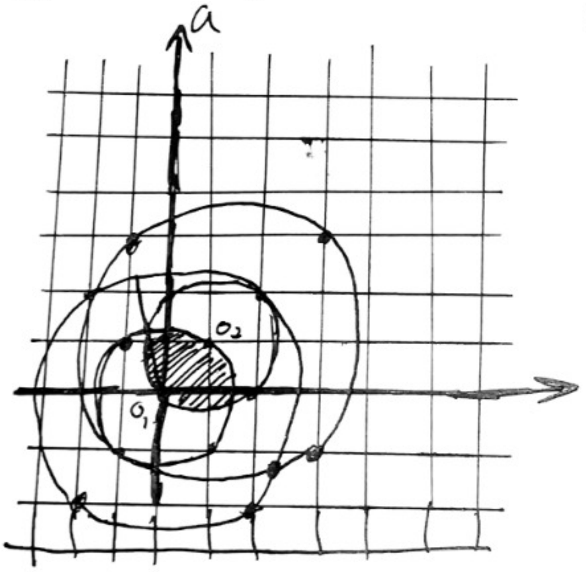
Найдите все пары $(x;y)$ при которых система относительно a и b будет иметь хотя бы 1 решение. Будем решать именно в таком виде.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;\ 2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le(\sqrt2)^2\\ a^2+b^2\le 2a+2b\\ a^2+b^2\le 2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le(\sqrt2)^2\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le(\sqrt2)^2\\ a^2+b^2\le(\sqrt2)^2\end{cases}$$

Давайте нарисуем для начала систему $\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2\le(\sqrt2)^2\\ a^2+b^2\le(\sqrt2)^2\end{cases}$

Это две окружности с центрами $(1;1)$ и $(0;0)$ - их пересечение и будет решением. (радиусы окружностей $=\sqrt2$) см. рис.



Теперь посмотрим на уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2\le(\sqrt2)^2$ - это окружность с радиусом $=\sqrt2$ и центром $(a;b)$.

Нарисуем вокруг точки O_1 и точки O_2 окружность в 2 раза большего радиуса: $(2\sqrt2=R)$ см. рис.

21101429 (U804793 M1301726)

$a_1 = a$
$a_2 = a + d$
$a_3 = a + 2d$
$\vdots$
$a_{10} = a + 9d$
$a_{11} = a + 10d$
$a_{12} = a + 11d$

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{a + (a+9d)}{2} \cdot 10$
$= (2a + 9d)5 = 10a + 45d$

$\boxed{S = 10a + 45d}$

$a_6 = a + 5d$
$a_7 = a + 6d$
$a_{11} = a + 10d$
$a_{12} = a + 11d$

$\Rightarrow a_6 a_{12} = (a+5d)(a+11d)$
$a_7 a_{11} = (a+6d)(a+10d)$

черновик

$x = \underbrace{a^2 + 16ad + 55d^2}_{a_6 a_{12}} > \underbrace{10a + 45d + 1}_{S+1}$

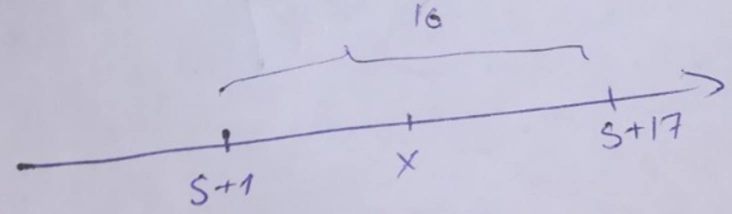
$y = \underbrace{a^2 + 16ad + 60d^2}_{a_7 a_{11}} < \underbrace{10a + 45d + 17}_{S+17}$

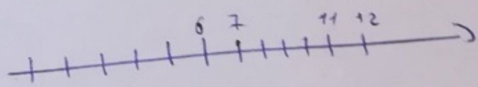
$x > S + 1$
$y < S + 17$

$\sqrt{a_6 a_{12}} \leq \frac{a_6 + a_{12}}{2}$
$4 a_6 a_{12} \leq a_6^2 + 2a_6 a_{12} + a_{12}^2$
$0 \leq a_6^2 - 2a_6 a_{12} + a_{12}^2$

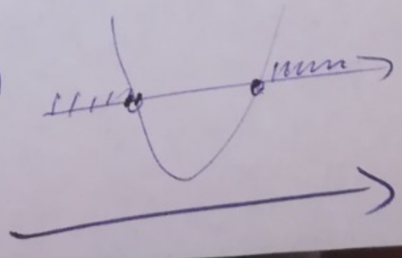
$y > x > S + 1 \Rightarrow S + 1 < y < S + 17$

$10a + 45d + 1 < a^2 + 16ad + 60d^2 < 10a + 45d + 17$





$a^2 + 16ad - 10a + 60d^2 - 45d - 1 > 0$
$a^2 + 2a(8d - 5) + (60d^2 - 45d - 1) > 0$
$D = 64d^2 - 80d + 25 - 60d^2 + 45d + 1 =$
$4d^2 - 35d + 26$
$a_{1,2} = \frac{5 - 8d \pm \sqrt{4d^2 - 35d + 26}}{2}$



1) $a^2 + 16a + 55 > 10a + 45 + 1$
$a^2 + 6a + 9 > 0$
при [illegible] a

2) 60 $\quad 45 + 17$
$a^2 + 6a - 2 < 0$
$D = 36 + 8 = 44 = 4 \cdot 11$
$a_1 = \frac{-6 - 2\sqrt{11}}{2} =$
$-3 - \sqrt{11}$
$a_2 = \sqrt{11} - 3$

$$\frac{a_6^2+2a_6a_{12}+a_{12}^2}{4} \geq a_6a_{12} > S+1$$

$d=1$

$(a+5)(a+11) > 10a+46$

$(a+6)(a+10) < 10a+62$ $\to a^2+16a+60 < 10a+62$

$a^2+6a-2<0$

$a^2+6a+9-11<0$

$(a+3)^2<11$

$a+3<\sqrt{11}$

$a<\sqrt{11}-3$

$a<1$

$\cancel{a^2+11a+5}$

$a^2+16a+55 > 10a+46$

$a^2+6a+9>0$

$(a+3)^2$

Черновик

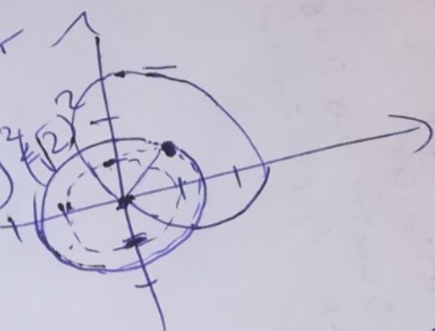
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2\\ a^2+b^2 \leq 2a+2b\\ a^2+b^2\leq 2\end{cases}$$

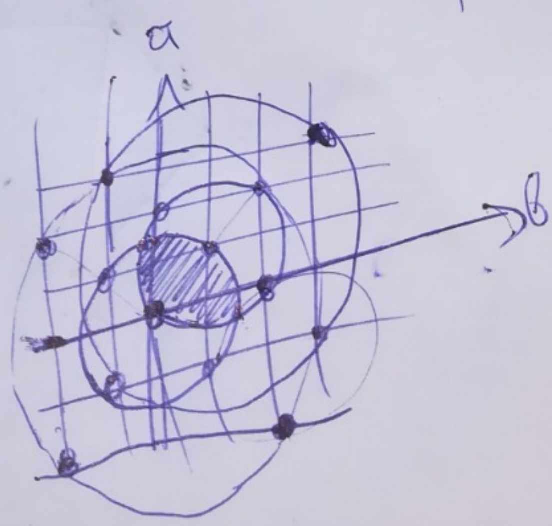
$\to (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\leq 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2\leq 2$

Найти все x и y при которых система имеет решение

$(a-x)^2+(b-y)^2\leq(\sqrt{2})^2$





$S=\pi r^2$
$=2\pi$

$a_6 a_{12} > S+1$

$(a_6+d)(a_{12}-d) < S+17$

$a_6 a_{12} + d(a_{12}-a_6) - d^2 < S+17$

$\cancel{S} + \overset{16}{\cancel{17}} + \cancel{a_6 a_{12}} > \cancel{S} \cancel{+1} \cancel{+a_6 a_{12}} + d(a_{12}-a_6) - d^2$

$d^2 + (a_6 - a_{12})d + 16 > 0$ – всегда

$D = (a_6 - a_{12})^2 - 4 \cdot 16 < 0$

$(a_6 - a_{12})^2 < 4 \cdot 16$

$(a_{12} - a_6)^2 < 4 \cdot 16$

$a_{12} - a_6 < 2 \cdot 4$

$(a+11d) - (a+5d) < 8$

$6d < 8$

$d < \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

$d \le 1$ т.к прогрессия возраст $\Rightarrow$

$\boxed{d=1}$

Черновик

21101429 (U804793 M1301726)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101429**

ID профиля: **804793**

Вариант 17

№4 11 класс Вариант 17 | Чистовик стр 3

Пусть

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2}$

мы используем в разложении только 2 и 3 т.к $НОД(a,b,c) = 6 = 3 \cdot 2$.

При этом $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in [1; 15] \in N$ т.к $НОК(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$ (у двойки 15 степень)

$\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \in [1; 16] \in N$ т.к $НОК(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$ (у тройки 16 степень)

Одно из чисел $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ - точно $= 1$ (т.к $НОД(a,b,c) = 2^1 \cdot 3$ т.е 2 в 1 степени) и одно точно $= 15$ (т.к $НОК(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$ т.е 2 в 15 степени) третье оставш. число $\in [1; 15] \in N$.

Давайте нарисуем табличку и запишем в ней кол-во вариантов которыми могут быть числа $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ в зависимости от того чему они равны:

если $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 15 \Rightarrow \gamma_1 \in [1; 15] \in Z$

т.е $1 \cdot 1 \cdot 15 = 15$ вариантов.

Но мы можем сделать:

$\alpha_1 = 1$, $\beta_1 \in [1; 15] \in Z$, $\gamma_1 = 15$

$\alpha_1 = 15$, $\beta_1 \in [1; 15] \in Z$, $\gamma_1 = 15$

$\alpha_1 = 15$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 \in [1; 15] \in Z$

$\alpha_1 \in [1; 15] \in Z$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = 15$

$\alpha \in [1; 15] \in Z$, $\beta_1 = 15$, $\gamma_1 = 1$

т.е 6 перестановок $\Rightarrow$ всего $6 \cdot 15$ вариантов, но заметим, что мы посчитали варианты:

$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 15$	$\alpha_1 = 15$	$\alpha_1 = 15$	$\alpha_1 = 1$
$\beta_1 = 1$	$\beta_1 = 15$	$\beta_1 = 1$	$\beta_1 = 15$	$\beta_1 = 1$	$\beta_1 = 15$
$\gamma_1 = 15$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 15$	$\gamma_1 = 15$

по 2 раза $\Rightarrow$ всего для степеней двойки вариантов $= 6 \cdot 15 - 6 = 6 \cdot 14$

Для степеней тройки аналогичные рассуждения ~~приводятся~~:

Чистовик стр 4

точно одно из чисел $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2 = 1$

одно из чисел $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2 = 16$

третье число $\in [1; 16] \in \mathbb{Z}$

Т.е

$6 \cdot 16 - 6 = 6 \cdot 15$ вариантов (для степеней троек)

$\Rightarrow$ всего $(6 \cdot 14) \cdot (6 \cdot 15) = 7560$

Ответ: 7560

$\boxed{№5}$ Даны числа

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\Rightarrow$ $5x-1>0$; $4x+1>0$; $\frac{x}{2}+2>0$ $\Rightarrow$ при преобразовании мы не получим противоречий в ограничениях на x (см. что я сейчас сделаю)

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. Заметим, что перемножив эти числа мы получим 4:

$$\underbrace{\underbrace{2\log_{5x-1}(4x+1) \cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}_{4\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)} \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x+1)}_{4} = 4$$

По условию 2 числа равны, третье меньше на 1, пусть первые два числа $= t$ $\Rightarrow$ третье $= (t-1)$

$\Rightarrow t \cdot t \cdot (t-1) = 4$

$t^3 - t^2 - 4 = 0$

$(t-2)(t^2+t+2) = 0$

$t^2+t+2 \neq 0$ т.к $D<0$

$\boxed{t=2}$ единств решение

Пусть $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$ Чистовик стр 5

$\cancel{\log}\ 5x-1=4x+1$

$x=2 \Rightarrow \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_9 9=1$

$\Rightarrow \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_3 9=2 \Rightarrow$

т.е числа

$2;1;2$ – условие выполнено

т.е $\underline{x=2}$ подходит.

Теперь Пусть:

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$

$(4x+1)^2=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

т.к $4x+1>0$

$\frac{x}{2}+2>0 \Rightarrow$

можем просто убрать квадраты

$4x+1=\frac{x}{2}+2$

$8x+2=x+4$

$7x=2$

$x=\frac{2}{7} \Rightarrow \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{10}{7}-\frac{7}{7}\right)=\log_{\frac{1}{7}}\frac{3}{7}$

– противоречие, услови не не выполнено

Пусть: $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1$ т.к $\frac{x}{2}+2>0$, $5x+1>0$

$\cancel{\frac{x}{2}+2=2\sqrt{5x+1}}$

$\cancel{4\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=20x+4}$

$\cancel{(x+8)^2=20x+4}$

$\cancel{x^2+16x+64=20x+4}$

$\cancel{x^2-4x+60=0}$

$\frac{x^2}{4}+2x+4=5x-1$

$x^2+8x+16=20x-4$

$x^2-12x+20=0$

$x=2 \quad x=10$

Первое число

$\log_{7}(40+1)=\log_7 41$ – не подходит ($x=10$)

$\Downarrow$

$x=2$ уже было

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Ответ: } x=2}$

21101429 (U804793 M1301727)

$\sqrt{5x-1} = (5x-1)^{0,5\log_{4x+1}}$

$\frac{1}{n} \cdot a^n$

$t^2(t-1)=4$

$t=2$

$(t^3-1)=(t-1)(t^2+t+1)=(t^2+1)$ 5

$(t-1)(5+t)=5$

$5t+t^2-5-t=5$

$\cancel{t^2-t-25+t(1-5)}$

$0{,}5\log_{5x-1}(4x+1)\,2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$0{,}5\,\frac{\cancel{\log_{4x+1}} 4x+1}{\log_{4x+1} 5x-1}$

Черновик

$3t^2-2t=0$

$t(3t-2)=0$

$x=0$

$t=\frac{2}{3}$

$\frac{8}{27}-\frac{12}{27}-\frac{27}{27}$

$=\frac{8-39}{27}=\frac{-31}{27}\approx -1$

$3t^3\ 3t^2-3=0$

t^3-t^2-1

$4t^3-4t^2-4=0$

$2t^3-2t^2-2=0$

$t^3 t^2-1=0$

$t^3=t^2+1$

$5x-1>0$

$5x>1$

$x>0{,}2$

$\sqrt{6}$

$\cancel{t^3-t^2-4}=0$

$t\cdot t\cdot(t-1)=1$

$t^2(t-1)=1$

$t^3-t^2-1=0$

$t^3-t^2-1=4$

$t^3-t^2-5=0$

$t^2(t-1)=1$

$t^2(t-1)=1$

$t^2(t-t^2(t-1))=1$

$t^3-t^2-4=0$

$$\begin{array}{r|l} t^3-t^2-4 & t-2 \\ \hline -(t^3-2t^2) & t^2+t+2 \\ t^2-4 & \\ -(t^2-2t) & \end{array}$$

Черновик.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$0{,}5 \log_{5x-1}(4x+1) = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\underbrace{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}_{ab}$ $\underbrace{2\log_{4x+1}(5x-1)}_{bc}$ $\underbrace{0{,}5\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)}_{ac}$

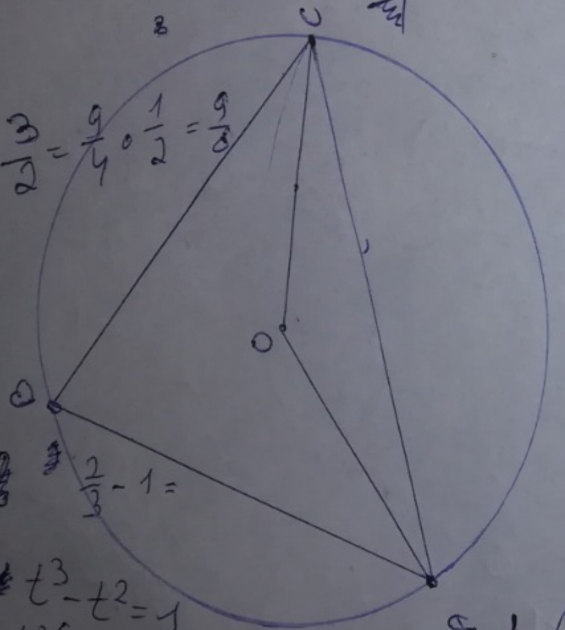
a b c

ab bc ca

если a = b

$\underbrace{0{,}5\log_{5x-1}(4x+1)}_{a^2bc}$ abc = 1

$\log_{5x-1}(5x-1) = a^2b^2c^2 = 1$



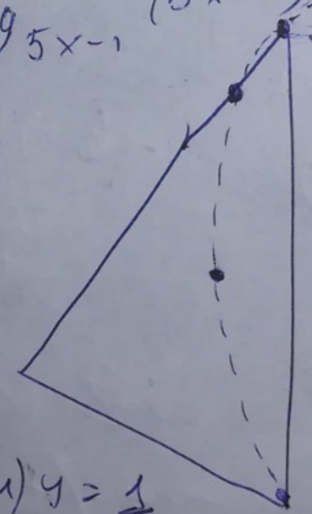
$\frac{3}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$

$\frac{2}{3} - 1 =$

$t^3 - t^2 = 1$

$t^2(t-1) = 1$

$t^2 = \frac{1}{t-1}$ $\frac{4}{9} =$ $\frac{2}{3}$



$(y+1)(y+1)y = 1$

$3t^2 - 2t = 0$

$t(3t-2) = 0$

$t \cdot t \cdot (t-1) = 1$

$t^3 - t^2 - 1 = 0$

$t^2 + 1 = t^3$