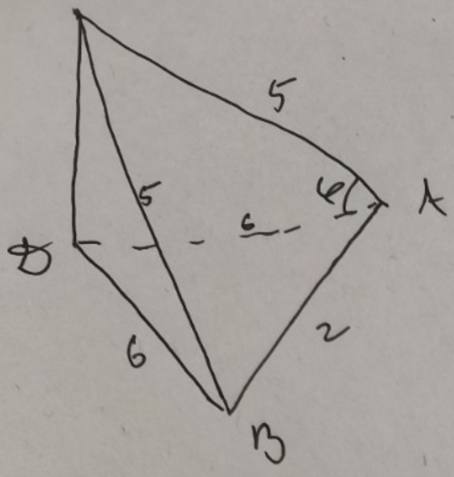
Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

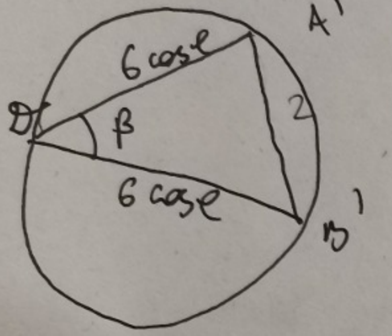
Шифр: **21101363**

ID профиля: **335803**

Вариант 17



Т.к. $\triangle BDC = \triangle DAC$ и $DC \parallel OO_1$, где OO_1 – ось цилиндра. При "поиске" минимального радиуса и DB, и DA будут иметь равный угол – φ с прямой DB', и DA' соответственно которые принадлежат плоскости $\perp OO_1$.



$$2R = \frac{2}{\sin\beta}$$ – По т. синусов

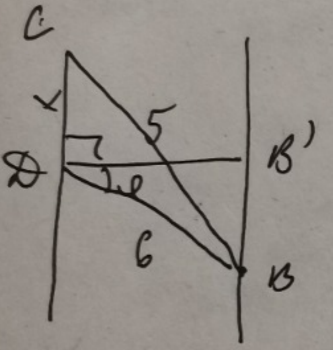
$$4 = 36\cos^2\varphi + 36\cos^2\varphi - 2\cdot 36\cos^2\varphi\cdot\cos\beta$$ – По т. косинусов

$$\cos\beta = 1 - \frac{4}{72\cos^2\varphi} = 1 - \frac{1}{18\cos^2\varphi}$$

$\Downarrow$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{18\cos^2\varphi}\right)^2} =$$

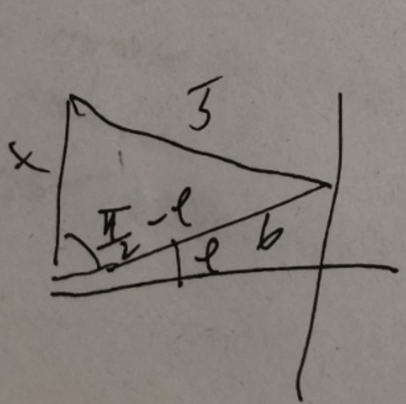
$$= \frac{\sqrt{36\cos^2\varphi - 1}}{18\cos^2\varphi}$$



Тогда $R = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{18\cos^2\varphi}{\sqrt{36\cos^2\varphi - 1}}$

$R_{min} = \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{36\cos^2\varphi - 1}}$ – min, беру производную, $\cos\varphi \neq \frac{1}{6}$

$$\left[\begin{array}{ll} \cos\varphi = \frac{1}{3\sqrt{2}} & \\ \cos\varphi = 0 & \Rightarrow \text{не тетраэдр} \\ \sin\varphi = 0 & \Rightarrow \text{не тетраэдр} \end{array}\right.$$



Ответ: $\boxed{x_{1,2} = \sqrt{34} \pm \sqrt{23}}$

N3.

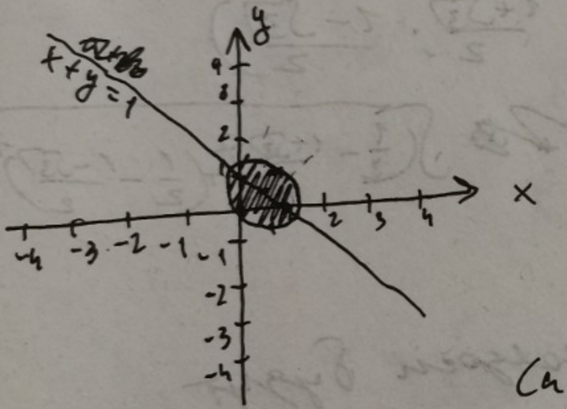
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2) & (2)\end{cases}$$

Выражение (1) определяет круг с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$. Выражение (2) – все допустимые a, b.

$$a^2+b^2\le \min(2(a+b);2)$$

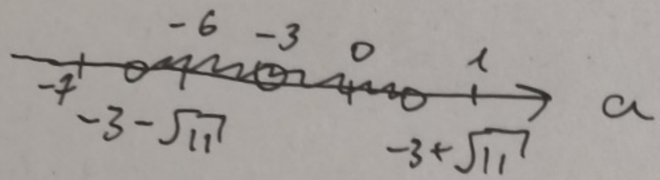
$$a^2+b^2\le 2\min(a+b;1)$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b\ge 1\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a+b<1\\ a^2+b^2\le 2a+2b\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b\ge 1\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a+b<1\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2\end{cases}\end{array}\right.$$



Это множество всех ~~...~~ точек с координатами $(a;b)$ удовлетворяющих (2). Чтобы точка $(x_0;y_0)$ удовлетворяла системе она должна лежать внутри окружности с центром $(a;b)$ то есть ~~...~~ с центром внутри этой фигуры и радиусом $\sqrt{2}$. Если $(x_0;y_0)$ лежит внутри фигуры, то при $a=x_0$, $b=y_0$ $(x_0;y_0)$ будет решением. Если $(x_0;y_0)$ не лежит внутри этой фигуры, то ~~он~~ ~~...~~ $(x_0;y_0)$ будет решением только если точка $(x_0;y_0)$ лежит внутри окружности с радиусом $\sqrt{2}$ и центром в ближайшей точке фигуры. То есть M может быть получена как объединение точек ~~...~~ нашей фигуры и всех удалённых от неё не более, чем на $\sqrt{2}$.

Т. к. нас интересует только площадь ~~...~~ оси ~~координат~~!



Ответ. $a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

21101363 (U335803 M1302360)

$S_{10} = 10a_1 + 45d$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1+45d+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+5a_1d+11a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \\ a_1^2+10a_1d+6a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \\ a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(a_1^2+16a_1d+55d^2) < -(10a_1+45d+1) \\ a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17 \end{cases}$$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

(Т.к. прогрессия возрастающая $d>0$)

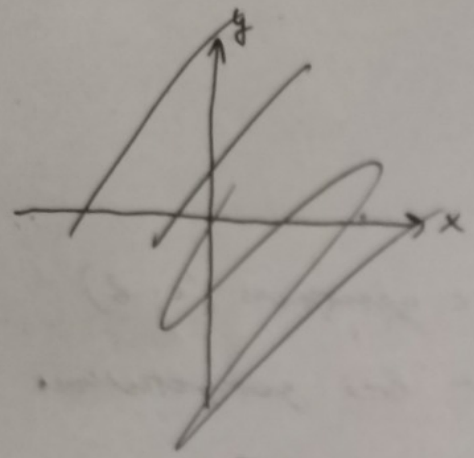
$d < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

$\Downarrow$ Т.к. $a_n \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+45+1 \\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+45+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ \left(a_1 - \frac{-6+2\sqrt{11}}{2}\right)\left(a_1 - \frac{-6-2\sqrt{11}}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

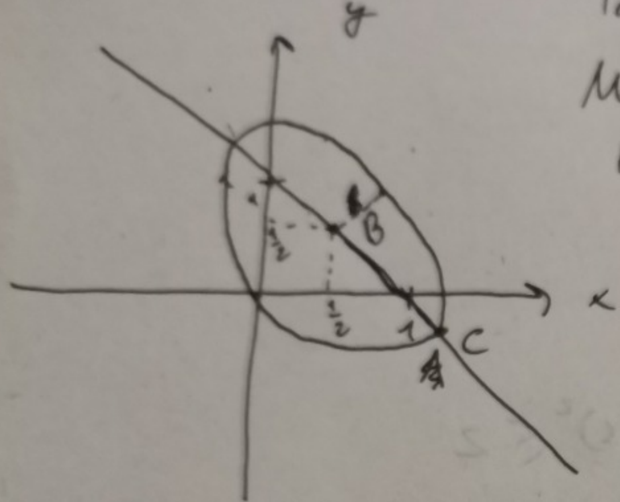


Заметим, что сумма расстояний до точек $(1;0)$, $(0;1)$ от точек этой фигуры постоянна => наша фигура эллипс.

~~У фигуры М малая а большая полуоси~~

Точка $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ - центр.

Малая полуось ~~в~~ $B=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



Найдем т. C:

$$x^2+(1-x)^2=2$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cancel{C\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\ldots\right)}$$

$$y=1-\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Т.е. $C\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

Тогда большая полуось: $A=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$

$$=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

У фигуры М и малая, и большая полуоси будут больше на $\sqrt{2}$. Т.е.

$$S=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{2}\right)=\frac{3\pi}{2}(2+\sqrt{3})$$

Ответ. $\frac{3\pi}{2}(2+\sqrt{3})$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101363**

ID профиля: **335803**

Вариант 17

7) $S_\triangle APC = S_\triangle APK + S_\triangle CPK = 10.$

8) $\cancel{S_\triangle APC = AP}$ $\frac{\sin 2\alpha}{AC} = \frac{\sin(B+90-\alpha)}{AP\,(R)}$ (т. sin для $\triangle APC$).

$\longrightarrow AC\cdot\sin(B+90-\alpha) = R\sin 2\alpha.$

9) $\frac{\sin\alpha}{AC} = \frac{\sin(B+90-\alpha)}{AB} = \frac{1}{2R}$ $\Rightarrow$ $\cancel{AC = 2R\sin\alpha}$ $\Rightarrow AC = 2R\sin\alpha$ (1)

$\sin(B+90-\alpha)\cdot AC = AB\cdot\sin\alpha.$

$\boxed{AB\sin\alpha = R\sin 2\alpha}$

$AB = \frac{R\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ (2)

10) $S_\triangle ABC = \frac{AB\cdot BC}{2}\sin\alpha \overset{(1)\,и\,(2)}{=} \frac{R\sin 2\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}\cdot\frac{BC\cdot\cancel{\sin\alpha}}{2} = \frac{R\cdot BC\cdot\sin 2\alpha}{2}.$

$S_\triangle APC = \frac{AP^2}{2}\sin 2\alpha = \frac{R^2}{2}\sin 2\alpha.$

$\frac{S_\triangle ABC}{S_\triangle APC} = \frac{R\cdot BC\cdot\sin 2\alpha\cdot 2}{2\cdot R^2\sin 2\alpha} = \frac{BC}{R} = \cancel{\sqrt{2}(1-\cos 2\varphi)} = 2\sin\varphi. \Rightarrow$ (3)

$\Rightarrow S_\triangle ABC = 2\sin\varphi\cdot 10 = 20\sin\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\triangle ABC \in [0;20]$

$\Rightarrow S_\triangle ABC \in (10;20)$

11) $\cancel{\frac{BC}{\sin\varphi} = 2R = \frac{AB}{\sin(90-\alpha+B)}}$ $\triangle S_{ABC} = \frac{AB\cdot BC}{2}\sin\varphi$

$\varphi = 180 - \alpha - B - 90 + \alpha - B - 90 + \alpha = \alpha - 2B.$

(3) $BC = \sqrt{2R^2 + 2R^2\cos 2\varphi} = \sqrt{2}\cdot R\sqrt{1-\underbrace{\cos 2\varphi}_{1-2\sin^2\varphi}} = \sqrt{2}\cdot R\cdot\sqrt{2}\sin\varphi = 2R\sin\varphi.$

$\cancel{180 = 2\alpha + 2x}$
$\cancel{90 = \alpha + x}$
$\cancel{x = 90 - \alpha}$

$\cancel{S_\triangle AKP = 6}$

$S_\triangle AKP = \frac{1}{2}AP\cdot PK\sin(90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = 6$

$S_\triangle PCK = \frac{1}{2}PC\cdot PK\sin(90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = 4$

$\Rightarrow \frac{S_\triangle AKP}{S_\triangle PCK} = \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$S_\triangle APC = \frac{1}{2}AP\cdot PC\sin(180 - \alpha - \beta) = 10.$

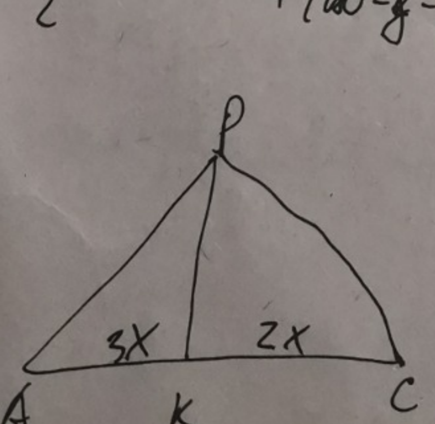
$2AP = 3PC.$

$\Downarrow$

т.к. у $\triangle$ AKP и $\triangle$ PCK общая высота. $\Rightarrow$

$\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}. \Rightarrow AK = \frac{3}{2}KC.$

тогда



21101363 (U335803 M1302361)

№4.

(a, b, c)

НОД $(a, b, c) = 6 \Rightarrow$ $a = 6x$, $b = 6y$, $c = 6z$, где НОД$(x; y; z) = 1$.

НОК $(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

НОК $(6x; 6y; 6z) = 2^{15} \cdot 3^{16} \Rightarrow$ НОК $(x; y; z) = 2^{14} \cdot 3^{15}$.

получаем.

НОД$(x; y; z) = 1$.

НОК$(x; y; z) = 2^{14} \cdot 3^{15}$.

всякая тройка $(x; y; z) \rightarrow$ в одну тройку $(a; b; c)$ значит их кол-во совпад.

Рассмотрим случай $x = 2^{14} \cdot 3^{15}$, тогда если. $y = 1$, $z = 1$, то. с учетом перестановок 3 решения.

$z = 1$, $y = 1$, тогда. $(15 \cdot 16 - 2) 6 + 3 = 1431$.

остается вар-ты $y \neq 1$, $z > 1$ тогда пусть $y; z \geq 13$

если не одно у чисел не равно $2^{13}, 3^{15}$ $14 \cdot 15 \cdot 6 = 1260$, то.

$x \vdots 2^{14}$, $y \vdots 3^{15}$.

$(15 \cdot 16 - 1) \cdot 6 = 1434$.

$x \not\vdots 3$; $y \not\vdots 2$.

$x \vdots 3$; $y \vdots 2$

тогда. $13 \cdot 16 \cdot 6 = 1245$

$x \vdots 3$, $y \not\vdots 2$, тогда: $14 \cdot 15 \cdot 6 = 1280$

$x \vdots 3$, $y \vdots 2$ тогда $14 \cdot 13 \cdot 6 = 1032$

Ответ: 7721.

21101363 (U335803 M1302361)

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) - \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1.$$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$,

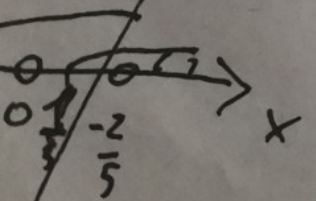
$\ldots 1 > 0, \quad x > \frac{1}{5}$

$\ldots 1 \neq 1, \quad x \neq \frac{2}{5}$

$\ldots 1 > 0, \quad x > -\frac{1}{4}$

$\ldots 1 \neq 1, \quad x \neq 0$

$\ldots \neq 0, \quad x \neq -4.$



$\left(\frac{1}{5}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$

$$\frac{1}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}} - \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 0.$$

$$1 = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \cdot \log_{4x+1}\sqrt{5x-1}.$$

$$1 = \log_{(4x+1)}(0{,}5x+2)! \cdot \log_{4x+1}(5x-1)$$

№5. Заметим, что при $x = 2$.

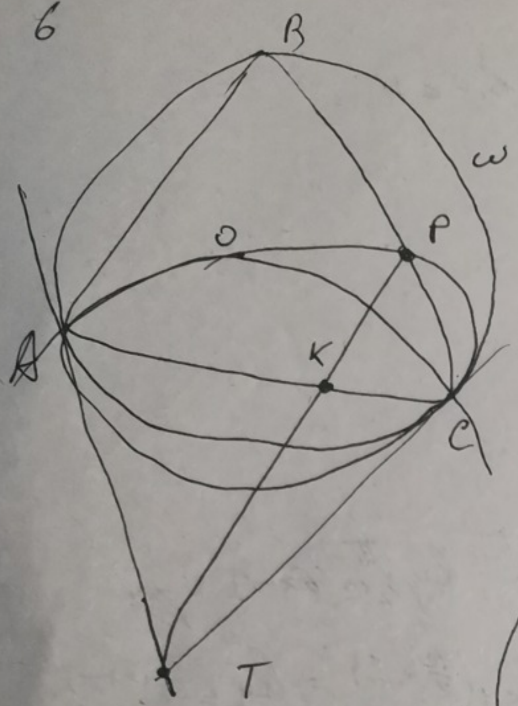
$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2.$$

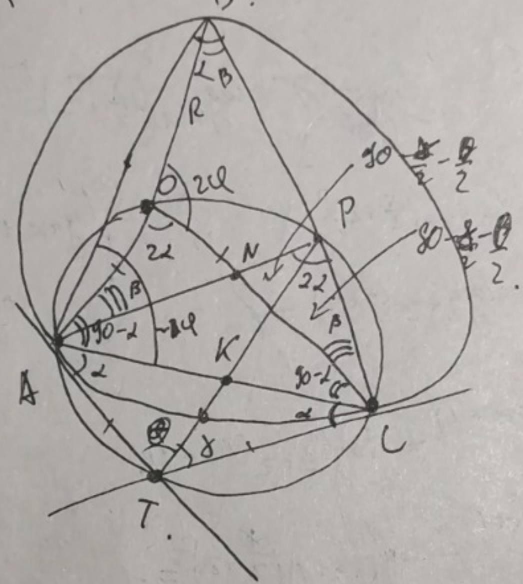
$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1$$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1) = 2.$$

Ответ: 2.

6





$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

S_{ABC} – ?

1) $AT = TC$ (т.к отрезки касательных)

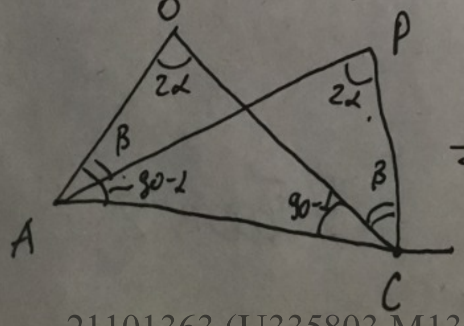
2) $\angle ACT = \angle ABC = \angle TAC = \alpha$

3) $AO = OC$ (радиус).

4) $\angle AOC = \angle APC$ (т.к опираются на одну дугу) $= 2\alpha$.

5) $ON \cdot NC = AN \cdot NP$ и $\angle OAP = \angle OCP$ (опир. на одну дугу)

6) Рассмотрим $\triangle AOC$ и $\triangle APC$.



$\Rightarrow$ Треугольники ~~подобны~~ равны (по 2 углам и стор) $\Rightarrow$ $\triangle APC$ – равнобедр.